函数图象与几何动点问题

(1)由运动方式获得图象

例 如图1，在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$的顶点A，C分别是直线$y=-x+4$与坐标轴的交点，点B的坐标为(－2，0)，点D是边AC上的一点，$\frac{8}{3}$

$DE\perp BC$于点E，点F在边AB上，且D，F两点关于y轴上的某点成中心对称，连结DF，EF.设点D的横坐标

为m，EF^2为l，请探究：

①线段EF的长度是否有最小值.

②$\triangle BEF$能否成为直角三角形.

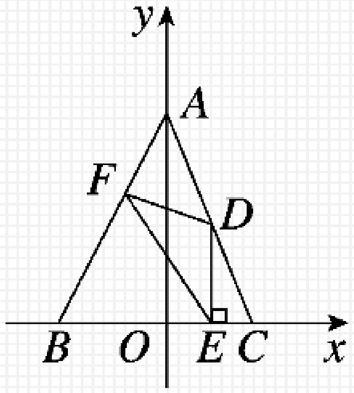

图1

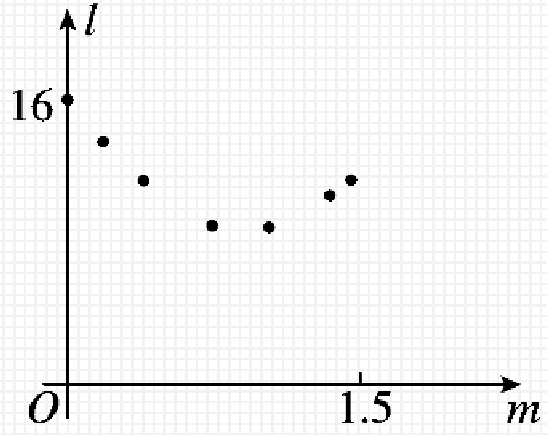

图2

小明尝试用“观察－猜想－验证－应用”的方法进行探究，请你一起来解决问题.

(1)小明利用“几何画板”软件进行观察，测量，得到l随m变化的一组对应值，并在平面直角坐标系中以各对应值为坐标描点(如图2).请你在图2中连线，观察图象特征并猜想l与m可能满足的函数类别.

(2)小明结合图1，发现应用三角形和函数知识能验证(1)中的猜想，请你求出l关于m的函数表达式及自变量的取值范围，并求出线段EF长度的最小值.

(3)小明通过观察、推理，发现$\triangle BEF$能成为直角三角形，请你求出当$\triangle BEF$为直角三角形时m的值.

解：(1)用描点法画出图象，如图1，

由图象可知函数类别为二次函数.

(2)如图2，过点F，D分别作FG，DH垂直于y轴，垂足分别为G，H，

则$\angle FGK=\angle DHK=90°$，记$FD$交$y$轴于点$K$，

$\because D$点与F点关于y轴上的K点成中心对称，$\therefore KF=KD$.

$\because \angle FKG=\angle DKH$，$\therefore \mathrm{Rt}\triangle FGK\cong \mathrm{Rt}\triangle DHK(AAS)$，$\therefore FG=DH$.

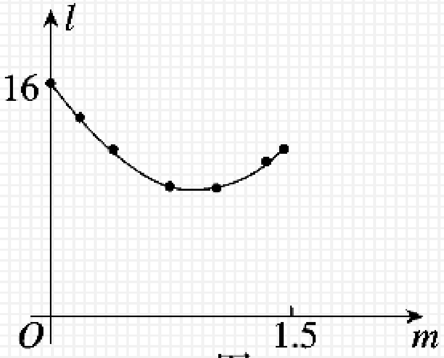

图1

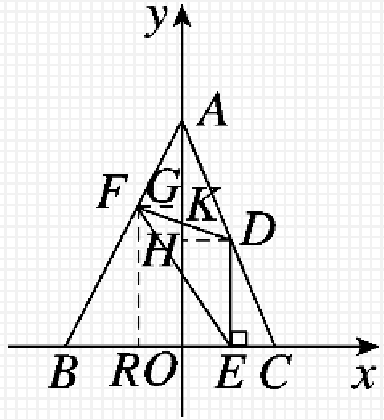

图2

∵直线 AC 的解析式为 $y=-\frac{8}{3}x+4$，∴当 $x=0$ 时，$y=4$，∴$A(0,4)$.

又∵$B(-2,0)$，设直线 AB 的解析式为 $y=kx+b$，

∴$\begin{cases}-2k+b=0,\\ b=4,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}k=2,\\ b=4,\end{cases}$

∴直线 AB 的解析式为 $y=2x+4$.

过点 F 作 $FR\perp x$ 轴于点 R，∵D 点的横坐标为 m，∴$F(-m,-2m+4)$，

∴$ER=2m$，$FR=-2m+4$.

∵$EF^2=FR^2+ER^2$，∴$l=EF^2=8m^2-16m+16=8(m-1)^2+8$.

令$-\frac{8x}{3}+4=0$，得 $x=\frac{3}{2}$，∴$0\leq m\leq\frac{3}{2}$.

$\therefore$当 $m=1$ 时，l 的最小值为 8，$\therefore EF$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

(3)①$\angle FBE$ 为定角，不可能为直角．

②当 $\angle BEF=90°$ 时，点 E 与点 O 重合，点 D 与点 A、点 F 重合，此时 $m=0$.

③如图 3，当 $\angle BFE=90°$ 时，有 $BF^2+EF^2=BE^2$.

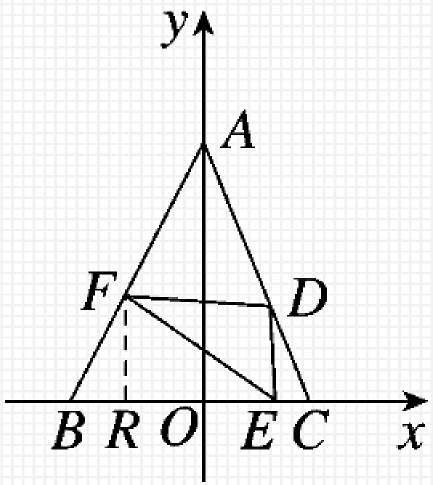

图3

由(2)得 $EF^2=8m^2-16m+16$，

又∵$BR=-m+2$，$FR=-2m+4$，

∴$BF^2=BR^2+FR^2=(-m+2)^2+(-2m+4)^2=5m^2-20m+20$.

又∵$BE^2=(m+2)^2$，

∴$(5m^2-20m+20)+(8m^2-16m+16)=(m+2)^2$，化简得，$3m^2-10m+8=0$，

解得 $m_1=\frac{4}{3}$，$m_2=2$(不合题意，舍去)，∴$m=\frac{4}{3}$.

综上可得，当$\triangle BEF$为直角三角形时，$m=0$ 或 $m=\frac{4}{3}$.

触类旁通

如图1，这是北京冬奥会“雪飞天”滑雪大跳台赛道的横截面示意图．取水平线OE为x轴，铅垂线OD为y轴，建立平面直角坐标系．运动员以速度v(m/s)从D点滑出，运动轨迹近似抛物线$y=-ax^2+2x+20(a\neq 0)$.某运动员7次试跳的轨迹如图2.在着陆坡CE上设置点K(与DO相距32 m)作为标准点，着陆点在K点或超过K点视为成绩达标.

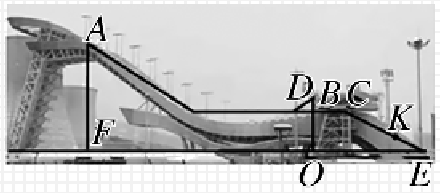

图 1

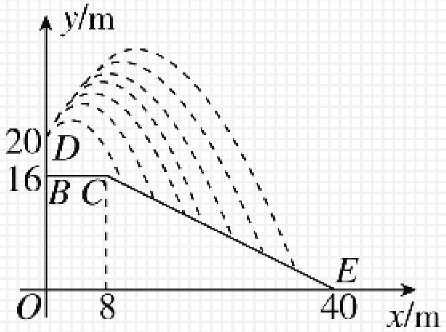

图 2

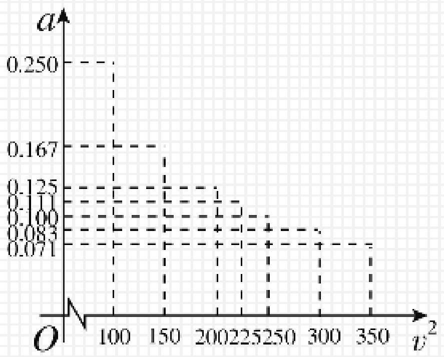

图 3

(1)求线段CE的函数表达式(写出x的取值范围).

(2)当$a=\frac{1}{9}$时，着陆点为P，求P的横坐标并判断成绩是否达标.

(3)在试跳中发现运动轨迹与滑出速度v的大小有关，进一步探究，测算得7组a与v^2的对应数据，在平面直角坐标系中描点如图3.

①猜想a关于v^2的函数类型，求函数表达式，并任选一对对应值验证.

②当v为多少m/s时，运动员的成绩恰能达标(精确到1 m/s)？(参考数据：$\sqrt{3}\approx1.73$，$\sqrt{5}\approx2.24$)

解：(1)由题图 2 可知，$C(8，16)$，$E(40，0)$，设 CE：$y=kx+b(k\neq0)$，

将 $C(8，16)$，$E(40，0)$代入得$\begin{cases}16=8k+b，\\0=40k+b，\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-\dfrac{1}{2}，\\b=20，\end{cases}$

∴线段 CE 的函数表达式为 $y=-\dfrac{1}{2}x+20(8\leq x\leq40)$.(2)当 $a=\dfrac{1}{9}$ 时，$y=-\dfrac{1}{9}x^2+2x+20$，由题意得$-\dfrac{1}{9}x^2+2x+20=-\dfrac{1}{2}x+20$，

解得 $x_1=0$(舍去)，$x_2=22.5$，∴点 P 的横坐标为 22.5.∵$22.5<32$，∴成绩未达标．(3)①猜想 a 与 v^2 成反比例函数关系．

∴设 $a=\dfrac{m}{v^2}(m\neq0)$，将(100，0.250)代入得 $0.25=\dfrac{m}{100}$，

解得 $m=25$，$\therefore a=\dfrac{25}{v^2}$.

将$(150，0.167)$代入 $a=\dfrac{25}{v^2}$ ，验证$\dfrac{25}{150}\approx0.167$，

$\therefore a=\dfrac{25}{v^2}$ 能相当精确地反映 a 与 v^2 的关系，即为所求的函数表达式.

②由 K 在线段 $y=-\dfrac{1}{2}x+20$ 上，得 $K(32，4)$，代入得 $y=-ax^2+2x+20$，得 $a=\dfrac{5}{64}$.

由 $a=\dfrac{25}{v^2}$ 得 $v^2=320.$