

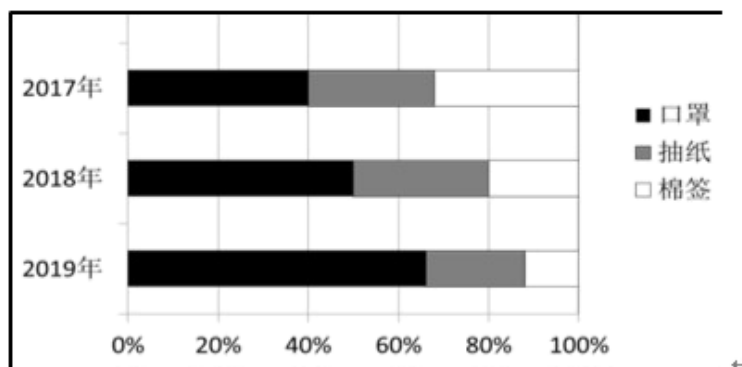
江苏省泰州等四市 2024 年高三 3 月份模拟考试数学试题

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 某工厂只生产口罩、抽纸和棉签，如图是该工厂 2017 年至 2019 年各产量的百分比堆积图（例如 2017 年该工厂口罩、抽纸、棉签产量分别占 40%、27%、33%），根据该图，以下结论一定正确的是（ ）



- A. 2019 年该工厂的棉签产量最少
B. 这三年中每年抽纸的产量相差不明显
C. 三年累计下来产量最多的是口罩
D. 口罩的产量逐年增加

2. 过圆 $x^2 + y^2 = 4$ 外一点 $M(4, -1)$ 引圆的两条切线，则经过两切点的直线方程是（ ）。

- A. $4x - y - 4 = 0$ B. $4x + y - 4 = 0$ C. $4x + y + 4 = 0$ D. $4x - y + 4 = 0$

3. 设 i 是虚数单位，则 $(2 + 3i)(3 - 2i) =$ （ ）

- A. $12 + 5i$ B. $6 - 6i$ C. $5i$ D. 13

4. 已知函数 $f(x+1)$ 是偶函数，当 $x \in (1, +\infty)$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减，设 $a = f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ， $b = f(3)$ ， $c = f(0)$ ，

则 a 、 b 、 c 的大小关系为（ ）

- A. $b < a < c$ B. $c < b < d$ C. $b < c < a$ D. $a < b < c$

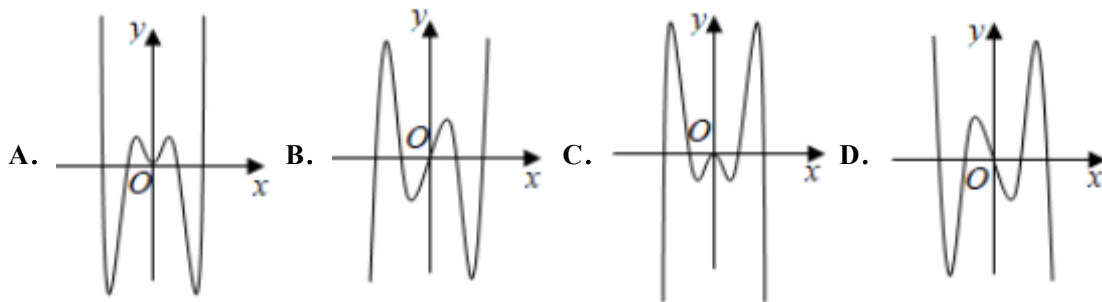
5. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{3}{4}x$ ，且其右焦点为 $(5, 0)$ ，则双曲线 C 的方程为（ ）

- A. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ B. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ C. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$ D. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$

6. 在平面直角坐标系中, 经过点 $P(2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, 渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{2}x$ 的双曲线的标准方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ B. $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{14} = 1$ C. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$ D. $\frac{y^2}{14} - \frac{x^2}{7} = 1$

7. 函数 $f(x) = x^2(x^2 - 1)(x^2 - 4)$ 的图象可能是 ()



8. 设 $y = f(x)$ 是定义域为 R 的偶函数, 且在 $[0, +\infty)$ 单调递增, $a = \log_{0.2} 0.3, b = \log_2 0.3$, 则 ()

- A. $f(a+b) > f(ab) > f(0)$ B. $f(a+b) > f(0) > f(ab)$
C. $f(ab) > f(a+b) > f(0)$ D. $f(ab) > f(0) > f(a+b)$

9. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_4 = -3, S_{12} = 24$, 若 $a_i + a_j = 0$ ($i, j \in \mathbf{N}^*$, 且 $1 \leq i < j$), 则 i 的取值集合是 ()

- A. $\{1, 2, 3\}$ B. $\{6, 7, 8\}$ C. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ D. $\{6, 7, 8, 9, 10\}$

10. 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{a}{x} + a$ 在 $x \in [1, e]$ 上有两个零点, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $\left[\frac{e}{1-e}, -1\right]$ B. $\left[\frac{e}{1-e}, 1\right)$ C. $\left[\frac{e}{1-e}, -1\right)$ D. $[-1, e)$

11. 已知三棱柱

$ABC - A_1B_1C_1$ 的 6 个顶点都在球 O 的球面上. 若 $AB = 3, AC = 4, AB \perp AC, AA_1 = 12$, 则球 O 的半径为 ()

- A. $\frac{3\sqrt{17}}{2}$ B. $2\sqrt{10}$ C. $\frac{13}{2}$ D. $3\sqrt{10}$

12. 已知当 $m, n \in [-1, 1)$ 时, $\sin \frac{\pi m}{2} - \sin \frac{\pi n}{2} < n^3 - m^3$, 则以下判断正确的是 ()

- A. $m > n$ B. $|m| < |n|$
C. $m < n$ D. m 与 n 的大小关系不确定

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_n \neq 0$, 曲线 $y = x^3$ 在点 (a_n, a_n^3) 处的切线经过点 $(a_{n+1}, 0)$, 下列四个结论: ① $a_2 = \frac{2}{3}$

；② $a_3 = \frac{1}{3}$ ；③ $\sum_{i=1}^4 a_i = \frac{65}{27}$ ；④ 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列；其中所有正确结论的编号是_____.

14. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (x, 1)$, $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b}$, 且 $\vec{u} \parallel \vec{v}$, 则实数 x 的值是_____.

15. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点为 F , 过点 F 且倾斜角为 45° 的直线与双曲线 C 的两条渐近线顺次交于 A, B 两点若 $\vec{FB} = 3\vec{FA}$, 则 C 的离心率为_____.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = \sqrt{3}$, $BC = 1$, $\angle C = \frac{2\pi}{3}$, 则 $AC =$ _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

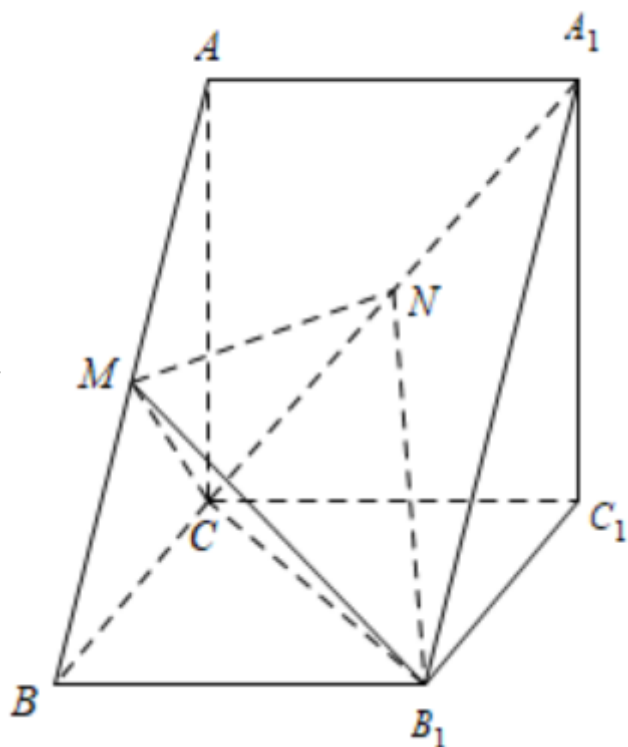
17. (12 分) 已知函数 $f(x) = axe^x$ ($a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$), $g(x) = x + \ln x + 1$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 若对任意的 $x > 0$, $f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

18. (12 分) 如图, 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \perp$ 平面 ABC , $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = CB = 2$, M, N 分别为

AB, A_1C 的中点.



(1) 求证: $MN \parallel$ 平面 BB_1C_1C ;

(2) 若平面 $CMN \perp$ 平面 B_1MN , 求直线 AB 与平面 B_1MN 所成角的正弦值.

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = \ln(2x + a)$ ($x > 0, a > 0$), 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线在 y 轴上的截距为 $\ln 3 - \frac{2}{3}$.

(1) 求 a ;

(2) 讨论函数 $g(x) = f(x) - 2x$ ($x > 0$) 和 $h(x) = f(x) - \frac{2x}{2x+1}$ ($x > 0$) 的单调性;

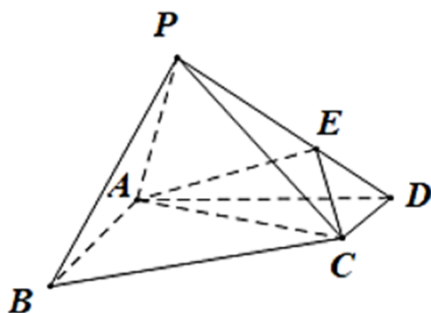
(3) 设 $a_1 = \frac{2}{5}$, $a_{n+1} = f(a_n)$, 求证: $\frac{5-2^{n+1}}{2^n} < \frac{1}{a_n} - 2 < 0$ ($n \geq 2$).

20. (12 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 5$, $a_5 = 14$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2b_n - 1$.

(1) 求 a_n, b_n ;

(2) 若 $c_n = (-1)^n a_n + b_n$, 求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

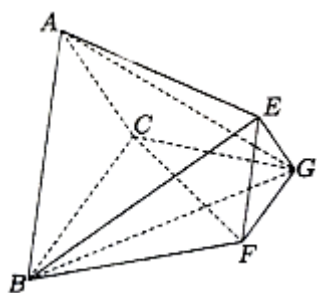
21. (12 分) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面为直角梯形, $AB \parallel CD$, $\angle BAD = 90^\circ$, $AB = 2CD = 4$, $PA \perp CD$, 在锐角 $\triangle PAD$ 中, E 是边 PD 上一点, 且 $AD = PD = 3ED = 3\sqrt{2}$.



(1) 求证: $PB \parallel$ 平面 ACE ;

(2) 当 PA 的长为何值时, AC 与平面 PCD 所成的角为 30° ?

22. (10 分) 如图, 三棱台 $ABC-EFG$ 的底面是正三角形, 平面 $ABC \perp$ 平面 $BCGF$, $CB = 2GF$, $BF = CF$.



(1) 求证: $AB \perp CG$;

(2) 若 $BC = CF$, 求直线 AE 与平面 BEG 所成角的正弦值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

根据该厂每年产量未知可判断 A、B、D 选项的正误，根据每年口罩在该厂的产量中所占的比重最大可判断 C 选项的正误.综合可得出结论.

【详解】

由于该工厂 2017 年至 2019 年的产量未知，所以，从 2017 年至 2019 年棉签产量、抽纸产量以及口罩产量的变化无法比较，故 A、B、D 选项错误；

由堆积图可知，从 2017 年至 2019 年，该工厂生产的口罩占该工厂的总产量的比重是最大的，则三年累计下来产量最多的是口罩，C 选项正确.

故选：C.

【点睛】

本题考查堆积图的应用，考查数据处理能力，属于基础题.

2、A

【解析】

过圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 外一点 (m, n) ,

引圆的两条切线，则经过两切点的直线方程为 $mx + ny - r^2 = 0$ ，故选 A .

3、A

【解析】

利用复数的乘法运算可求得结果.

【详解】

由复数的乘法法则得 $(2+3i)(3-2i) = 6+5i-6i^2 = 12+5i$.

故选：A.

【点睛】

本题考查复数的乘法运算，考查计算能力，属于基础题.

4、A

【解析】

根据 $f(x+1)$ 图象关于 y 轴对称可知 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称，从而得到 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增且 $f(3) = f(-1)$

；再根据自变量的大小关系得到函数值的大小关系.

【详解】

Q $f(x+1)$ 为偶函数 $\therefore f(x+1)$ 图象关于 y 轴对称

$\therefore f(x)$ 图象关于 $x=1$ 对称

Q $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x)$ 单调递减 $\therefore x \in (-\infty, 1)$ 时, $f(x)$ 单调递增

又 $f(3) = f(-1)$ 且 $-1 < -\frac{1}{2} < 0$ $\therefore f(-1) < f(-\frac{1}{2}) < f(0)$, 即 $b < a < c$

本题正确选项: A

【点睛】

本题考查利用函数奇偶性、对称性和单调性比较函数值的大小关系问题, 关键是能够通过奇偶性和对称性得到函数的单调性, 通过自变量的大小关系求得结果.

5、B

【解析】

试题分析: 由题意得 $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$, $c^2 = a^2 + b^2 = 25$, 所以 $a = 4$, $b = 3$, 所求双曲线方程为 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

考点: 双曲线方程.

6、B

【解析】

根据所求双曲线的渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{2}x$, 可设所求双曲线的标准方程为 $2x^2 - y^2 = k$. 再把点 $(2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ 代入, 求得 k 的值, 可得要求的双曲线的方程.

【详解】

$\therefore$ 双曲线的渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{2}x$, $\therefore$ 设所求双曲线的标准方程为 $2x^2 - y^2 = k$. 又 $(2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ 在双曲线上, 则

$k = 16 - 2 = 14$, 即双曲线的方程为 $2x^2 - y^2 = 14$, $\therefore$ 双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{14} = 1$

故选: B

【点睛】

本题主要考查用待定系数法求双曲线的方程, 双曲线的定义和标准方程, 以及双曲线的简单性质的应用, 属于基础题.

7、A

【解析】

先判断函数 $y = f(x)$ 的奇偶性，以及该函数在区间 $(0,1)$ 上的函数值符号，结合排除法可得出正确选项。

【详解】

函数 $y = f(x)$ 的定义域为 R ， $f(-x) = (-x)^2 \cdot [(-x)^2 - 1] \cdot [(-x)^2 - 4] = x^2(x^2 - 1)(x^2 - 4) = f(x)$ ，该函数为偶函数，排除 B、D 选项；

当 $0 < x < 1$ 时， $f(x) = x^2(x^2 - 1)(x^2 - 4) > 0$ ，排除 C 选项。

故选：A.

【点睛】

本题考查根据函数的解析式辨别函数的图象，一般分析函数的定义域、奇偶性、单调性、零点以及函数值符号，结合排除法得出结果，考查分析问题和解决问题的能力，属于中等题。

8、C

【解析】

根据偶函数的性质，比较 $|a+b|, |ab|$ 即可。

【详解】

$$\text{解： } |a+b| = |\log_{0.2} 0.3 + \log_2 0.3| = \left| \frac{\lg 0.3}{\lg 0.2} + \frac{\lg 0.3}{\lg 2} \right|$$

$$= \left| \frac{\lg 0.3 \times \lg \frac{5}{2}}{-\lg 5 \times \lg 2} \right| = -\frac{\lg 0.3 \times \lg \frac{5}{2}}{\lg 5 \times \lg 2}$$

$$|ab| = |\log_{0.2} 0.3 \times \log_2 0.3| = \left| \frac{\lg 0.3}{\lg 0.2} \times \frac{\lg 0.3}{\lg 2} \right|$$

$$= \left| \frac{-\lg 0.3 \times \lg 0.3}{\lg 5 \times \lg 2} \right| = \frac{\lg 0.3 \times \lg 0.3}{\lg 5 \times \lg 2}$$

$$= \frac{-\lg 0.3 \times (-\lg 0.3)}{\lg 5 \times \lg 2}$$

$$= -\frac{\lg 0.3 \times \lg \frac{10}{3}}{\lg 5 \times \lg 2}$$

显然 $\lg \frac{5}{2} < \lg \frac{10}{3}$ ，所以 $|a+b| < |ab|$

$y = f(x)$ 是定义域为 R 的偶函数，且在 $[0, +\infty)$ 单调递增，

所以 $f(ab) > f(a+b) > f(0)$

故选：C

【点睛】

本题考查对数的运算及偶函数的性质，是基础题.

9、C

【解析】

首先求出等差数列的首先和公差，然后写出数列即可观察到满足 $a_i + a_j = 0$ 的 i 的取值集合.

【详解】

设公差为 d ，由题知 $a_4 = -3 \Rightarrow a_1 + 3d = -3$ ，

$$S_{12} = 24 \Rightarrow 12a_1 + \frac{12 \times 11}{2}d = 24,$$

解得 $a_1 = -9$ ， $d = 2$ ，

所以数列为 $-9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$ ，

故 $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

故选：C.

【点睛】

本题主要考查了等差数列的基本量的求解，属于基础题.

10、C

【解析】

对函数求导，对 a 分类讨论，分别求得函数 $f(x)$ 的单调性及极值，结合端点处的函数值进行判断求解.

【详解】

$$\because f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} = \frac{x+a}{x^2}, \quad x \in [1, e].$$

当 $a \geq -1$ 时， $f'(x) \geq 0$ ， $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增，不合题意.

当 $a \leq -e$ 时， $f'(x) \leq 0$ ， $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递减，也不合题意.

当 $-e < a < -1$ 时，则 $x \in [1, -a)$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 在 $[1, -a)$ 上单调递减， $x \in (-a, e]$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 在 $(-a, e]$ 上单调递增，又 $f(1) = 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $x \in [1, e]$ 上有两个零点，只需 $f(e) = 1 - \frac{a}{e} + a \geq 0$ 即可，解得

$$\frac{e}{1-e} \leq a < -1.$$

综上， a 的取值范围是 $\left[\frac{e}{1-e}, -1\right)$.

故选 C.

【点睛】

本题考查了利用导数解决函数零点的问题，考查了函数的单调性及极值问题，属于中档题.

11、C

【解析】

因为直三棱柱中， $AB=3$ ， $AC=4$ ， $AA_1=12$ ， $AB\perp AC$ ，所以 $BC=5$ ，且 BC 为过底面 ABC 的截面圆的直径. 取 BC 中点 D ，则 $OD\perp$ 底面 ABC ，则 O 在侧面 BCC_1B_1 内，矩形 BCC_1B_1 的对角线长即为球直径，所以 $2R=\sqrt{12^2+5^2}=$

$$13, \text{ 即 } R=\frac{13}{2}$$

12、C

【解析】

由函数的增减性及导数的应用得：设 $f(x)=x^3+\sin\frac{\pi x}{2}, x\in[-1,1]$ ，求得可得 $f(x)$ 为增函数，又 $m, n\in[-1, 1)$ 时，根据条件得 $f(m)<f(n)$ ，即可得结果.

【详解】

解：设 $f(x)=x^3+\sin\frac{\pi x}{2}, x\in[-1,1]$ ，

$$\text{则 } f'(x)=3x^2+\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}>0,$$

即 $f(x)=x^3+\sin\frac{\pi x}{2}, x\in[-1,1]$ 为增函数，

$$\text{又 } m, n\in[-1, 1), \sin\frac{\pi m}{2}-\sin\frac{\pi n}{2}<n^3-m^3,$$

$$\text{即 } \sin\frac{\pi m}{2}+m^3<\sin\frac{\pi n}{2}+n^3,$$

所以 $f(m)<f(n)$ ，

所以 $m<n$.

故选：C.

【点睛】

本题考查了函数的增减性及导数的应用，属中档题.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13、①③④

【解析】

先利用导数求得曲线 $y=x^3$ 在点 (a_n, a_n^3) 处的切线方程，由此求得 a_{n+1} 与 a_n 的递推关系式，进而证得数列 $\{a_n\}$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/785323002011011201>