上海市青浦高级中学 2023-2024 学年高三下学期十月阶段性考试试题数学试题

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（B）填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角"条形码粘贴处"。

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。

3．非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4．考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．中国古代数学著作《算法统宗》中有这样一个问题："三百七十八里关，初行健步不为难，次日脚痛减一半，六朝才得到其关，要见次日行里数，请公仔细算相还."意思为有一个人要走 **378** 里路，第一天健步行走，从第二天起脚痛，每天走的路程为前一天的一半，走了六天恰好到达目的地，请问第二天比第四天多走了（　　）

A．96 里　　**B．72** 里　　**C．48** 里　　**D．24** 里

2．已知甲盒子中有 m 个红球，n 个蓝球，乙盒子中有 $m-1$ 个红球，$n+1$ 个蓝球 $(m\geq 3, n\geq 3)$，同时从甲乙两个盒子中取出 $i(i=1,2)$ 个球进行交换，（**a**）交换后，从甲盒子中取 **1** 个球是红球的概率记为 $p_i(i=1,2)$.（**b**）交换后，乙盒子中含有红球的个数记为 $\xi_i(i=1,2)$.则（　　）

A． $p_1 > p_2, E(\xi_1) < E(\xi_2)$　　**B．** $p_1\langle p_2, E(\xi_1)\rangle E(\xi_2)$

C． $p_1 > p_2, E(\xi_1) > E(\xi_2)$　　**D．** $p_1 < p_2, E(\xi_1) < E(\xi_2)$

3．函数 $f(x)=ax+\dfrac{1}{x}$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是（　　）

A． $\left(\dfrac{1}{4},+\infty\right)$　　**B．** $\left[\dfrac{1}{4},+\infty\right)$　　**C．** $[1,+\infty)$　　**D．** $\left(-\infty,\dfrac{1}{4}\right]$

4．《周易》是我国古代典籍，用"卦"描述了天地世间万象变化．如图是一个八卦图，包含乾、坤、震、巽、坎、离、艮、兑八卦（每一卦由三个爻组成，其中"——"表示一个阳爻，"— —"表示一个阴爻）．若从含有两个及以上阳爻的卦中任取两卦，这两卦的六个爻中都恰有两个阳爻的概率为（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{3}{4}$

5．已知三棱锥$P-ABC$的四个顶点都在球O的球面上,$PA\perp$平面ABC,ΔABC是边长为$2\sqrt{3}$的等边三角形,若球O的表面积为20π,则直线PC与平面PAB所成角的正切值为(　　)

A．$\frac{3}{4}$　　B．$\frac{\sqrt{7}}{3}$　　C．$\frac{3}{7}\sqrt{7}$　　D．$\frac{\sqrt{7}}{4}$

6.记集合$A=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 16\right\}$和集合$B=\left\{(x,y)\middle|x+y\le 4,x\ge 0,y\ge 0\right\}$表示的平面区域分别是$\Omega_1$和$\Omega_2$,若在区域$\Omega_1$内任取一点,则该点落在区域$\Omega_2$的概率为(　　)

A．$\frac{1}{4\pi}$　　B．$\frac{1}{\pi}$　　C．$\frac{1}{2\pi}$　　D．$\frac{\pi-2}{4\pi}$

7.已知直线l：$kx-y-3k+1=0$与椭圆$C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$交于$A$、$B$两点，与圆$C_2$：$(x-3)^2+(y-1)^2=1$交于$C$、$D$两点.若存在$k\in[-2,-1]$，使得$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$，则椭圆$C_1$的离心率的取值范围为（　）

A．$\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$　　B．$[\frac{\sqrt{3}}{3},1)$　　C．$(0,\frac{\sqrt{3}}{3}]$　　D．$[\frac{\sqrt{6}}{3},1)$

8．数列$\{a_n\}$满足$a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，且$a_1+a_2+a_3=9$，$a_4=8$，则$a_5=$（　　）

A．$\frac{21}{2}$　　B．9　　C．$\frac{17}{2}$　　D．7

9．设$e\approx 2.71828\ldots$为自然对数的底数，函数$f(x)=e^x-e^{-x}-1$，若$f(a)=1$，则$f(-a)=$(　　)

A．-1　　B．1　　C．3　　D．-3

10．已知F_1,F_2分别为双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，过$F_1$的直线$l$与双曲线$C$的左、右两支分别交于$A,B$两点，若$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BF_2}=0,\frac{|BF_2|}{|AF_2|}=\frac{4}{5}$，则双曲线$C$的离心率为（　　）

A．$\sqrt{13}$　　B．4　　C．2　　D．$\sqrt{3}$

11．已知双曲线$C_1:\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{m-10}=1$与双曲线$C_2:x^2-\frac{y^2}{4}=1$有相同的渐近线，则双曲线$C_1$的离心率为（　　）

A．$\frac{5}{4}$　　B．5　　C．$\sqrt{5}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{2}$

12．已知复数z满足$z(1-i)=2$，其中i为虚数单位，则$z-1=$（　　）．

A．i　　　　　　B．$-i$　　　　　　C．$1+i$　　　　　　D．$1-i$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．若变量x，y满足约束条件$\begin{cases}x-y+2\geq 0\\3x+y\leq 0\\x+y\geq 0\end{cases}$，则$z=3x+2y$的最大值为__________.

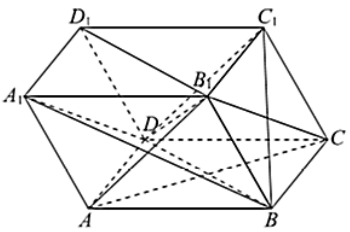
14．已知$\vec{i},\vec{j}$是夹角为90°的两个单位向量，若$\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$，$\vec{b}=\vec{j}$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为______.

15．设F_1，F_2分别是椭圆 ***C***：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右焦点，直线 ***l*** 过$F_1$交椭圆 ***C*** 于 ***A***，***B*** 两点，交 ***y*** 轴于 ***E*** 点，若满足$\overrightarrow{F_1E}=2\overrightarrow{AF_1}$，且$\angle EF_1F_2=60^{\circ}$，则椭圆 ***C*** 的离心率为______.

16．已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（***a***＞0，***b***＞0）的两个焦点为$F_1\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$、$F_2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，点 ***P*** 是第一象限内双曲线上的点，且$tan\angle PF_1F_2=\dfrac{1}{2}$，$tan\angle PF_2F_1=-2$，则双曲线的离心率为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）如图，在四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，底面$ABCD$为菱形，$AB_1=CB_1$.



（1）证明：平面$BDD_1B_1\perp$平面$ABCD$；

（2）若$\angle DAB=60^{\circ}$，ΔDB_1B是等边三角形，求二面角A_1-BD-C_1的余弦值.

18．（12 分）已知函数$f(x)=(x+a)\ln(x+a)+e^x+x$.

（1）当$a=1$时，求函数$f(x)$的图象在$x=0$处的切线方程；

（2）讨论函数$h(x)=f(x)-e^x-x$的单调性；

（3）当$a=0$时，若方程$h(x)=f\left(x\right)-e^x-x=m$有两个不相等的实数根$x_1,x_2$，求证：$\ln(x_1+x_2)>\ln 2-1$.

19．（12 分）设椭圆 **E**:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（**a,b>0**）过 **M**（**2**，$\sqrt{2}$），**N(**$\sqrt{6}$**,1)**两点，**O** 为坐标原点，

（1）求椭圆 **E** 的方程；

（2）是否存在圆心在原点的圆，使得该圆的任意一条切线与椭圆 **E** 恒有两个交点 **A,B**,且$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$？若存在，写出该圆的方程，若不存在说明理由.

20.（12 分）在数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=1$，且$na_{n+1}=(n+1)a_n+3n(n+1)$，$n\in N^*$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=\dfrac{n(n+1)}{a_na_{n+1}}$，数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$，证明：$\dfrac{1}{4}\le T_n<\dfrac{1}{3}$.

21.（12 分）已知集合$A_n=\{1,2,\cdots,n\}$，$n\in N^*$，$n\ge 2$，将A_n的所有子集任意排列，得到一个有序集合组$(M_1,M_2,\cdots,M_m)$，其中$m=2^n$.记集合M_k中元素的个数为a_k，$k\in N^*$，$k\le m$，规定空集中元素的个数为0.

(1)当$n=2$时，求$a_1+a_2+\cdots+a_m$的值；

(2)利用数学归纳法证明：不论$n(n\ge 2)$为何值，总存在有序集合组$(M_1,M_2,\cdots,M_m)$，满足任意$i\in N^*$，$i\le m-1$，都有$|a_i-a_{i+1}|=1$.

22.（10 分）设数列$\{□_□\}$的前□项和为$□_□$，且$□_1=1, □_{□+1}=2□_□+1$，数列$\{□_□\}$满足$□_1=□_1$，点$□(□_□,□_{□+1})$在$□-□+2=0$上，$□\in □^*$.

（1）求数列$\{□_□\}$，$\{□_□\}$的通项公式；

（2）设$□_□=\dfrac{□_□}{□_□}$，求数列$\{□_□\}$的前□项和$□_□$.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、**B**

【解析】

人每天走的路程构成公比为$\dfrac{1}{2}$的等比数列，设此人第一天走的路程为a_1，计算$a_1=192$，代入得到答案.

【详解】

由题意可知此人每天走的路程构成公比为$\dfrac{1}{2}$的等比数列，设此人第一天走的路程为a_1，

则$\dfrac{a_1\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^6\right]}{1-\dfrac{1}{2}}=378$，解得$a_1=192$，从而可得$a_2=192\times\dfrac{1}{2}=96,a_4=192\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=24$，故

$a_2-a_4=96-24=72$.

故选：B.

【点睛】

本题考查了等比数列的应用，意在考查学生的计算能力和应用能力.

2、**A**

【解析】

分析：首先需要去分析交换后甲盒中的红球的个数，对应的事件有哪些结果，从而得到对应的概率的大小，再者就是对随机变量的值要分清，对应的概率要算对，利用公式求得其期望.

详解：根据题意有，如果交换一个球，

有交换的都是红球、交换的都是蓝球、甲盒的红球换的乙盒的蓝球、甲盒的蓝球交换的乙盒的红球，

红球的个数就会出现$m,m-1,m+1$三种情况；

如果交换的是两个球，有红球换红球、蓝球换蓝球、一蓝一红换一蓝一红、红换蓝、蓝换红、一蓝一红换两红、一蓝一红换亮蓝，

对应的红球的个数就是$m-2,m-1,m,m+1,m+2$五种情况，所以分析可以求得$p_1>p_2,E(\xi_1)<E(\xi_2)$，故选**A.**

点睛：该题考查的是有关随机事件的概率以及对应的期望的问题，在解题的过程中，需要对其对应的事件弄明白，对应的概率会算，以及变量的可取值会分析是多少，利用期望公式求得结果.

3、**B**

【解析】

对a分类讨论，当$a\le 0$，函数$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减，当$a>0$，根据对勾函数的性质，求出单调递增区间，即可求解.

【详解】

当$a\le 0$时，函数$f(x)=ax+\dfrac{1}{x}$在$(2,+\infty)$上单调递减，

所以$a>0$，$f(x)=ax+\dfrac{1}{x}$的递增区间是$\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}},+\infty\right)$，

所以$2\ge\dfrac{1}{\sqrt{a}}$，即$a\ge\dfrac{1}{4}$.

故选:B.

【点睛】

本题考查函数单调性，熟练掌握简单初等函数性质是解题关键，属于基础题.

4、B

【解析】

基本事件总数为6个，都恰有两个阳爻包含的基本事件个数为3个，由此求出概率.

【详解】

解：由图可知，含有两个及以上阳爻的卦有巽、离、兑、乾四卦，

取出两卦的基本事件有（巽，离），（巽，兑），（巽，乾），（离，兑），（离，乾），（兑，乾）共6个，其中符合条件的基本事件有（巽，离），（巽，兑），（离，兑）共3个，

所以，所求的概率$P=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

故选：B.

【点睛】

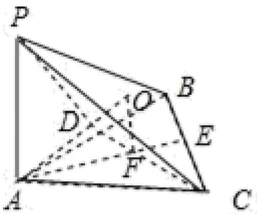
本题渗透传统文化，考查概率、计数原理等基本知识，考查抽象概括能力和应用意识，属于基础题.

5、C

【解析】

设D为AB中点,先证明$CD\perp$平面PAB，得出$\angle CPD$为所求角,利用勾股定理计算PA,PD,CD,得出结论.

【详解】



设D,E分别是AB,BC的中点AE Ι $CD=F$

Q $PA\perp$平面ABC　　$\therefore PA\perp CD$

Q ΔABC是等边三角形　　$\therefore CD\perp AB$

又PA Ι $AB=A$

\ CD^ 平面PAB　　$\therefore\angle CPD$为PC与平面PAB所成的角

Q ΔABC是边长为$2\sqrt{3}$的等边三角形

$\therefore CD=AE=3$，$AF=\frac{2}{3}AE=2$且F为ΔABC所在截面圆的圆心

$\because$ 球 O 的表面积为 20π　　$\therefore$ 球 O 的半径 $OA=\sqrt{5}$

$\therefore OF=\sqrt{OA^2-AF^2}=1$

$\because PA\perp$ 平面 ABC　　$\therefore PA=2OF=2$

$\therefore PD=\sqrt{PA^2+AD^2}=\sqrt{7}$

$\therefore \tan\angle CPD=\dfrac{CD}{PD}=\dfrac{3}{\sqrt{7}}=\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$

本题正确选项：C

【点睛】

本题考查了棱锥与外接球的位置关系问题，关键是能够通过垂直关系得到直线与平面所求角，再利用球心位置来求解出线段长，属于中档题．

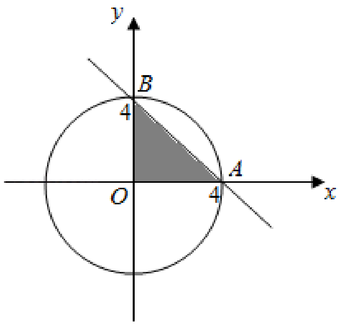
6、**C**

【解析】

据题意可知，是与面积有关的几何概率，要求 M 落在区域 Ω_2 内的概率，只要求 A、B 所表示区域的面积，然后代入概率公式 $P=\dfrac{\text{区域}\Omega_2\text{的面积}}{\text{区域}\Omega_1\text{的面积}}$，计算即可得答案．

【详解】

根据题意可得集合 $A=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 16\}$ 所表示的区域即为如图所表示：



的圆及内部的平面区域，面积为 16π，

集合 $B=\{(x,y)\,|\,x+y-4\leqslant 0,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$ 表示的平面区域即为图中的 $Rt\Delta AOB$，$S_{\Delta AOB}=\dfrac{1}{2}\times 4\times 4=8$，

根据几何概率的计算公式可得 $P=\dfrac{8}{16\pi}=\dfrac{1}{2\pi}$，

故选：**C**．

【点睛】

本题主要考查了几何概率的计算，本题是与面积有关的几何概率模型．解决本题的关键是要准确求出两区域的面积．

7、**A**

【解析】

由题意可知直线过定点即为圆心，由此得到 A,B 坐标的关系，再根据点差法得到直线的斜率 k 与 A,B 坐标的关系，由此化简并求解出离心率的取值范围.

【详解】

设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，且线 $l:kx-y-3k+1=0$ 过定点 $\left(3,1\right)$ 即为 C_2 的圆心，

因为 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$，所以 $\begin{cases}x_1+x_2=x_C+x_D=2\times3=6\\y_1+y_2=y_C+y_D=2\times1=2\end{cases}$，

又因为 $\begin{cases}b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2\\b^2x_2^2+a^2y_2^2=a^2b^2\end{cases}$，所以 $b^2\left(x_1^2-x_2^2\right)=-a^2\left(y_1^2-y_2^2\right)$，

所以 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x_1+x_2}{y_1+y_2}$，所以 $k=-\dfrac{3b^2}{a^2}\in\left[-2,-1\right]$，

所以 $\dfrac{b^2}{a^2}\in\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right]$，所以 $\dfrac{a^2-c^2}{a^2}\in\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right]$，所以 $\left(1-e^2\right)\in\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right]$，

所以 $e\in\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right]$.

故选：A.

【点睛】

本题考查椭圆与圆的综合应用，着重考查了椭圆离心率求解以及点差法的运用，难度一般.通过运用点差法达到“设而不求”的目的，大大简化运算.

8、A

【解析】

先由题意可得数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，再根据 $a_1+a_2+a_3=9$，$a_4=8$，可求出公差，即可求出 a_5.

【详解】

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}(n\in N^*)$，则数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，

$\because a_1+a_2+a_3=9$，$a_4=8$，

$\therefore 3a_1+3d=9$，$a_1+3d=8$，

$\therefore d=\dfrac{5}{2}$，

$\therefore a_5=a_4+d=8+\dfrac{5}{2}=\dfrac{21}{2}$，

故选：A.

【点睛】

本题主要考查了等差数列的性质和通项公式的求法，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平，属于基础题.

9、**D**

【解析】

利用$f\left(a\right)$与$f\left(-a\right)$的关系，求得$f\left(-a\right)$的值.

【详解】

依题意$f\left(a\right)=e^{a}-e^{-a}-1=1,e^{a}-e^{-a}=2$，

所以$f\left(-a\right)=e^{-a}-e^{a}-1=-\left(e^{a}-e^{-a}\right)-1=-2-1=-3$

故选：**D**

【点睛】

本小题主要考查函数值的计算，属于基础题.

10、**A**

【解析】

由已知得$AB\perp BF_2$，$|BF_2|=4x$，由已知比值得$|AF_2|=5x,|AB|=3x$，再利用双曲线的定义可用a表示出$|AF_1|$，$|AF_2|$，用勾股定理得出a,c的等式，从而得离心率.

【详解】

$\because \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BF_2}=0,\overrightarrow{AB}\neq 0,\overrightarrow{BF_2}\neq 0,\therefore \angle ABF_2=90^\circ$.又$\because \dfrac{|BF_2|}{|AF_2|}=\dfrac{4}{5}$，$\therefore$可令$|BF_2|=4x$，则$|AF_2|=5x,|AB|=3x$.设$|AF_1|=t$，得$|AF_2|-|AF_1|=|BF_1|-|BF_2|=2a$，即$5x-t=\left(3x+t\right)-4x=2a$，解得$t=3a,x=a$，$\therefore|BF_2|=4a$，$|BF_1|=|AB|+|AF_1|=6a$，

由$|BF_1|^2+|BF_2|^2=|F_1F_2|^2$得$(6a)^2+(4a)^2=(2c)^2$，$c^2=13a^2$，$c=\sqrt{13}a$，$\therefore$该双曲线的离心率$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{13}$.

故选：**A.**