

江苏省盐城市阜宁中学 2023-2024 学年高三第一次调研测试数学试卷

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = f(-x)$ ，且在区间 $[1, 2]$ 上是减函数，令

$$a = \ln 2, b = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}, c = \log_{\frac{1}{2}} 2, \text{ 则 } f(a), f(b), f(c) \text{ 的大小关系为 ()}$$

A. $f(a) < f(b) < f(c)$ B. $f(a) < f(c) < f(b)$

C. $f(b) < f(a) < f(c)$ D. $f(c) < f(a) < f(b)$

2. 刘徽(约公元 225 年-295 年)，魏晋期间伟大的数学家，中国古典数学理论的奠基人之一他在割圆术中提出的，“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”，这可视为中国古代极限观念的佳作，割圆术的核心思想是将一个圆的内接正 n 边形等分成 n 个等腰三角形(如图所示)，当 n 变得很大时，这 n 个等腰三角形的面积之和近似等于圆的面积，运用割圆术的思想，得到 $\sin 2^\circ$ 的近似值为 ()



A. $\frac{\pi}{90}$ B. $\frac{\pi}{180}$ C. $\frac{\pi}{270}$ D. $\frac{\pi}{360}$

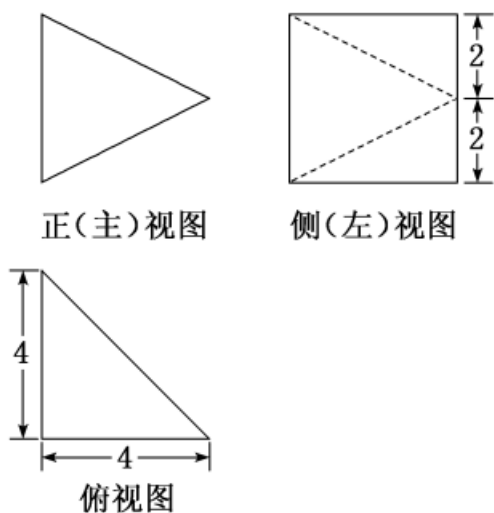
3. 已知集合 $A = \{1, 3, 5, 7\}$ ， $B = \{2, 3, 4, 5\}$ ，则 $A \cap B =$

A. $\{3\}$ B. $\{5\}$ C. $\{3, 5\}$ D. $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

4. 已知点 $A(2, 0)$ 、 $B(0, -2)$ 。若点 P 在函数 $y = \sqrt{x}$ 的图象上，则使得 $\triangle PAB$ 的面积为 2 的点 P 的个数为 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

5. 已知某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积是 ()



- A. $\frac{64}{3}$ B. 64 C. $\frac{32}{3}$ D. 32

6. 已知正三棱锥 $A-BCD$ 的所有顶点都在球 O 的球面上, 其底面边长为 4, E 、 F 、 G 分别为侧棱 AB , AC , AD 的中点. 若 O 在三棱锥 $A-BCD$ 内, 且三棱锥 $A-BCD$ 的体积是三棱锥 $O-BCD$ 体积的 4 倍, 则此外接球的体积与三棱锥 $O-EFG$ 体积的比值为 ()

- A. $6\sqrt{3}\pi$ B. $8\sqrt{3}\pi$ C. $12\sqrt{3}\pi$ D. $24\sqrt{3}\pi$

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\ln x|, & 0 < x \leq e^2 \\ e^2 + 2 - x, & x > e^2 \end{cases}$, 存在实数 $x_1 < x_2 < x_3$, 使得 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$, 则 $\frac{f(x_1)}{x_2}$ 的最大值为 ()

- A. $\frac{1}{e}$ B. $\frac{1}{\sqrt{e}}$ C. $\frac{1}{2\sqrt{e}}$ D. $\frac{1}{e^2}$

8. 若函数 $y = 2\sin(2x + \varphi)$ 的图象过点 $(\frac{\pi}{6}, 1)$, 则它的一条对称轴方程可能是 ()

- A. $x = \frac{\pi}{6}$ B. $x = \frac{\pi}{3}$ C. $x = \frac{\pi}{12}$ D. $x = \frac{5\pi}{12}$

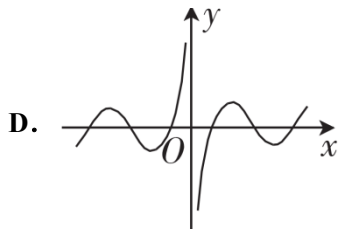
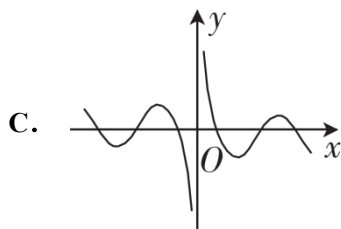
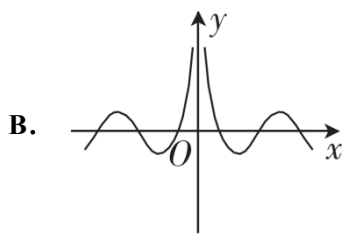
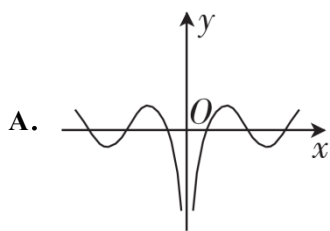
9. 设 $k > 1$, 则关于 x, y 的方程 $(1-k)x^2 + y^2 = k^2 - 1$ 所表示的曲线是 ()

- A. 长轴在 y 轴上的椭圆 B. 长轴在 x 轴上的椭圆
C. 实轴在 y 轴上的双曲线 D. 实轴在 x 轴上的双曲线

10. 已知 i 为虚数单位, 复数 $z = (1+i)(2+i)$, 则其共轭复数 $\bar{z} =$ ()

- A. $1+3i$ B. $1-3i$ C. $-1+3i$ D. $-1-3i$

11. 函数 $f(x) = \cos 2x + \frac{2\cos 2x}{2^x - 1}$ 的图象大致是 ()



12. 已知复数 z 满足 $i \cdot z = 2 + i$, 则 z 的共轭复数是 ()

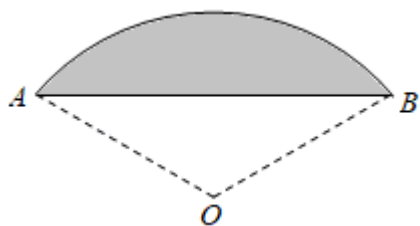
- A. $-1 - 2i$ B. $-1 + 2i$ C. $1 - 2i$ D. $1 + 2i$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 设定义域为 R 的函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) > f(x)$, 则不等式 $e^{x-1} f(x) < f(2x-1)$ 的解集为_____.

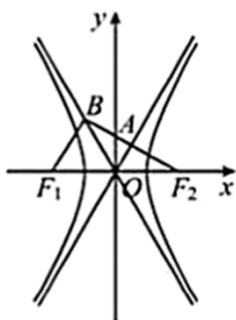
14. 春天即将来临, 某学校开展以“拥抱春天, 播种绿色”为主题的植物种植实践体验活动. 已知某种盆栽植物每株成活的概率为 p , 各株是否成活相互独立. 该学校的某班随机领养了此种盆栽植物 10 株, 设 X 为其中成活的株数, 若 X 的方差 $DX = 2.1$, $P(X = 3) < P(X = 7)$, 则 $p =$ _____.

15. 《九章算术》是中国古代的数学名著, 其中《方田》一章给出了弧田面积的计算公式. 如图所示, 弧田是由圆弧 AB 和其所对弦 AB 围成的图形, 若弧田的弧 AB 长为 4π , 弧所在的圆的半径为 6, 则弧田的弦 AB 长是_____, 弧田的面积是_____.



16. 如图, F_1 、 F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点, 过 F_2 的直线与双曲线 C 的两条渐近线分别交于 A 、 B

两点, 若 $\overrightarrow{F_2A} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{F_1B} \cdot \overrightarrow{F_2B} = 0$, 则双曲线 C 的离心率是_____.



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x - x + \frac{1}{2}x^2$.

(1) 若 $x_1 \neq x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 求证: $f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < 0$;

(2) 若 $x \in \mathbf{R}$ 时, 恒有 $f(x) \geq \frac{1}{2}x^2 + ax + b$, 求 $ab + b$ 的最大值.

18. (12 分) 已知圆 C 的极坐标方程是 $\rho = 4\cos\theta$, 以极点为平面直角坐标系的原点, 极轴为 x 轴的正半轴, 建立平

面直角坐标系, 直线 l 的参数方程是
$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}t + m \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 是参数}),$$
 若直线 l 与圆 C 相切, 求实数 m 的值.

19. (12 分) 已知向量 $\vec{a} = (\cos x, -1)$, $\vec{b} = \left(\sqrt{3}\sin x, -\frac{1}{2}\right)$, 函数 $f(x) = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} - 2$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期及单调递增区间;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 三内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知函数 $f(x)$ 的图像经过点 $\left(A, \frac{1}{2}\right)$, b, a, c 成等差数列,

且 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 9$, 求 a 的值.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x - \frac{\ln x}{a}$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上是减函数, 求实数 a 的最大值;

(2) 若 $0 < a < 1$, 求证: $f(x) \geq \frac{2 + \ln a}{a}$.

21. (12 分) 已知在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $c = 4\sqrt{2}$, $\cos C = \frac{3}{5}$.

(1) 若 $B = \frac{\pi}{4}$, 求 a 的值;

(2) 若 $b = 5$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = e^x(x-1) - \frac{1}{2}e^ax^2$, $a < 0$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 求函数 $f(x)$ 的极小值;

(3) 求函数 $f(x)$ 的零点个数.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

可设 $x \in [0, 1]$ ，根据 $f(x)$ 在 R 上为偶函数及 $f(x+2) = f(-x)$ 便可得到： $f(x) = f(-x) = f(-x+2)$ ，可设 $x_1, x_2 \in [0, 1]$ ，且 $x_1 < x_2$ ，根据 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上是减函数便可得出 $f(x_1) < f(x_2)$ ，从而得出 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增，再根据对数的运算得到 a, b, c 的大小关系，从而得到 $f(a), f(b), f(c)$ 的大小关系。

【详解】

解：因为 $\ln 1 < \ln 2 < \ln e$ ，即 $0 < a < 1$ ，又 $b = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2$ ， $c = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$

设 $x \in [0, 1]$ ，根据条件， $f(x) = f(-x) = f(-x+2)$ ， $-x+2 \in [1, 2]$ ；

若 $x_1, x_2 \in [0, 1]$ ，且 $x_1 < x_2$ ，则： $-x_1+2 > -x_2+2$ ；

Q $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上是减函数；

$\therefore f(-x_1+2) < f(-x_2+2)$ ；

$\therefore f(x_1) < f(x_2)$ ；

$\therefore f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是增函数；

所以 $f(b) = f(2) = f(0)$ ， $f(c) = f(-1) = f(1)$

$\therefore f(b) < f(a) < f(c)$

故选：C

【点睛】

考查偶函数的定义，减函数及增函数的定义，根据单调性定义判断一个函数单调性的方法和过程：设 $x_1 < x_2$ ，通过条件比较 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ ，函数的单调性的应用，属于中档题。

2、A

【解析】

设圆的半径为 r , 每个等腰三角形的顶角为 $\frac{360^\circ}{n}$, 则每个等腰三角形的面积为 $\frac{1}{2}r^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$, 由割圆术可得圆的面积为 $\pi r^2 = n \cdot \frac{1}{2}r^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$, 整理可得 $\sin \frac{360^\circ}{n} = \frac{2\pi}{n}$, 当 $n=180$ 时即可为所求.

【详解】

由割圆术可知当 n 变得很大时, 这 n 个等腰三角形的面积之和近似等于圆的面积,

设圆的半径为 r , 每个等腰三角形的顶角为 $\frac{360^\circ}{n}$,

所以每个等腰三角形的面积为 $\frac{1}{2}r^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$,

所以圆的面积为 $\pi r^2 = n \cdot \frac{1}{2}r^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$, 即 $\sin \frac{360^\circ}{n} = \frac{2\pi}{n}$,

所以当 $n=180$ 时, 可得 $\sin \frac{360^\circ}{180} = \sin 2^\circ = \frac{2\pi}{180} = \frac{\pi}{90}$,

故选:A

【点睛】

本题考查三角形面积公式的应用, 考查阅读分析能力.

3、C

【解析】

分析: 根据集合 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ 可直接求解 $A \cap B = \{3, 5\}$.

详解: $\because A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$,

$$\therefore A \cap B = \{3, 5\},$$

故选 C

点睛: 集合题也是每年高考的必考内容, 一般以客观题形式出现, 一般解决此类问题时要先将参与运算的集合化为最简形式, 如果是“离散型”集合可采用 Venn 图法解决, 若是“连续型”集合则可借助不等式进行运算.

4、C

【解析】

设出点 P 的坐标, 以 AB 为底结合 $\triangle PAB$ 的面积计算出点 P 到直线 AB 的距离, 利用点到直线的距离公式可得出关于 a 的方程, 求出方程的解, 即可得出结论.

【详解】

设点 P 的坐标为 $(a, \sqrt{a})$, 直线 AB 的方程为 $\frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 1$, 即 $x - y - 2 = 0$,

设点 P 到直线 AB 的距离为 d ，则 $S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2}|AB| \cdot d = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times d = 2$ ，解得 $d = \sqrt{2}$ ，

另一方面，由点到直线的距离公式得 $d = \frac{|a - \sqrt{a} - 2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ，

整理得 $a - \sqrt{a} = 0$ 或 $a - \sqrt{a} - 4 = 0$ ， $\because a \geq 0$ ，解得 $a = 0$ 或 $a = 1$ 或 $a = \frac{9 + \sqrt{17}}{2}$ 。

综上，满足条件的点 P 共有三个。

故选：C。

【点睛】

本题考查三角形面积的计算，涉及点到直线的距离公式的应用，考查运算求解能力，属于中等题。

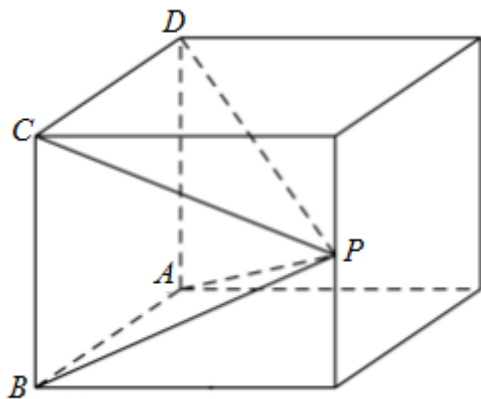
5、A

【解析】

根据三视图，还原空间几何体，即可得该几何体的体积。

【详解】

由该几何体的三视图，还原空间几何体如下图所示：



可知该几何体是底面在左侧的四棱锥，其底面是边长为 4 的正方形，高为 4，

$$\text{故 } V = \frac{1}{3} \times (4 \times 4) \times 4 = \frac{64}{3}.$$

故选：A

【点睛】

本题考查了三视图的简单应用，由三视图还原空间几何体，棱锥体积的求法，属于基础题。

6、D

【解析】

如图，平面 EFG 截球 O 所得截面的图形为圆面，计算 $AH = 4OH$ ，由勾股定理得 $R = \sqrt{6}$ ，此外接球的体积为

$\frac{24\sqrt{6}}{3}\pi$ ，三棱锥 $O-EFG$ 体积为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ，得到答案.

【详解】

如图，平面 EFG 截球 O 所得截面的图形为圆面.

正三棱锥 $A-BCD$ 中，过 A 作底面的垂线 AH ，垂足为 H ，与平面 EFG 交点记为 K ，连接 OD 、 HD 。

依题意 $V_{A-BCD} = 4V_{O-BCD}$ ，所以 $AH = 4OH$ ，设球的半径为 R ，

在 $Rt\triangle OHD$ 中， $OD = R$ ， $HD = \frac{\sqrt{3}}{3}BC = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ ， $OH = \frac{1}{3}OA = \frac{R}{3}$ ，

由勾股定理： $R^2 = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{R}{3}\right)^2$ ，解得 $R = \sqrt{6}$ ，此外接球的体积为 $\frac{24\sqrt{6}}{3}\pi$ ，

由于平面 $EFG \parallel$ 平面 BCD ，所以 $AH \perp$ 平面 EFG ，

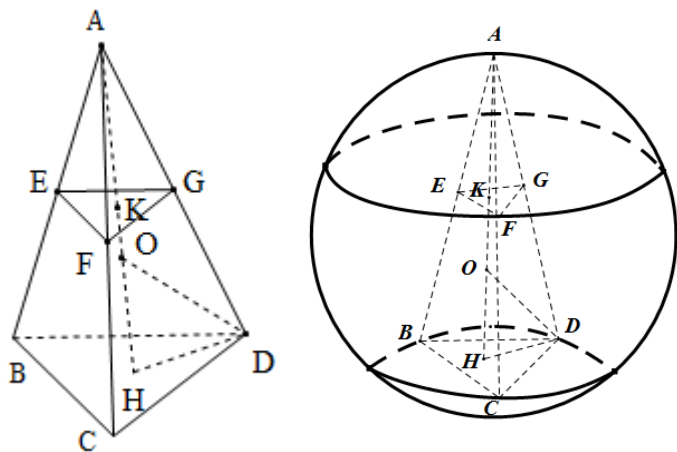
球心 O 到平面 EFG 的距离为 KO ，

则 $KO = OA - KA = OA - \frac{1}{2}AH = R - \frac{2}{3}R = \frac{R}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，

所以三棱锥 $O-EFG$ 体积为 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ，

所以此外接球的体积与三棱锥 $O-EFG$ 体积比值为 $24\sqrt{3}\pi$ 。

故选：D.



【点睛】

本题考查了三棱锥的外接球问题，三棱锥体积，球体积，意在考查学生的计算能力和空间想象能力.

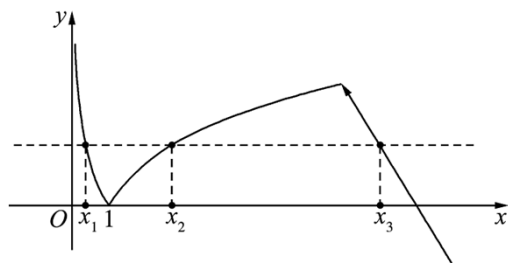
7、A

【解析】

画出分段函数图像，可得 $x_1 x_2 = 1$ ，由于 $\frac{f(x_1)}{x_2} = \frac{f(x_2)}{x_2} = \frac{\ln x_2}{x_2}$ ，构造函数 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ ，利用导数研究单调性，分

析最值，即得解.

【详解】



由于 $0 < x_1 < 1 < x_2 < e^2 < x_3 < e^2 + 2$,

$$-\ln x_1 = \ln x_2 \Rightarrow x_1 x_2 = 1,$$

$$\text{由于 } \frac{f(x_1)}{x_2} = \frac{f(x_2)}{x_2} = \frac{\ln x_2}{x_2},$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x \in (1, e^2),$$

$$g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \Rightarrow g(x) \text{ 在 } (1, e) \nearrow, (e, e^2) \searrow$$

$$\text{故 } g(x)_{\max} = g(e) = \frac{1}{e}.$$

故选：A

【点睛】

本题考查了导数在函数性质探究中的应用，考查了学生数形结合，转化划归，综合分析，数学运算的能力，属于较难题.

8、B

【解析】

把已知点坐标代入求出 φ ，然后验证各选项.

【详解】

$$\text{由题意 } 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) = 1, \quad \sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) = \frac{1}{2}, \quad \varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \text{ 或 } \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{不妨取 } \varphi = -\frac{\pi}{6} \text{ 或 } \varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{若 } \varphi = \frac{\pi}{2}, \text{ 则函数为 } y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x, \text{ 四个选项都不合题意,}$$

若 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ ，则函数为 $y = 2\sin(2x - \frac{\pi}{6})$ ，只有 $x = \frac{\pi}{3}$ 时， $\sin(2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}) = 1$ ，即 $x = \frac{\pi}{3}$ 是对称轴。

故选：B.

【点睛】

本题考查正弦型复合函数的对称轴，掌握正弦函数的性质是解题关键.

9、C

【解析】

根据条件，方程 $(1-k)x^2 + y^2 = k^2 - 1$. 即 $\frac{y^2}{k^2-1} - \frac{x^2}{k+1} = 1$ ，结合双曲线的标准方程的特征判断曲线的类型.

【详解】

解： $\because k > 1$, $\therefore 1+k > 0$, $k^2-1 > 0$,

方程 $(1-k)x^2 + y^2 = k^2 - 1$ ，即 $\frac{y^2}{k^2-1} - \frac{x^2}{k+1} = 1$ ，表示实轴在 y 轴上的双曲线，

故选 C.

【点睛】

本题考查双曲线的标准方程的特征，依据条件把已知的曲线方程化为 $\frac{y^2}{k^2-1} - \frac{x^2}{k+1} = 1$ 是关键.

10、B

【解析】

先根据复数的乘法计算出 z ，然后再根据共轭复数的概念直接写出 $\bar{z}$ 即可.

【详解】

由 $z = (1+i)(2+i) = 1+3i$ ，所以其共轭复数 $\bar{z} = 1-3i$.

故选：B.

【点睛】

本题考查复数的乘法运算以及共轭复数的概念，难度较易.

11、C

【解析】

根据函数奇偶性可排除 AB 选项；结合特殊值，即可排除 D 选项.

【详解】

$$\because f(x) = \cos 2x + \frac{2\cos 2x}{2^x - 1} = \frac{2^x + 1}{2^x - 1} \times \cos 2x,$$

$$f(-x) = \frac{2^{-x} + 1}{2^{-x} - 1} \times \cos(-2x) = -\frac{2^x + 1}{2^x - 1} \times \cos 2x = -f(x),$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/787162162151010035>