

## 专题5 不等式与线性规划

# 考情解读

与区域有关的面积、距离、参数范围问题及线性规划问题；利用基本不等式求函数最值、运用不等式

性质求参数范围、证明不等式是高考热点。

高考备考时，应切实理解与线性规划有关的概念，要熟练掌握基本不等式求最值的方法，特别注意

“拆”“拼”“凑”等技巧方法。要特别加强综合能力的培养，提升运用不等式性质分析、解决问题的能力。

## 重点知识梳理

1. 熟记比较实数大小的依据与基本方法。

①作差(商)法；②利用函数的单调性。

2. 特别注意熟记活用以下不等式的基本性质

(1)乘法法则： $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$ ;

$a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$ ;

(2)同向可加性： $a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$ ;

(3)同向可乘性： $a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$ ;

(4)乘方法则： $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n (n \in \mathbf{N}, n \geq 2)$ ;

3. 熟练应用基本不等式证明不等式与求函数的最值。

4. 牢记常见类型不等式的解法。

(1)一元二次不等式，利用三个二次之间的关系求解。

(2)简单分式、高次不等式，关键是熟练进行等价转化。

(3)简单指、对不等式利用指、对函数的单调性求解。

5. 简单线性规划

(1)应用特殊点检验法判断二元一次不等式表示的平面区域。

(2)简单的线性规划问题

解线性规划问题，关键在于根据条件写出线性约束关系式及目标函数，必要时可先做出表格，然后结合线性约束关系式作出可行域，在可行域中求出最优解.

## 高频考点突攻

## 高频考点一 不等式性质及解不等式

例 1、(1)若  $a, b \in \mathbf{R}$ , 且  $a > |b|$ , 则( )

A.  $a < -b$  B.  $a > b$

C.  $a^2 < b^2$  D.  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

(2)已知不等式  $ax^2 - bx - 1 \geq 0$  的解集为  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right]$ ,

A.  $(2, 3)$  B.  $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

C.  $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$  D.  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right]$ , 则不等式  $x^2 - bx - a < 0$  的解集是( )

### 【方法技巧】

1. 解一元二次不等式主要有两种方法：图象法和因式分解法.

2. 解含参数的“一元二次不等式”时，要把握好分类讨论的层次，一般按下面次序进行讨论：首先根据二次项系数的符号进行讨论；其次根据相应一元二次方程的根是否存在，即  $\Delta$  的符号进行讨论；最后在根存在时，根据根的大小进行讨论.

3. 解决恒成立问题可以利用分离参数法，一定要弄清楚谁是自变量，谁是参数. 一般地，知道谁的范围，谁就是自变量，求谁的范围，谁就是参数.

4. 对于一元二次不等式恒成立问题，恒大于 0 就是相应的二次函数的图象在给定的区间上全部在  $x$  轴上方，恒小于 0 就是相应的二次函数的图象在给定的区间上全部在  $x$  轴下方.

5. 解决不等式在给定区间上的恒成立问题，可先求出相应函数这个区间上的最值，再转化为与最值有关的不等式问题.

$$|x - x + 2| > 0,$$

【举一反三】(1)不等式组  $\begin{cases} |x| < 1 \\ x + 2 > 0 \end{cases}$  的解集为( )

A.  $\{x | -2 < x < -1\}$  B.  $\{x | -1 < x < 0\}$

C.  $\{x | 0 < x < 1\}$  D.  $\{x | x > 1\}$

(2)设函数  $f(x) = \ln(1 + |x|) - \frac{1}{1 + x^2}$ , 则使得  $f(x) > f(2x - 1)$  成立的  $x$  的取值范围是( )

A.  $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$

B.  $\left[-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup (1, +\infty)$

C.  $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

D.  $\left[-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right]$

高频考点二

基本不等式及应用

例 2、(1)已知  $x, y \in \mathbf{R}$  且  $x - 2y - 4 = 0$ , 则  $2^x + \frac{1}{4^y}$  的最小值为( )

A. 4 B. 8

C. 16 D. 256

(2) 设正数  $x, y$  满足  $x+y=1$ , 若不等式  $\frac{1}{x} + \frac{a}{y} \geq 4$  对任意的  $x, y$  成立, 则正实数  $a$  的取值范围是( )

A.  $[4, +\infty)$  B.  $(1, +\infty)$

C.  $[1, +\infty)$  D.  $(4, +\infty)$

### 【方法技巧】

1. 常数代换法求最值的关键在于常数的变形, 利用此方法求最值应注意以下三个方面: (1) 注意条件的灵活变形, 确定或分离出常数, 这是解题的基础; (2) 将常数化成“1”, 这是代数式等价变形的基础; (3) 利用基本不等式求解最值时要满足“一正、二定、三相等”, 否则容易出现错解.

2. 拼凑法就是将代数式进行适当的变形, 通过添项、拆项等方法凑成和为定值或积为定值的形式, 然后利用基本不等式求解最值的方法. 此方法适用于已知关于变量的等式, 求解相关代数式的最值问题, 或已知函数解析式, 求函数的最值问题.

【举一反三】若  $a > b > 0$ , 且  $ab = 1$ , 则下列不等式成立的是

(A)  $a + \frac{1}{b} < \frac{b}{2^a} < \log_2(a+b)$

(B)  $\frac{b}{2^a} < \log_2(a+b) < a + \frac{1}{b}$

(C)  $a + \frac{1}{b} < \log_2(a+b) < \frac{b}{2^a}$

(D)  $\log_2(a+b) < a + \frac{1}{b} < \frac{b}{2^a}$

### 高频考点三 求线性规划中线性目标函数的最值

例 3、【2019 年高考浙江卷】若实数  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - 3y + 4 \geq 0 \\ 3x - y - 4 \leq 0 \end{cases}$ , 则  $z = 3x + 2y$  的最大值是

$$|x + y > 0$$

A. -1

B. 1

C. 10

D. 12

【举一反三】(2018 年天津卷) 设变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x+y \leq 5, \\ 2x-y \leq 4, \\ -x+y \leq 1, \\ y \geq 0, \end{cases}$  则目标函数  $z=3x+5y$  的最大值

为

A. 6 B. 19 C. 21 D. 45

**【方法技巧】**

1. 解不含实际背景的线性规划问题的一般步骤

(1)画出可行域;

(2)根据线性目标函数的几何意义确定其取得最优解的点;

(3)求出目标函数的最大值或者最小值.

2. 解决线性规划问题应把握三点

(1)首先要找到可行域, 再注意目标函数所表示的几何意义, 找到目标函数达到最值时可行域的顶点(或边界上的点), 但要注意作图一定要准确, 整点问题要验证解决.

(2)画可行域时应注意区域是否包含边界.

(3)对目标函数  $z = Ax + By$  中  $B$  的符号, 一定要注意  $B$  的正负与  $z$  的最值的对应, 要结合图形分析.

$$\begin{cases} 2x + 3y - 3 < 0 \\ x - y + 1 \geq 0, \\ x + 2y - 2 \leq 0, \end{cases}$$

【变式探究】【2017 课标 II, 理 5】设  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} 2x - 3y + 3 > 0 \\ y + 3 \geq 0 \end{cases}$ , 则  $z = 2x + y$  的最小值是

( )

A. -15

B. -9

C. 1

D. 9

$$\begin{cases} x - y + 1 \geq 0, \\ x - 2y \leq 0, \\ x + 2y - 2 \leq 0, \end{cases}$$

【变式探究】(1)若  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - 2y \leq 0, \\ x + 2y - 2 \leq 0, \end{cases}$  则  $z = x + y$  的最大值为\_\_\_\_\_.

$$\begin{cases} x + y \geq a, \\ x - y \leq -1, \end{cases}$$

(2)设  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x + y \geq a, \\ x - y \leq -1, \end{cases}$  且  $z = x + ay$  的最小值为 7, 则  $a = ( )$

A. -5 B. 3

C. -5 或 3 D. 5 或 -3

## 真题感悟

1. 【2019 年高考全国 II 卷理数】2019 年 1 月 3 日嫦娥四号探测器成功实现人类历史上首次月球背面软着陆, 我国航天事业取得又一重大成就, 实现月球背面软着陆需要解决的一个关键技术问题是地面与探测器的通讯联系. 为解决这个问题, 发射了嫦娥四号中继星“鹊桥”, 鹊桥沿着围绕地月拉格朗日  $L_2$  点的轨道运行.  $L_2$  点是平衡点, 位于地月连线的延长线上. 设地球质量为  $M_1$ , 月球质量为  $M_2$ , 地月距离为  $R$ ,  $L_2$

点到月球的距离为  $r$ ，根据牛顿运动定律和万有引力定律， $r$  满足方程：
$$\frac{M_1}{(R+r)^2} + \frac{M_2}{r^2} = (R+r) \frac{M_1}{R^3}.$$
 设

$\alpha = \frac{r}{R}$ ，由于  $\alpha$  的值很小，因此在近似计算中  $\frac{3\alpha^3 + 3\alpha^4 + \alpha^5}{(1+\alpha)^2} \sim 3\alpha^3$ ，则  $r$  的近似值为



$$A. \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} R$$

$$B. \sqrt{\frac{M_2}{2M_1}} R$$

$$C. \sqrt[3]{\frac{3M_2}{M_1^2}} R$$

$$D. \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}} R$$

2. 【2019 年高考全国 II 卷理数】若  $a > b$ ，则

$$A. \ln(a-b) > 0$$

$$B. 3^a < 3^b$$

$$C. a^3 - b^3 > 0$$

$$D. |a| > |b|$$

3. 【2019 年高考北京卷理数】若  $x, y$  满足  $|x| < 1 - y$ ，且  $y \geq -1$ ，则  $3x + y$  的最大值为

$$A. -7$$

$$B. 1$$

$$C. 5$$

$$D. 7$$

4. 【2019 年高考北京卷理数】在天文学中，天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述. 两颗星的星等与亮度满足  $m_2 - m_1 = \frac{5}{2} \lg \frac{E_1}{E_2}$ ，其中星等为  $m_k$  的星的亮度为  $E_k$  ( $k=1, 2$ ). 已知太阳的星等是  $-26.7$ ，天狼星的星等是  $-1.45$ ，则太阳与天狼星的亮度的比值为

$$A. 10^{10.1}$$

$$B. 10.1$$

$$C. \lg 10.1$$

$$D. 10^{-10.1}$$

5. 【2019 年高考天津卷理数】设变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x + y - 2 < 0, \\ x - y + 2 > 0, \\ x \geq -1, \\ y \geq -1, \end{cases}$ ，则目标函数  $z = -4x + y$  的最

$$\begin{cases} x + y - 2 < 0, \\ x - y + 2 > 0, \\ x \geq -1, \\ y \geq -1, \end{cases}$$

$$z = -4x + y$$

大值为

$$A. 2$$

$$B. 3$$

$$C. 5$$

$$D. 6$$

6. 【2019 年高考天津卷理数】设  $x \in \mathbf{R}$ ，则“ $x^2 - 5x < 0$ ”是“ $|x - 1| < 1$ ”的

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

$$(x - 3y + 4) \geq 0$$

7. 【2019 年高考浙江卷】若实数  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} 3x - y - 4 < 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$ , 则  $z = 3x + 2y$  的最大值是

- A. -1                                                  B. 1
- C. 10                                                 D. 12

8. 【2019 年高考浙江卷】若  $a > 0, b > 0$ , 则“ $a + b < 4$ ”是“ $ab < 4$ ”的

- A. 充分不必要条件                      B. 必要不充分条件  
C. 充分必要条件                        D. 既不充分也不必要条件

9. 【2019 年高考全国 II 卷理数】中国有悠久的金石文化，印信是金石文化的代表之一．印信的形状多为长方体、正方体或圆柱体，但南北朝时期的官员独孤信的印信形状是“半正多面体”（图 1）．半正多面体是由两种或两种以上的正多边形围成的多面体．半正多面体体现了数学的对称美．图 2 是一个棱数为 48 的半正多面体，它的所有顶点都在同一个正方体的表面上，且此正方体的棱长为 1．则该半正多面体共有  个面，其棱长为  ．（本题第一空 2 分，第二空 3 分．）



图 1

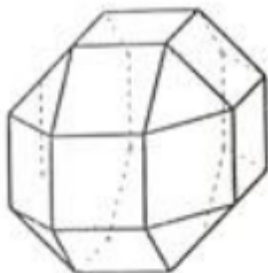
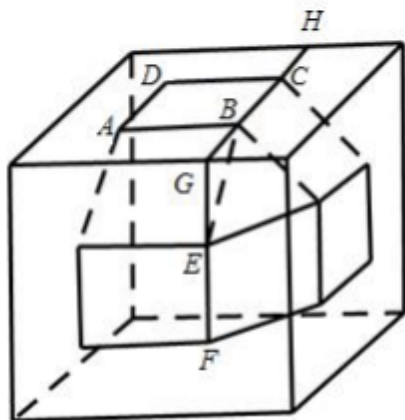


图 2



10. 【2019 年高考北京卷理科数】李明自主创业，在网上经营一家水果店，销售的水果中有草莓、京白梨、西瓜、桃，价格依次为 60 元/盒、65 元/盒、80 元/盒、90 元/盒. 为增加销量，李明对这四种水果进行促销：

一次购买水果的总价达到 120 元，顾客就少付  $x$  元．每笔订单顾客网上支付成功后，李明会得到支付款的

80%.

①当  $x=10$  时, 顾客一次购买草莓和西瓜各 1 盒, 需要支付\_\_\_\_\_元;

②在促销活动中, 为保证李明每笔订单得到的金额均不低于促销前总价的七折, 则  $x$  的最大值为

\_\_\_\_\_.

11. 【2019 年高考天津卷理数】设  $x > 0, y > 0, x + 2y = 5$ , 则  $\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

1. (2018 年北京卷)“十二平均律”是通用的音律体系, 明代朱载堉最早用数学方法计算出半音比例, 为这个理论的发展做出了重要贡献. 十二平均律将一个纯八度音程分成十二份, 依次得到十三个单音, 从第二个单音起, 每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于  $\sqrt[12]{2}$ . 若第一个单音的频率为  $f$ , 则第八个单音的频率为

A.  $\sqrt[12]{2}f$       B.  $\sqrt[12]{2^2}f$

C.  $\sqrt[12]{2^5}f$       D.  $\sqrt[12]{2^7}f$

2. (2018 年浙江卷) 已知  $a_1, a_2, a_3, a_4$  成等比数列, 且  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \ln(a_1 + a_2 + a_3)$ . 若  $a_1 > 1$ , 则

A.  $a_1 < a_3, a_2 < a_4$       B.  $a_1 > a_3, a_2 < a_4$       C.  $a_1 < a_3, a_2 > a_4$       D.  $a_1 > a_3, a_2 > a_4$

3. (2018 年全国 I 卷理数) 设  $S_n$  为等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 若  $3S_3 = S_2 + S_4$ ,  $a_3 = 2$ , 则  $a_1 =$

A. -12      B. -10      C. 10      D. 12

4. (2018 年北京卷) 设  $\{a_n\}$  是等差数列, 且  $a_1 = 3$ ,  $a_2 + a_5 = 36$ , 则  $\{a_n\}$  的通项公式为\_\_\_\_\_.

5. (2018 年江苏卷) 已知集合  $A = \{x | x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}^*\}$ ,  $B = \{x | x = 2^n, n \in \mathbb{N}^*\}$ . 将  $A \cup B$  的所有元素从小

到大依次排列构成一个数列  $\{a_n\}$ . 记  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 则使得  $n > 12a_n + 1$  成立的  $n$  的最小值为

\_\_\_\_\_.

6. (2018 年全国 I 卷理数) 记  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 若  $S_n = 2a_n + 1$ , 则  $S_6 =$ \_\_\_\_\_.

7. (2018 年浙江卷) 已知等比数列  $\{a_n\}$  的公比  $q > 1$ , 且  $a_3 + a_4 + a_5 = 28$ ,  $a_4 + 2$  是  $a_3, a_5$  的等差中项. 数列

$\{b_n\}$  满足  $b_1 = 1$ , 数列  $\{(b_{n+1} - b_n) a_n\}$  的前  $n$  项和为  $2n^2 + n$ .

(I) 求  $q$  的值;

(II) 求数列  $\{b_n\}$  的通项公式.

8. (2018 年天津卷) 设  $\{a_n\}$  是等比数列, 公比大于 0, 其前  $n$  项和为  $S_n (n \in \mathbb{N}^*)$ ,  $\{b_n\}$  是等差数列. 已知

$$1 = 1, a_3 = a_2 + 2, a_4 = b_3 + b_5, a_1 = b_4 + 2b_1.$$

(I) 求  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式;

(II) 设数列  $\{S_n\}$  的前  $n$  项和为  $T(n \in \mathbb{N}^*)$ ,

(i) 求  $T_n$ ;

(ii) 证明  $\sum_{k=1}^n \frac{(T_k + b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)} = \frac{2^{n+2}}{n+2} - 2 (n \in \mathbb{N}^*)$

9. (2018 年江苏卷) 设  $\{a_n\}$  是首项为 4, 公差为  $d$  的等差数列,  $\{b_n\}$  是首项为  $b_1$ , 公比为  $q$  的等比数列.

(1) 设  $b_1 = 1, q = 2$ , 若  $|a_n - b_n| \leq b_1$  对  $n = 1, 2, 3, 4$  均成立, 求  $d$  的取值范围;

(2) 若  $a_1 = b_1 > 0, m \in \mathbb{N}^*, q \in (1, \sqrt{2}]$ , 证明: 存在  $d \in \mathbb{R}$ , 使得  $|a_n - b_n| \leq b_1$  对  $n = 2, 3, \dots, m+1$  均成立, 并求  $d$

的取值范围 (用  $b_1, m, q$  表示).

10. (2018 年江苏卷) 设  $n \in \mathbb{N}^*$ , 对  $1, 2, \dots, n$  的一个排列  $i_1 i_2 \dots i_n$ , 如果当  $s < t$  时, 有  $i_s > i_t$ , 则称  $(i_1 i_2 \dots i_n)$  是排列  $i_1 i_2 \dots i_n$  的一个逆序, 排列  $i_1 i_2 \dots i_n$  的所有逆序的总个数称为其逆序数. 例如: 对  $1, 2, 3$  的一个排列  $231$ , 只有两个逆序  $(2, 1), (3, 1)$ , 则排列  $231$  的逆序数为 2. 记  $f_n(k)$  为  $1, 2, \dots, n$  的所有排列中逆序数为  $k$  的全部排列的个数.

(1) 求  $f_3(2), f_4(2)$  的值;

(2) 求  $f_n(2) (n \geq 5)$  的表达式 (用  $n$  表示).

11. (2018 年全国 II 卷理数) 记  $S_n$  为等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 已知  $a_1 = -7, S_3 = -15$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 求  $S_n$ , 并求  $S_n$  的最小值. 12. (2018 年全国 III 卷理数) 等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 1, a_5 = 4a_3$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 记  $S_n$  为  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和. 若  $S_m = 63$ , 求  $m$ .

1. (2018 年天津卷) 设变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x+y \leq 5, \\ 2x-y \leq 4, \\ -x+y \leq 1, \\ y \geq 0, \end{cases}$  则目标函数  $z = 3x + 5y$  的最大值为

$A = \{x | x^2 - x - 2 > 0\}$

A. 6    B. 19    C. 21    D. 45

2. (2018 年全国 I 卷理数) 已知集合  $A = \{x | x^2 - x - 2 > 0\}$ , 则  $C_{\mathbb{R}} A =$

A.  $\{x | -1 < x < 2\}$     B.  $\{x | -1 \leq x \leq 2\}$

C.  $\{x | x < -1\} \cup \{x | x > 2\}$     D.  $\{x \leq -1\} \cup \{x \geq 2\}$

3. (2018 年全国III卷理数) 设  $a = 10920.3$ ，则





$$\begin{cases} 2x + 3y - 3 < 0 \\ y + 3 \geq 0 \end{cases}$$

4. 【2017 课标 II，理 5】设  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} 2x - 3y + 3 > 0 \\ y + 3 \geq 0 \end{cases}$ ，则  $z = 2x + y$  的最小值是( )

A. -15

B. -9

C. 1

D. 9

$$\begin{cases} x - y + 3 < 0 \end{cases}$$

5. 【2017 山东，理 4】 已知  $x, y$  满足  $\begin{cases} x + y + 5 < 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases}$ ，则  $z = x + 2y$  的最大值是

- (A) 0 (B) 2 (C) 5 (D) 6

6. 【2017 天津，理 2】 设变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} 2x + y \geq 0, \\ x + 2y - 0 > 0, \\ x \leq 0, \end{cases}$  则目标函数  $z = x + y$  的最大值为

$$|y| < 3,$$

- (A)  $\frac{2}{3}$  (B) 1 (C)  $\frac{3}{2}$  (D) 3

## 专题5 不等式与线性规划

# 考情解读

与区域有关的面积、距离、参数范围问题及线性规划问题；利用基本不等式求函数最值、运用不等式性质求参数范围、证明不等式是高考热点。

高考备考时，应切实理解与线性规划有关的概念，要熟练掌握基本不等式求最值的方法，特别注意“拆”“拼”“凑”等技巧方法。要特别加强综合能力的培养，提升运用不等式性质分析、解决问题的能力。

# 重点知识梳理

1. 熟记比较实数大小的依据与基本方法。

①作差(商)法；②利用函数的单调性。

2. 特别注意熟记活用以下不等式的基本性质

(1)乘法法则： $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$ ；

$a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$ ；

(2)同向可加性： $a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$ ；

(3)同向可乘性： $a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$ ；

(4)乘方法则： $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n (n \in \mathbf{N}, n \geq 2)$ ；

3. 熟练应用基本不等式证明不等式与求函数的最值。

4. 牢记常见类型不等式的解法。

(1)一元二次不等式，利用三个二次之间的关系求解。

(2)简单分式、高次不等式，关键是熟练进行等价转化。

(3)简单指、对不等式利用指、对函数的单调性求解。

5. 简单线性规划

(1)应用特殊点检验法判断二元一次不等式表示的平面区域。

(2)简单的线性规划问题

解线性规划问题，关键在于根据条件写出线性约束关系式及目标函数，必要时可先做出表格，然后结

合线性约束关系式作出可行域，在可行域中求出最优解.

## 高频者点突破

## 高频考点一 不等式性质及解不等式

例 1、(1)若  $a, b \in \mathbf{R}$ , 且  $a > |b|$ , 则( )

A.  $a < -b$       B.  $a > b$

C.  $a^2 < b^2$       D.  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

(2)已知不等式  $ax^2 - bx - 1 \geq 0$  的解集为  $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right]$ , 则不等式  $x^2 - bx - a < 0$  的解集是( )

A. (2,3)      B.  $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

C.  $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$       D.  $\left[-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right]$

【解析】 (1)  $\because a > |b|, |b| \geq b, \therefore a > b$ . 故选 B.

(2)  $\because$  不等式  $ax^2 - bx - 1 \geq 0$  的解集是  $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right]$ ,

$$\therefore \text{易知 } a < 0 \text{ 且 } \begin{cases} b = -5, \\ -\frac{1}{a} = \frac{6}{a} \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} a = -6, \\ b = 5, \end{cases} \quad \therefore \text{不等式 } x^2 - bx - a < 0 \text{ 可化为 } x^2 - 5x + 6 < 0, \text{ 解得 } 2 < x < 3.$$

故选 A.

【答案】 (1)B (2)A

### 【方法技巧】

1. 解一元二次不等式主要有两种方法: 图象法和因式分解法.

2. 解含参数的“一元二次不等式”时, 要把握好分类讨论的层次, 一般按下面次序进行讨论: 首先根据二次项系数的符号进行讨论; 其次根据相应一元二次方程的根是否存在, 即  $\Delta$  的符号进行讨论; 最后在根存在时, 根据根的大小进行讨论.

3. 解决恒成立问题可以利用分离参数法, 一定要弄清楚谁是自变量, 谁是参数. 一般地, 知道谁的范围, 谁就是自变量, 求谁的范围, 谁就是参数.

4. 对于一元二次不等式恒成立问题, 恒大于 0 就是相应的二次函数的图象在给定的区间上全部在  $x$  轴

上方，恒小于 0 就是相应的二次函数的图象在给定的区间上全部在  $x$  轴下方.

5. 解决不等式在给定区间上的恒成立问题，可先求出相应函数这个区间上的最值，再转化为与最值有关的不等式问题.

$$\begin{cases} x^2 - x + 2 > 0, \end{cases}$$

【举一反三】(1)不等式组  $\begin{cases} |x| < 1 \end{cases}$  的解集为( )

A.  $\{x | -2 < x < -1\}$

B.  $\{x | -1 < x < 0\}$

C.  $\{x|0 < x < 1\}$  D.  $\{x|x > 1\}$

【解析】由  $x(x+2) > 0$  得  $x > 0$  或  $x < -2$ ；由  $|x| < 1$  得  $-1 < x < 1$ ，所以不等式组的解集为  $\{x|0 < x < 1\}$ ，

故选 C.

【答案】C

(2) 设函数  $f(x) = \ln(1+|x|) - \frac{1}{1+x^2}$ ，则使得  $f(x) > f(2x-1)$  成立的  $x$  的取值范围是( )

A.  $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

B.  $\left[-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup (1, +\infty)$

C.  $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

D.  $\left[-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right]$

【解析】 $\because f(-x) = \ln(1+|-x|) - \frac{1}{1+(-x)^2} = f(x)$ ， $\therefore$  函数  $f(x)$  为偶函数.

$\because$  当  $x \geq 0$  时， $f(x) = \ln(1+x) - \frac{1}{1+x^2}$ ，

在  $(0, +\infty)$  上  $y = \ln(1+x)$  递增， $y = -\frac{1}{1+x^2}$  也递增，

根据单调性的性质知， $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增.

综上可知： $f(x) > f(2x-1) \Leftrightarrow f(|x|) > f(|2x-1|) \Leftrightarrow |x| > |2x-1| \Leftrightarrow x^2 > (2x-1)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < 1$ . 故选

A.

速解法：令  $x = 0$ ， $f(x) = f(0) = -1 < 0$ .

$$f(2x-1) = f(-1) = \ln 2 - \frac{1}{2} = \ln 2 - \ln \sqrt{e} > 0.$$

不适合  $f(x) > f(2x-1)$ ，排除 C.

$$\text{令 } x = 2, f(x) = f(2) = \ln 3 - \frac{1}{5},$$

$f(2x-1) = f(3)$ ，由于  $f(x) = \ln(1+|x|) - \frac{1}{1+x^2}$  在  $(0, +\infty)$  上为增函数

$\therefore f(2) < f(3)$ ，不适合. 排除 B、D，故选 A.

【答案】A

## 高频考点二 基本不等式及应用

例 2、(1) 已知  $x, y \in \mathbf{R}$  且  $x - 2y - 4 = 0$ ，则  $2^x + \frac{1}{4^y}$  的最小值为( )

A. 4 B. 8

C. 16 D. 256

(2) 设正数  $x, y$  满足  $x+y=1$ , 若不等式  $\frac{1}{x} + \frac{a}{y} \geq 4$  对任意的  $x, y$  成立, 则正实数  $a$  的取值范围是( )



A.  $[4, +\infty)$  B.  $(1, +\infty)$

C.  $[1, +\infty)$  D.  $(4, +\infty)$

【解析】 (1)  $\because x-2y-4=0, \therefore x-2y=4, \therefore 2^x + \frac{1}{4^y} \geq 2\sqrt{2^{x-2y}} = 8$ , 当且仅当  $x=2, y=-1$  时等号成立,

$\therefore 2^x + \frac{1}{4^y}$  的最小值为 8, 故选 B.

(2)  $\because x+y=1$ , 且  $x>0, y>0, a>0, \therefore \frac{1}{x} + \frac{a}{y} = \left(\frac{1}{x} + \frac{a}{y}\right)(x+y) = a+1 + \frac{y}{x} + \frac{ax}{y} \geq a+1 + 2\sqrt{a}$ ,

$\therefore a+2\sqrt{a}+1 \geq 4$ , 即  $a+2\sqrt{a}-3 \geq 0$ , 解得  $a \geq 1$ , 故选 C.

【答案】 (1)B (2)C

【方法技巧】

1. 常数代换法求最值的关键在于常数的变形, 利用此方法求最值应注意以下三个方面: (1)注意条件的灵活变形, 确定或分离出常数, 这是解题的基础; (2)将常数化成“1”, 这是代数式等价变形的基础; (3)利用基本不等式求解最值时要满足“一正、二定、三相等”, 否则容易出现错解.

2. 拼凑法就是将代数式进行适当的变形, 通过添项、拆项等方法凑成和为定值或积为定值的形式, 然后利用基本不等式求解最值的方法. 此方法适用于已知关于变量的等式, 求解相关代数式的最值问题, 或已知函数解析式, 求函数的最值问题.

【举一反三】若  $a > b > 0$ , 且  $ab = 1$ , 则下列不等式成立的是

(A)  $a + \frac{1}{b} < \frac{b}{2^a} < \log_2(a+b)$

(B)  $\frac{b}{2^a} < \log_2(a+b) < a + \frac{1}{b}$

(C)  $a + \frac{1}{b} < \log_2(a+b) < \frac{b}{2^a}$

(D)  $\log_2(a+b) < a + \frac{1}{b} < \frac{b}{2^a}$

【答案】B

【解析】因为  $a > b > 0$ , 且  $ab = 1$ , 所以  $a > 1, 0 < b < 1, \therefore \frac{b}{2^a} < 1, \log_2(a+b) < \log_2 2\sqrt{ab} = 1$ ,

$2^{a+\frac{1}{b}} > a + \frac{1}{b} > a + b$  牵  $a + \frac{1}{b} > \log_2(a+b)$ , 所以选 B.

高频考点三 求线性规划中线性目标函数的最值

例 3、【2019 年高考浙江卷】若实数  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - 3y + 4 \geq 0 \\ 3x - y - 4 \leq 0 \end{cases}$ ，则  $z = 3x + 2y$  的最大值是

$$|x + y > 0$$

A. -1

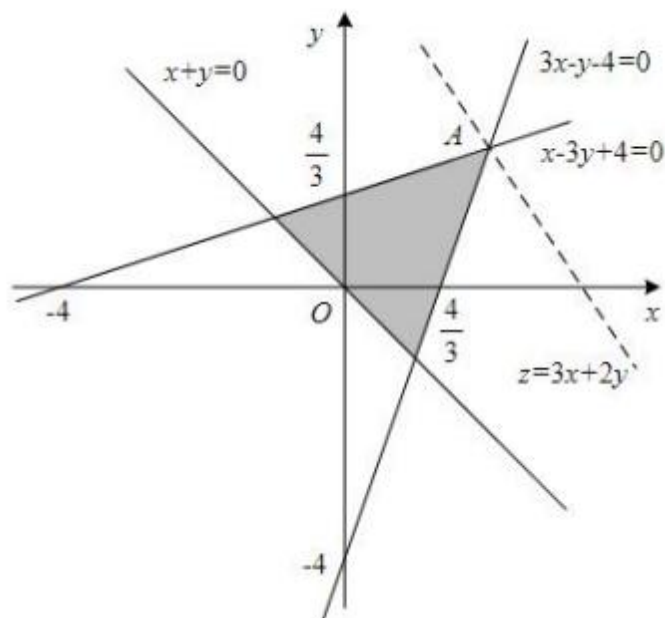
B. 1

C. 10

D. 12

【答案】C

【解析】画出满足约束条件的可行域如图中阴影部分所示。



因为  $z = 3x + 2y$ ，所以  $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}z$ 。

平移直线  $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}z$  可知，当该直线经过点  $A$  时， $z$  取得最大值。

联立两直线方程可得  $\begin{cases} x-3y+4=0 \\ 3x-y-4=0 \end{cases}$ ，解得  $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ 。

即点  $A$  坐标为  $A(2,2)$ ，

所以  $z_{\max} = 3 \times 2 + 2 \times 2 = 10$ 。故选 C。

【举一反三】（2018 年天津卷）设变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x+y \leq 5, \\ 2x-y \leq 4, \\ -x+y \leq 1, \\ y \geq 0, \end{cases}$  则目标函数  $z=3x+5y$  的最大值

为

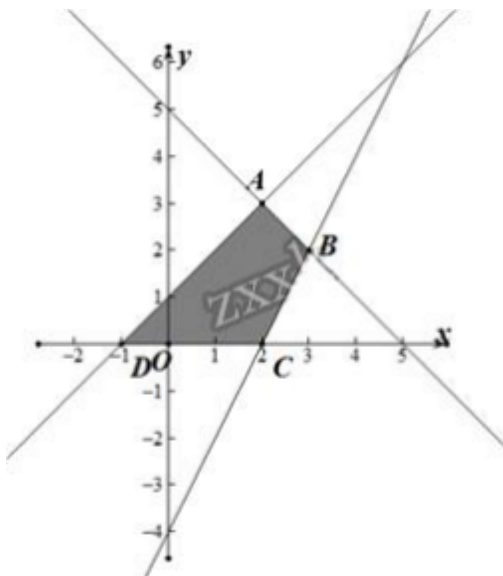
A. 6      B. 19      C. 21      D. 45

【答案】C

【解析】绘制不等式组表示的平面区域如图所示，结合目标函数的几何意义可知目标函数在点  $A$  处取

得最大值，联立直线方程： $\begin{cases} x+y=5 \\ -x+y=1 \end{cases}$ ，可得点  $A$  的坐标为： $A(2,3)$ ，据此可知目标函数的最大值为：

$=3x+5y=3\times 2+5\times 3=21$ ，本题选择  $C$  选项。



### 【方法技巧】

#### 1. 解不含实际背景的线性规划问题的一般步骤

(1)画出可行域;

(2)根据线性目标函数的几何意义确定其取得最优解的点;

(3)求出目标函数的最大值或者最小值.

#### 2. 解决线性规划问题应把握三点

(1)首先要找到可行域,再注意目标函数所表示的几何意义,找到目标函数达到最值时可行域的顶点(或边界上的点),但要注意作图一定要准确,整点问题要验证解决.

(2)画可行域时应注意区域是否包含边界.

(3)对目标函数  $z = Ax + By$  中  $B$  的符号,一定要注意  $B$  的正负与  $z$  的最值的对应,要结合图形分析.

【变式探究】【2017 课标 II, 理 5】设  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} 2x + 3y - 3 \leq 0 \\ 2x - 3y + 3 \geq 0 \end{cases}$ , 则  $z = 2x + y$  的最小值是

$$\begin{cases} y + 3 > 0 \end{cases}$$

( )

A. -15

B. -9

C. 1

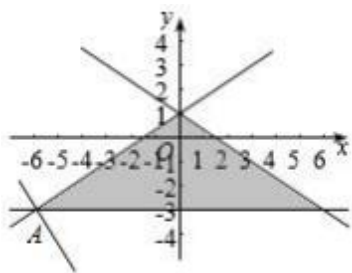
D. 9

【答案】A

$$2x + 3y - 3 < 0$$

【解析】 $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} 2x - 3y + 3 > 0 \\ y + 3 > 0 \end{cases}$  的可行域如图:

$$y + 3 > 0$$



$z=2x+y$  经过可行域的  $A$  时，目标函数取得最小值，

$$\text{由 } \begin{cases} y = -3 \\ 2x - 3y + 3 = 0 \end{cases} \text{ 解得 } A(-6, -3),$$

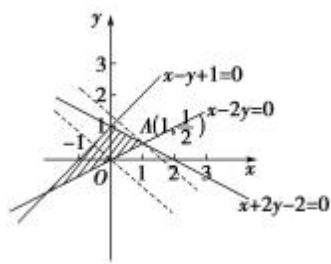
则  $z=2x+y$  的最小值是：-15.

故选：A.

$$\begin{cases} x - y + 1 \geq 0, \\ x - 2y \leq 0, \\ x + 2y - 2 \leq 0, \end{cases}$$

【变式探究】(1)若  $x, y$  满足约束条件

【解析】基本法：作出可行域，如图：



由  $z=x+y$  得  $y=-x+z$ ，当直线  $y=-x+z$  过点

$$A\left(1, \frac{1}{2}\right) \text{ 时, } z \text{ 取得最大值, } z_{\max} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$x - y + 1 = 0$$

速解法：由  $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$  得点  $(-2, -1)$ ，则  $z = -3$

由  $\begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$  得点  $(0, 1)$ ，则  $z = 1$

$$x - 2y = 0$$

由  $\begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$  得点  $\left(1, \frac{1}{2}\right)$  则  $z = \frac{3}{2}$ .



则  $z=x+y$  的最大值为\_\_\_\_\_.

【答案】 $\frac{3}{2}$

$$x+y \geq a,$$

(2) 设  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x+y \geq a, \\ x-y \leq -1, \end{cases}$  且  $z=x+ay$  的最小值为 7, 则  $a=(\quad)$

A. -5    B. 3

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/786133055212010231>