04 立体几何

1．【2019 年高考全国Ⅰ卷理数】 已知三棱锥 P-ABC 的四个顶点在球 O 的球面上，PA =PB =PC ，

△ABC 是边长为 2 的正三角形， E，F 分别是 PA，AB 的中点，∠ CEF =90°，则球O 的体 积为

A． 8 6　　　　B． 4 6

C． 2 6　　　　D． 6

【答案】 D

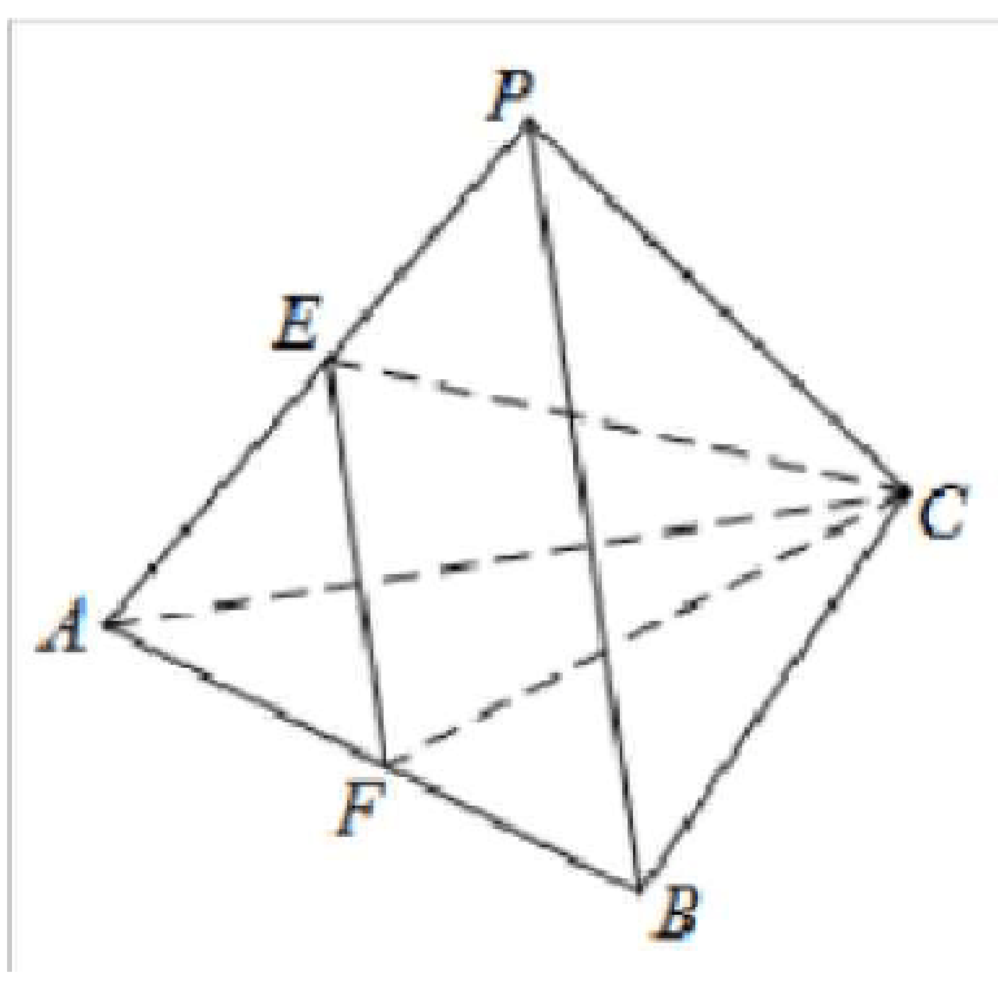
【解析】解法一： QPA PB PC, △ ABC 为边长为 2 的等边三角形， P ABC 为 正三棱锥，

PB AC，又 E，F 分别为 PA， AB 的中点， EF // PB， EF AC，又

EF CE，CE I AC C, EF 平面 PAC，∴ PB 平面 PAC，

APB PA PB PC 2， P ABC 的 为正方体 一部分，

2R 222 6， 即 R 6/2, V 4/3 πR^3 4/3 6 6/8 6， 故选 D．



解法二：设 PA PB PC 2x， E,F 分别为 PA,AB 的中点， EF // PB，且

EF 1/2 PB x， Q △ ABC 为边长为 2 的等边三角形， CF 3，

又 CEF 90， CE 3 x2, AE 1/2 PA x，

△ AEC 由余弦定理可得 cos EAC x2 4 3 x2 / 22x

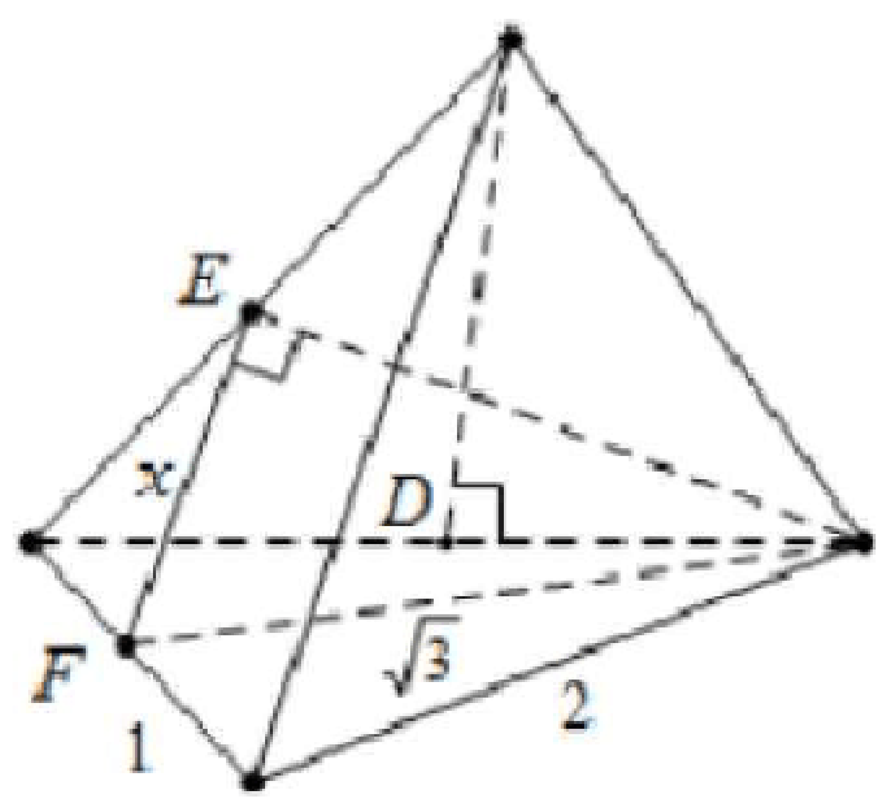
作 PD AC 于 D， Q PA PC ， D 为 AC 的中点， cos EAC $\frac{AD}{PA} \frac{1}{2x}$

$\frac{x^2 \; 4 \; 3 \; x \; 1}{4x \quad 2x}$

$2x^2 \; 1 \; 2 \; x^2 \; \frac{1}{2} \frac{2}{2}, x \; \frac{2}{2}$. PA PB PC 2 .

又 AB=BC=AC=2 ， PA，PB， PC 两两垂直， 2R 2 2 2 6， R $\frac{6}{2}$，

V 4 R $_3$ 4 $\frac{6 \; 6}{8}$ 6，故选 D.



【名师点睛】本题主要考查学生的空间想象能力，补体法解决外接球问题．可通过线面垂直定理，得到三棱两两互相垂直关系，快速得到侧棱长，进而补体成正方体解决．

2．【 2019 年高考全国Ⅱ卷理数】设 α, β为两个平面，则 α// β的充要条件是

A． α内有无数条直线与 β平行　　B． α内有两条相交直线与 β平行

C． α, β平行于同一条直线　　D． α, β垂直于同一平面

【答案】 B

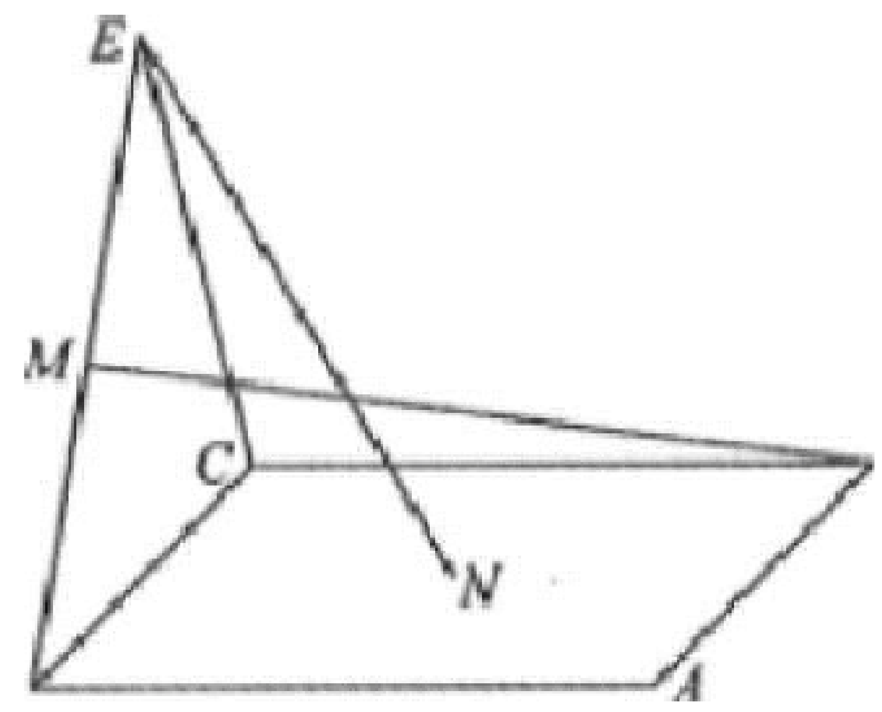
【解析】由面面平行的判定定理 内两条相交直线都与 平行是 // 的充分条件，由面面平行性质定理知，若 // ，则 内任意一条直线都与 平行，所以 内两条相交直线都与 平行是 // 的必要条件，故选 B．

【名师点睛】本题考查了空间两个平面的判定与性质及充要条件，渗透直观想象、逻辑推理素养，利用面面平行的判定定理与性质定理即可作出判断．面面平行的判定问题要紧扣面面平行判定定理，最容易犯的错误为定理记不住，凭主观臆断，如：“若

, b　　, a // b，则 // ”此类的错误.

3．【2019 年高考全国Ⅲ卷理数】如图，点 N 为正方形 ABCD 的中心，△ ECD 为正三角形，平

面 ECD ⊥平面 ABCD ， M 是线段 ED 的中点，则



A． BM =EN，且直线 BM ，EN 是相交直线

B． BM ≠EN，且直线 BM ， EN 是相交直线

C． BM =EN，且直线 BM ，EN 是异面直线

D． BM ≠EN，且直线 BM ， EN 是异面直线

【答案】 B

【解析】如图所示，作 EO CD 于 O ，连接 ON ，BD，易得直线 BM ，EN 是三角形 EBD

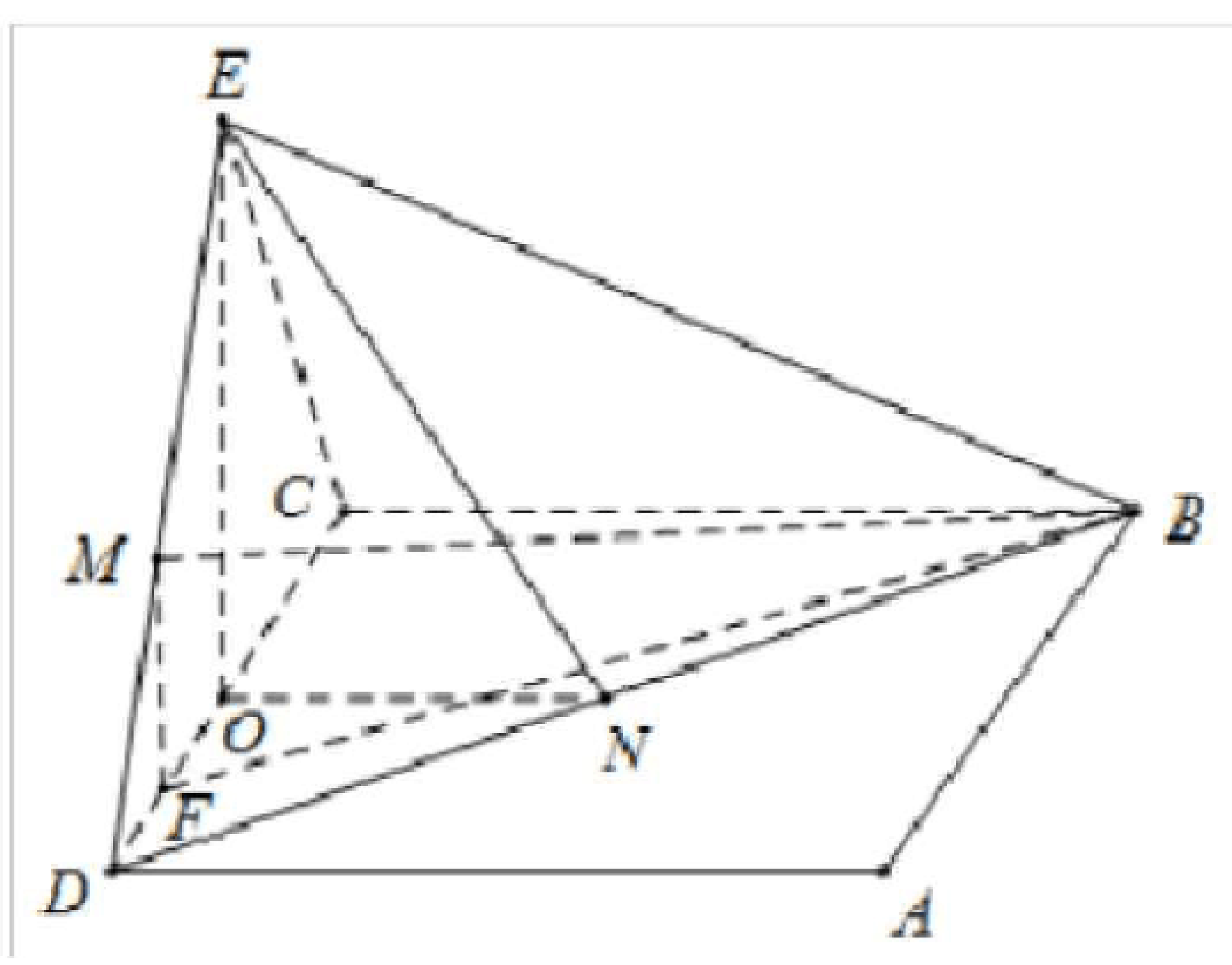
的中线，是相交直线 .

过 M 作 MF OD 于 F，连接 BF，

Q 平面 CDE 平面 ABCD ， EO CD, EO 平面 CDE ， EO 平面 ABCD ，

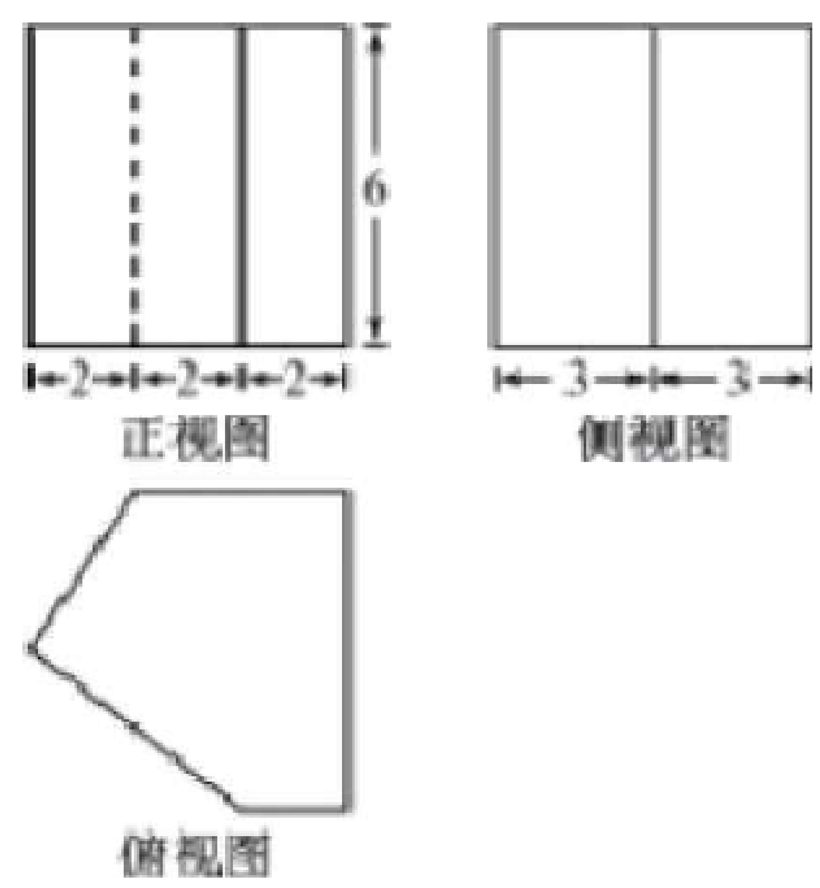
MF 平面 ABCD ， △MFB 与△EON 均为直角三角形．设正方形边长为 2，易知

EO $\sqrt{3}$, ON 1, EN 2，MF $\frac{\sqrt{3}}{2}$, BF $\frac{5}{2}$, BM $\sqrt{7}$， BM EN，故选 B．



名师点睛】本题考查空间想象能力和计算能力，解答本题的关键是构造直角三角形

4．【2019 年高考浙江卷】祖暅是我国南北朝时代的伟大科学家，他提出的“幂势既同，则积不容异”称为祖暅原理，利用该原理可以得到柱体的体积公式 $V_{柱体}=Sh$，其中 S 是柱体的底面积，h 是柱体的高．若某柱体的三视图如图所示（单位：cm），则该柱体的体积（单位：cm^3）是



A．158　　　　B．162

C．182　　　　D．324

【答案】B

【解析】由三视图得该棱柱的高为 6，底面可以看作是由两个直角梯形组合而成的，其中一个上底为 4，下底为 6，高为 3，另一个的上底为 2，下底为 6，高为 3，则该棱柱的体积为 $\left(\frac{2+6}{2}\times3+\frac{4+6}{2}\times3\right)\times6=162$．

故选 B.

【名师点睛】本题首先根据三视图，还原得到几何体——棱柱，根据题目给定的数据，计算几何体的体积，常规题目．难度不大，注重了基础知识、视图用图能力、基本计算能力的考查．易错点有二，一是不能正确还原几何体；二是计算体积有误．为避免出错，应注重多观察、细心算

5．【2019 年高考浙江卷】设三棱锥 $V-ABC$ 的底面是正三角形，侧棱长均相等，P 是棱 VA 上的点（不含端点）．记直线 PB 与直线 AC 所成的角为 α，直线 PB 与平面 ABC 所成的角为 β，二面角 $P-AC-B$ 的平面角为 γ，则

A．$\beta<\gamma$，$\alpha<\gamma$　　　　B．$\beta<\alpha$，$\beta<\gamma$

C．$\beta<\alpha$，$\gamma<\alpha$　　　　D．$\alpha<\beta$，$\gamma<\beta$

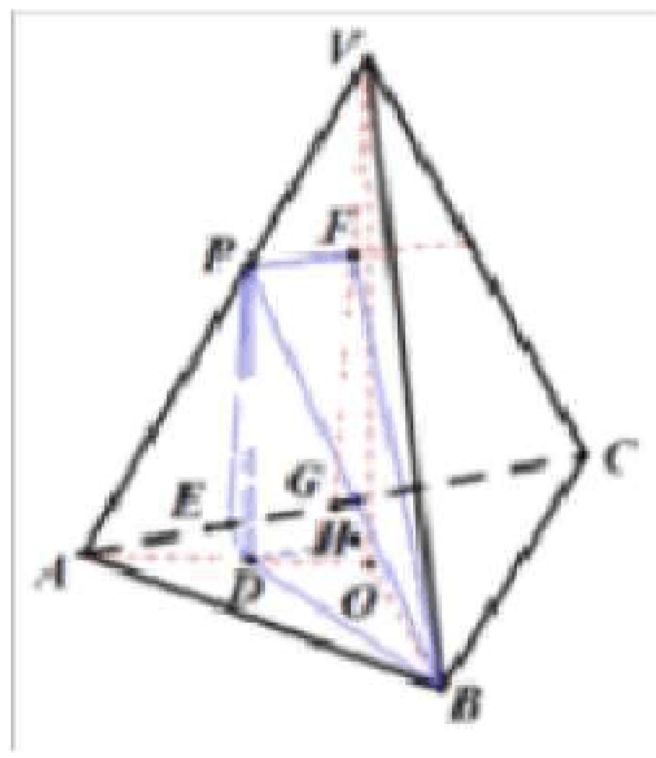
【答案】B

G 为 AC 中点，连接 VG，V 在底面 ABC 的投影为 O，则 P 在底面的投影 D 在线段 AO 上，过 D 作 DE 垂直于 AC 于 E，连接 PE，BD，易得 PE∥VG，过 P 作

PF∥AC 交 VG 于 F，连接 BF，过 D 作 DH∥AC，交 BG 于 H，则 BPF，PBD，PED，结合△PFB，△BDH，△PDB 均为直角三角形，可

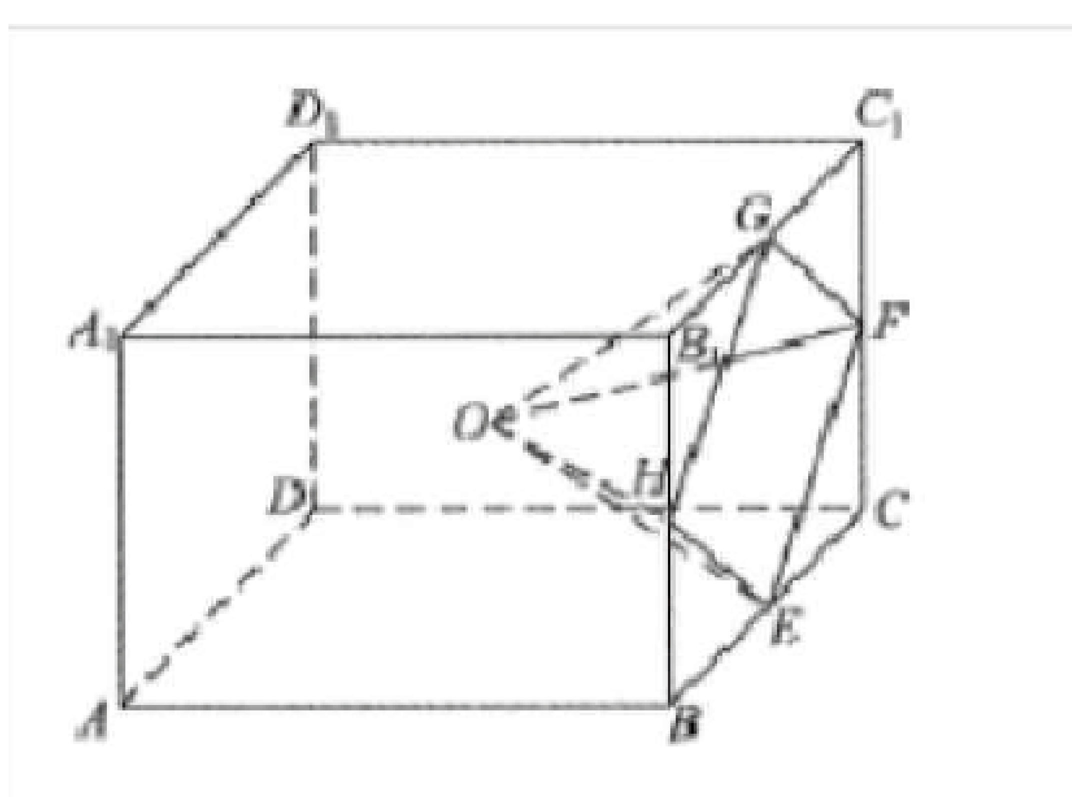
得 cos $\frac{PF}{PB}$ $\frac{EG}{PB}$ $\frac{DH}{PB}$ $\frac{BD}{PB}$ cos，即；

在 Rt△PED 中，tan $\frac{PD}{ED}$ $\frac{PD}{BD}$ tan，即，综上所述，答案为 B.



【名师点睛】本题以三棱锥为载体，综合考查异面直线所成的角、直线与平面所成的角、二面角的概念，以及各种角的计算 .解答的基本方法是通过明确各种角，应用三角函数知识求解，而后比较大小 .而充分利用图形特征，则可事倍功半 .常规解法下易出现的错误有，不能正确作图得出各种角，未能想到利用“特殊位置法”，寻求简便解法 .

6．【 2019 年高考全国Ⅲ卷理数】学生到工厂劳动实践，利用 3D 打印技术制作模型 .如图，该模型为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 挖去四棱锥 O—EFGH 后所得的几何体，其中 O 为长方体的中心，E，F，G，H 分别为所在棱的中点，AB= BC=6cm，AA_1= 4cm，3D 打印所用原料密度为 0.9 g/cm^3，不考虑打印损耗，制作该模型所需原料的质量为 g.



答案】 118.8

【解析】由题意得， $S_{四边形EFGH}$ 4 6 4 $\frac{1}{2}$ 2 3 $12cm^2$，

∵四棱锥 O-EFGH 的高为 3cm，∴ $V_{O\ EFGH}$ $\frac{1}{3}$ 12 3 $12cm^3$．

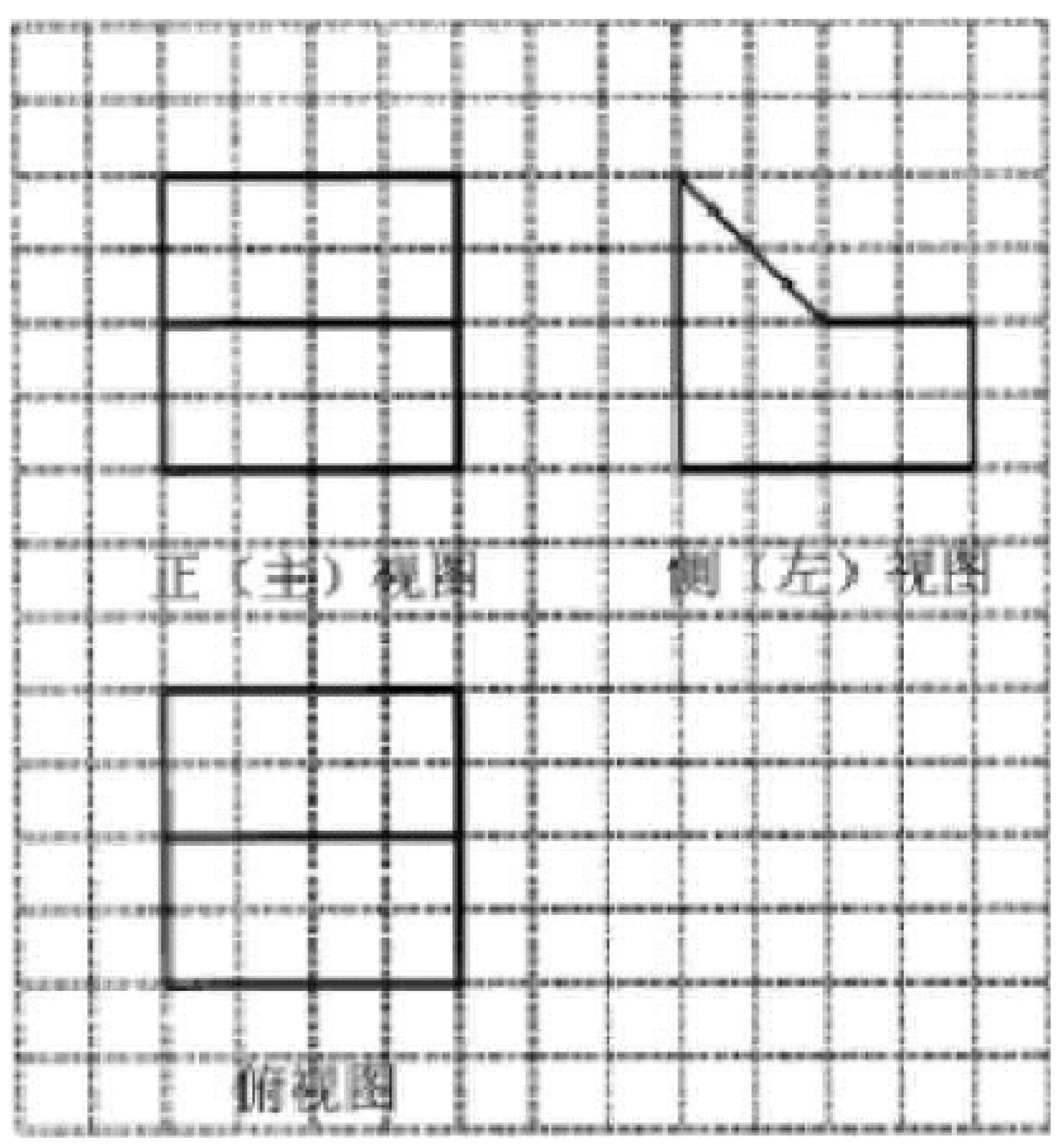
又长方体 $ABCD\ A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 V_2 4 6 6 $144cm^3$，

所以该模型体积为 V $V_2 V_{O\ EFGH}$ 144 12 $132cm^3$，

其质量为 0.9 132 118.8g.

【名师点睛】 本题考查几何体的体积问题， 理解题中信息联系几何体的体积和质量关系，从而利用公式求解．根据题意可知模型的体积为长方体体积与四棱锥体积之差进而求得 模型的体积，再求出模型的质量即可 .

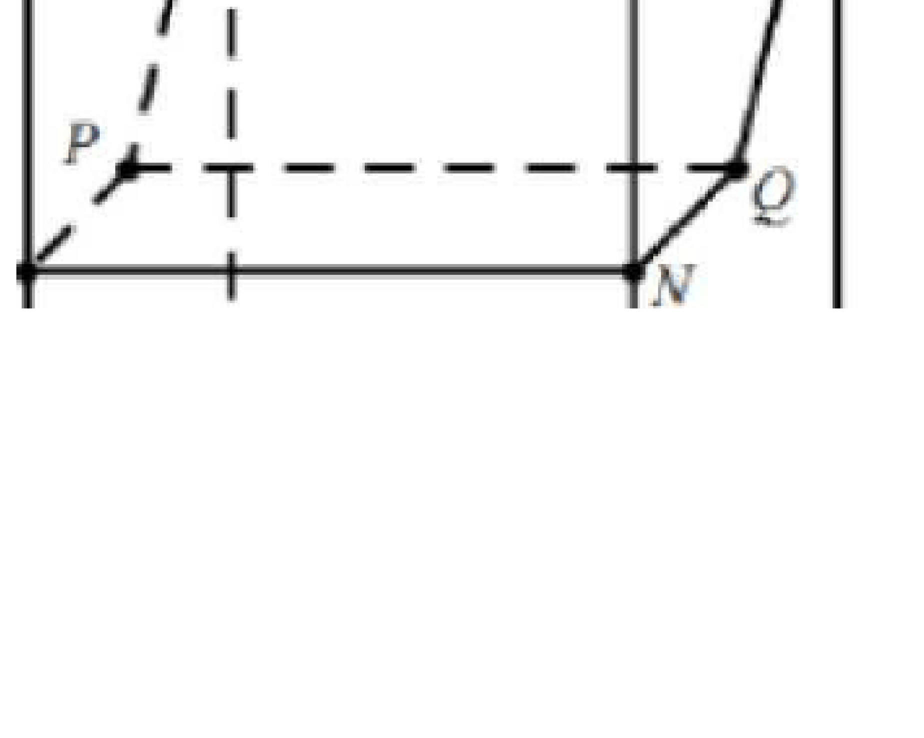
7．【 2019 年高考北京卷理数】某几何体是由一个正方体去掉一个四棱柱所得，其三视图如 图所示．如果网格纸上小正方形的边长为 1，那么该几何体的体积为 ________ .

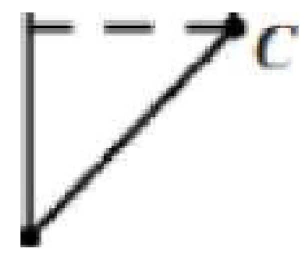


答案】 40

解析】如图所示，在棱长为 4 的正方体中，三视图对应的几何体为正方体去掉棱柱

$MPD_1A_1NQC_1B_1$ 之后余下的几何体，





则几何体的体积 $V = 4^3 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times 2 \times 4 = 40$.

【名师点睛】本题首先根据三视图，还原得到几何体，再根据题目给定的数据，计算几何体的体积．属于中等题．(1) 求解以三视图为载体的空间几何体的体积的关键是由三视图确定直观图的形状以及直观图中线面的位置关系和数量关系，利用相应体积公式求解；(2) 若所给几何体的体积不能直接利用公式得出，则常用等积法、分割法、补形法等方法进行求解.

8．【2019 年高考北京卷理数】已知 l，m 是平面 α 外的两条不同直线．给出下列三个论断：

①$l\perp m$；　②$m\parallel\alpha$；　③$l\perp\alpha$．

以其中的两个论断作为条件，余下的一个论断作为结论，写出一个正确的命题：

【答案】如果 $l\perp\alpha$，$m\parallel\alpha$，则 $l\perp m$（如果 $l\perp\alpha$，$l\perp m$，则 $m\parallel\alpha$也对）【解析】将所给论断，分别作为条件、结论，得到如下三个命题：

(1) 如果 $l\perp\alpha$，$m\parallel\alpha$，则 $l\perp m$，正确；

(2) 如果 $l\perp\alpha$，$l\perp m$，则 $m\parallel\alpha$，是不正确的，有可能 m 在平面 α内；但是已知了直线在平面外，故正确。

(3) 如果 $l\perp m$，$m\parallel\alpha$，则 $l\perp\alpha$，不正确，有可能 l与 α斜交、$l\parallel\alpha$．故答案为：如果 $l\perp\alpha$，$m\parallel\alpha$，则 $l\perp m$.

【名师点睛】本题主要考查空间线面的位置关系、命题、逻辑推理能力及空间想象能力．将所给论断，分别作为条件、结论加以分析即可．

9．【2019 年高考天津卷理数】已知四棱锥的底面是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形，侧棱长均为 $\sqrt{5}$．若圆柱的一个底面的圆周经过四棱锥四条侧棱的中点，另一个底面的圆心为四棱锥底面的中心，则该圆柱的体积为 ______________．

【答案】$\frac{\pi}{4}$

【解析】由题意，四棱锥的底面是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形，侧棱长均为 $\sqrt{5}$，借助勾股定理，可知四棱锥的高为 $\sqrt{5-1}=2$，

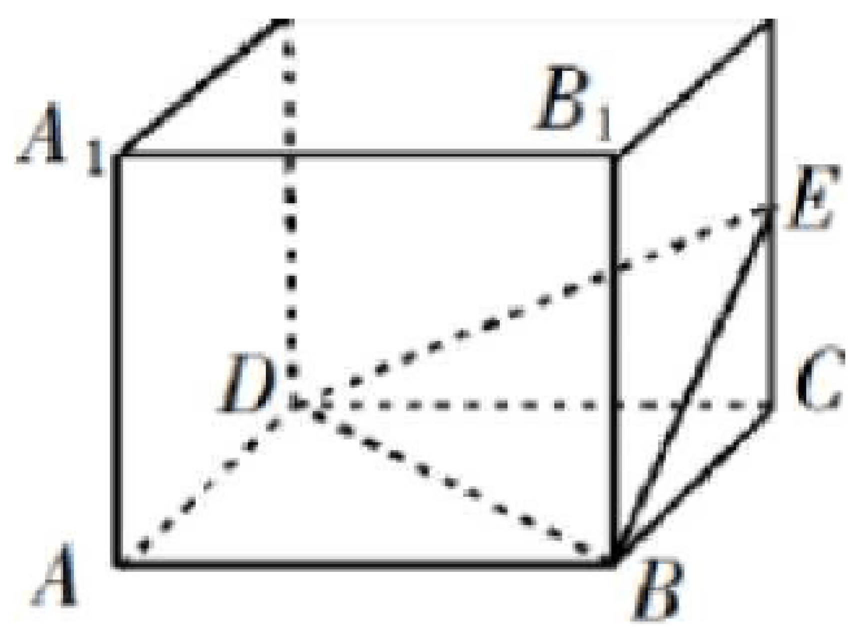
若圆柱的一个底面的圆周经过四棱锥四条侧棱的中点，一个底面的圆心为四棱锥底面的

$_1$， $_1$ 中心，故圆柱的高为 1，圆柱的底面半径为 $\frac{1}{2}$，

故圆柱的体积为 $\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 1=\frac{\pi}{4}$.

【名师点睛】 根据棱锥的结构特点， 确定所求的圆柱的高和底面半径 .注意本题中圆柱的底面半径是棱锥底面对角线长度的一半、不是底边棱长的一半 .

10．【 2019 年高考江苏卷】如图，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积是 120，E 为 CC_1 的中点，则三棱锥 E-BCD 的体积是 ▲



答案】 10

解析】因为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 120，所以 $AB\cdot BC\cdot CC_1=120$，

因为 E 为 CC_1 的中点，所以 $CE=\frac{1}{2}CC_1$，

由长方体的性质知 $CC_1\perp$ 底面 ABCD ，

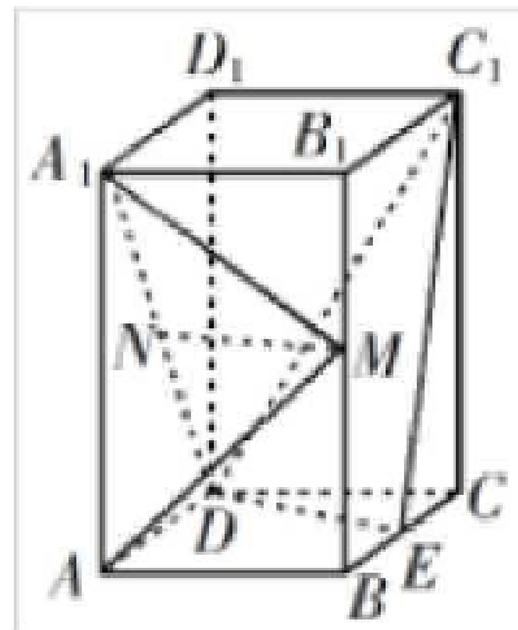
所以 CE 是三棱锥 $E-BCD$ 的底面 BCD 上的高，

所以三棱锥 $E-BCD$ 的体积

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot CE=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\frac{1}{2}CC_1=\frac{1}{12}\times 120=10.$$

【名师点睛】 本题蕴含“整体和局部”的对立统一规律 .在几何体面积或体积的计算问题中，往往需要注意理清整体和局部的关系， 灵活利用“割”与“补”的方法解题 .由题意结合几何体的特征和所给几何体的性质可得三棱锥的体积

11．【2019 年高考全国 I 卷理数】 如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形， $AA_1=4$，$AB=2$， $\angle BAD=60°$，E，M，N 分别是 BC，BB_1，A_1D 的中点.



（1）证明：MN ∥平面 C_1DE；

（2）求二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值.

【答案】（1）见解析；（2）$\frac{10}{5}$.

【解析】（1）连结 B_1C，ME.

因为 M，E 分别为 BB_1，BC 的中点，

所以 $ME \parallel B_1C$，且 $ME = \frac{1}{2}B_1C$.

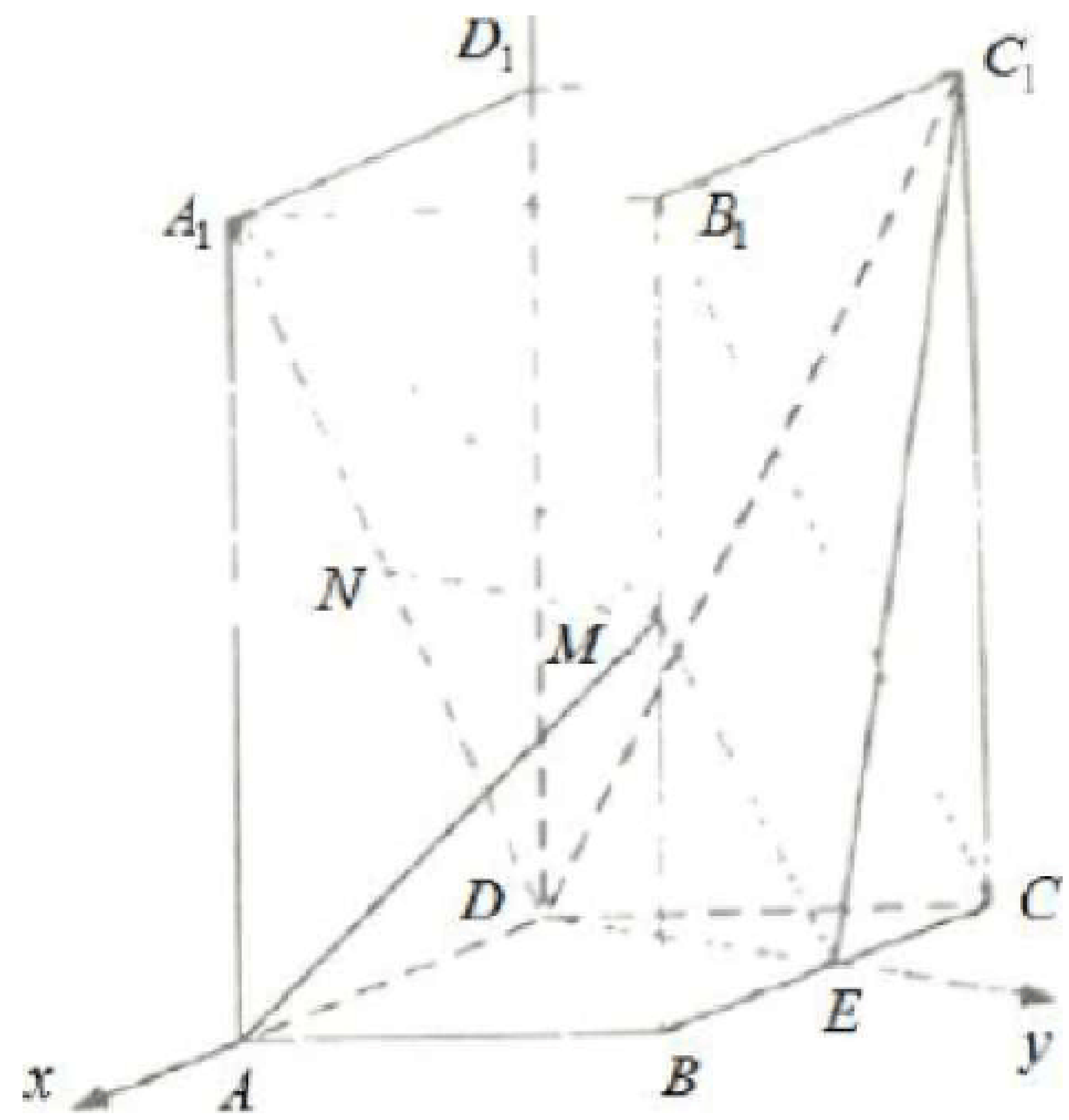
又因为 N 为 A_1D 的中点，所以 $ND = \frac{1}{2}A_1D$.

由题设知 A_1B_1 P DC，可得 B_1C P A_1D，故 ME P ND，

因此四边形 MND 为E 平行四边形，$MN \parallel ED$. 又 MN 平面 EDC_1，所以 MN ∥平面 C_1DE.

（2）由已知可得 $DE \perp DA$.

以 D 为坐标原点，$\overrightarrow{DA}$ 的方向为 x 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$，则



$A(2,0,0)$, $A_1(2,0,4)$, $M(1,3,2)$, $N(1,0,2)$, $\overrightarrow{A_1A}(0,0,4)$, $\overrightarrow{A_1M}(1,3,2)$

$\overrightarrow{A_1N}(1,0,2)$, $\overrightarrow{MN}(0,3,0)$.

设 $m(x,y,z)$ 为平面 A_1MA 的法向量，则 $\begin{cases} m\cdot\overrightarrow{A_1M}=0 \\ m\cdot\overrightarrow{A_1A}=0 \end{cases}$，

所以 $\begin{cases} x\ 3y\ 2z\ 0 \\ 4z\ 0 \end{cases}$ 可取 $m(3,1,0)$.

设 $n(p,q,r)$ 为平面 A_1MN 的法向量，则 $\begin{cases} n\cdot\overrightarrow{MN}=0, \\ n\cdot\overrightarrow{A_1N}=0. \end{cases}$

所以 $\begin{cases} 3q\ 0, \\ p\ 2r\ 0. \end{cases}$ 可取 $n(2,0,1)$

于是 $\cos\langle m,n\rangle \frac{m n}{|m||n|} \frac{23}{25} \frac{15}{5}$

所以二面角 $A\ MA_1N$ 的正弦值为 $\frac{10}{5}$

【名师点睛】本题考查线面平行关系的证明、空间向量法求解二面角的问题．求解二面角的关键是能够利用垂直关系建立空间直角坐标系，从而通过求解法向量夹角的余弦值来得到二面角的正弦值，属于常规题型．

12．【2019年高考全国Ⅱ卷理数】如图，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是正方形，点

E 在棱 AA_1 上，$BE \perp EC_1$.