湖南省长沙市稻田中学2023-2024学年高考数学倒计时模拟卷

注意事项：
1． 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2．选择题必须使用2B铅笔填涂；非选择题必须使用0．5毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。
3．请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4．保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．在ΔABC中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$2\left(b\cos A+a\cos B\right)=c^2$，$b=3$，$3\cos A=1$，则$a=$（　　）

A． $\sqrt{5}$　　**B．** 3　　**C．** $\sqrt{10}$　　**D．** 4

2．已知函数$f(x)=\sin^2\frac{\pi}{4}x-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{4}x\cos\frac{\pi}{4}x$，则$f(1)+f(2)+...+f(2020)$的值等于（　　）

A．2018　　**B．1009**　　**C．1010**　　**D．2020**

3．“$b=2$”是“函数$f\left(x\right)=\left(2b^2-3b-1\right)x^{\alpha}$（$\alpha$为常数）为幂函数”的（　　）

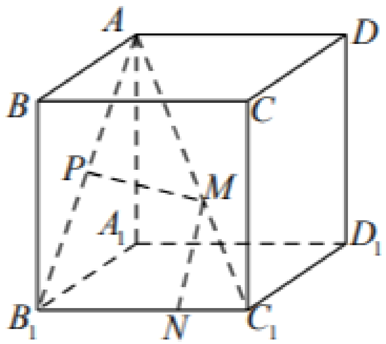
A． 充分不必要条件　　**B．** 必要不充分条件

C． 充要条件　　**D．** 既不充分又不必要条件

4．已知$a=\ln\sqrt[3]{3}$，$b=e^{-1}$，$c=\frac{3\ln 2}{8}$，则a，b，c的大小关系为（　　）

A． $a>b>c$　　**B．** $a>c>b$　　**C．** $b>c>a$　　**D．** $b>a>c$

5．如图，棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，P为线段AB_1的中点，M,N分别为线段AC_1和 棱 B_1C_1上任意一点，则$2PM+\sqrt{2}MN$的最小值为（　　）



A． $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　**B．** $\sqrt{2}$　　**C．** $\sqrt{3}$　　**D．** 2

6．设函数$f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\varphi\right)$（$\omega>0$，$0<\varphi\le\pi$）是$R$上的奇函数，若$f\left(x\right)$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{4}$对称，且

$f\left(x\right)$在区间$\left[-\dfrac{\pi}{22},\dfrac{\pi}{11}\right]$上是单调函数，则$f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=$（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$-\dfrac{1}{2}$

7．已知甲盒子中有m个红球，n个蓝球，乙盒子中有$m-1$个红球，$n+1$个蓝球$(m\geq 3,n\geq 3)$，同时从甲乙两个盒子中取出$i(i=1,2)$个球进行交换，（**a**）交换后，从甲盒子中取**1**个球是红球的概率记为$p_i(i=1,2)$.（**b**）交换后，乙盒子中含有红球的个数记为$\xi_i(i=1,2)$.则（　　）

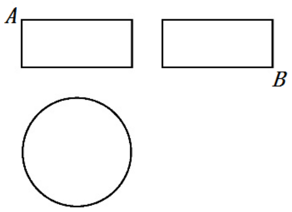
A．$p_1>p_2,E(\xi_1)<E(\xi_2)$　　B．$p_1\left\langle p_2,E(\xi_1)\right\rangle E(\xi_2)$

C．$p_1>p_2,E(\xi_1)>E(\xi_2)$　　D．$p_1<p_2,E(\xi_1)<E(\xi_2)$

8．在ΔABC中，$C=30°$，$\cos A=-\dfrac{2}{3}$，$AC=\sqrt{15}-2$，则AC边上的高为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　B．**2**　　C．$\sqrt{5}$　　D．$\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

9．某圆柱的高为**2**，底面周长为**16**，其三视图如图所示，圆柱表面上的点M在正视图上的对应点为A，圆柱表面上的点N在左视图上的对应点为B，则在此圆柱侧面上，从M到N的路径中，最短路径的长度为（　　）



A．$2\sqrt{17}$　　B．$2\sqrt{5}$　　C．3　　D．**2**

10．正项等比数列$\{a_n\}$中的a_1、a_{4039}是函数$f\left(x\right)=\dfrac{1}{3}x^3-4x^2+6x-3$的极值点，则$\log_{\sqrt{6}}a_{2020}=$（　　）

A．-1　　B．**1**　　C．$\sqrt{2}$　　D．**2**

11．设F_1，F_2分别为双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（***a***>**0**，***b***>**0**）的左、右焦点，过点F_1作圆$x^2+y^2=b^2$ 的切线与双曲线的左支交于点***P***，若$|PF_2|=2|PF_1|$，则双曲线的离心率为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{5}$　　D．$\sqrt{6}$

12．已知定义在R上的函数$f\left(x\right)$在区间$\left[0,+\infty\right)$上单调递增，且$y=f\left(x-1\right)$的图象关于$x=1$对称，若实数a满足

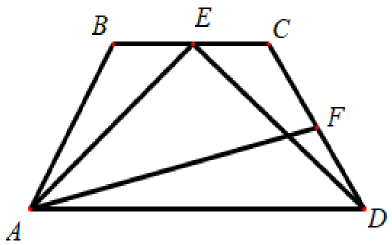
$f\left(\log_{\frac{1}{2}} a\right) < f(-2)$，则 a 的取值范围是（　　）

A． $\left(0,\frac{1}{4}\right)$　　**B．** $\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$　　**C．** $\left(\frac{1}{4},4\right)$　　**D．** $(4,+\infty)$

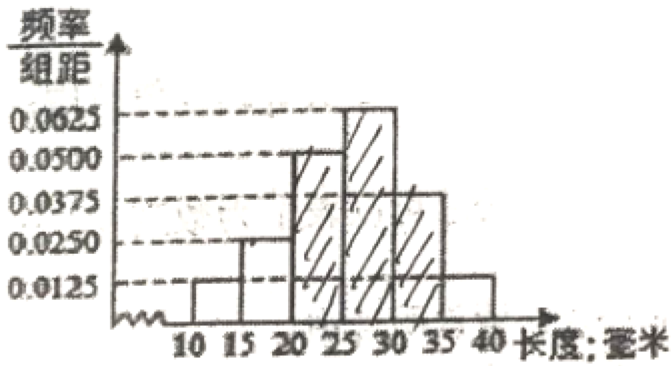
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．能说明“在数列 $\{a_n\}$ 中，若对于任意的 $m,n\in N^{+}$，$a_{m+n} > a_m + a_n$，则 $\{a_n\}$ 为递增数列”为假命题的一个等差数列是______．（写出数列的通项公式）

14．如图,在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AB = BC = 2$，$AD = 4$，E，F 分别是 BC，CD 的中点，若 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DE} = -1$，则 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{CD}$ 的值为__________．



15．为了了解一批产品的长度（单位：毫米）情况，现抽取容量为 **400** 的样本进行检测，如图是检测结果的频率分布直方图，根据产品标准，单件产品长度在区间 $[25,30)$ 的一等品，在区间 $[20,25)$ 和 $[30,35)$ 的为二等品，其余均为三等品，则样本中三等品的件数为__________．



16．正四面体 $ABCD$ 的一个顶点 A 是圆柱 OA 上底面的圆心，另外三个顶点 BCD 圆柱下底面的圆周上，记正四面体 $ABCD$ 的体积为 V_1，圆柱 OA 的体积为 V_2，则 $\frac{V_1}{V_2}$ 的值是______．

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 上的任意一点 M 到直线 $y=-1$ 的距离比 M 点到点 $F(0,2)$ 的距离小 **1**.

（**1**）求动点 M 的轨迹 C_1 的方程；

（2）若点P是圆C_2:$\left(x-2\right)^2+\left(y+2\right)^2=1$上一动点，过点$P$作曲线$C_1$的两条切线，切点分别为$A,B$，求直线$AB$斜率的取值范围.

18．(12分）在ΔABC中，角$A,\ B,\ C$所对的边分别为$a,\ b,\ c$，若$\vec{m}=(a,b-c)$，$\vec{n}=\left(\sin A-\sin B,\sin B+\sin C\right)$，$\vec{p}=(1,2)$，且$\vec{m}\perp\vec{n}$.

（1）求角C的值；

（2）求$\vec{n}\cdot\vec{p}$的最大值.

19．(12分）已知函数$f\left(x\right)=\left(x-2\right)e^x-a\left(x-1\right)^2$,其中$a\in\mathbf{R}$,$g\left(x\right)=x-\ln x$.

(1)函数$f\left(x\right)$的图象能否与x轴相切?若能,求出实数a;若不能,请说明理由.

(2)若$h\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right)$在$x=1$处取得极大值,求实数$a$的取值范围.

20．(12分）已知直线$x+y=1$过椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的右焦点，且交椭圆于$A$，$B$两点，线段$AB$的中点是$M\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$，

（1）求椭圆的方程；

（2）过原点的直线l与线段AB相交（不含端点）且交椭圆于C，D两点，求四边形$ACBD$面积的最大值.

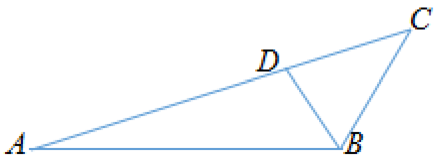
21．(12分）某工厂生产某种电子产品，每件产品不合格的概率均为p，现工厂为提高产品声誉，要求在交付用户前每件产品都通过合格检验，已知该工厂的检验仪器一次最多可检验5件该产品，且每 件产品检验合格与否相互独立．若每件产品均检验一次，所需检验费用较多，该工厂提出以下检 验方案：将产品每k个$\left(k\le 5\right)$一组进行分组检验，如果某一组产品检验合格，则说明该组内产品均合格，若检验不合格，则说明该组内有不合格产品，再对该组内每一件产品单独进行检验，如此，每一组产品只需检验1次或$1+k$次．设该工厂生产1000件该产品，记每件产品的平均检验次 数为X.

（1）求X的分布列及其期望；

（2）(i）试说明，当p越小时，该方案越合理，即所需平均检验次数越少；

（ii）当$p=0.1$时，求使该方案最合理时k的值及1000件该产品的平均检验次数.

22．(10分）如图，在ΔABC中，$AB>BC$，$\angle ABC=120^0$，$AB=3$，$\angle ABC$的角平分线与AC交于点D，$BD=1$.



（Ⅰ）求$\sin A$；

（Ⅱ）求ΔBCD的面积.

参考答案

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、**B**

【解析】

由正弦定理及条件可得$2\left(\sin B\cos A+\sin A\cos B\right)=c\sin C$，

即$2\sin\left(A+B\right)=2\sin C=c\sin C$.

$\because \sin C>0$，

$\therefore c=2$，

由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=2^2+3^2-2\times2\times3\times\frac{1}{3}=9$。

$\therefore a=3$.选**B**。

2、**C**

【解析】

首先，根据二倍角公式和辅助角公式化简函数解析式，根据所求函数的周期性，得到其周期为4，然后借助于三角函数的周期性确定其值即可.

【详解】

解：$f(x)=\sin^2\frac{\pi}{4}x-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{4}x\cos\frac{\pi}{4}x$.

$=\frac{1}{2}(1-\cos\frac{\pi}{2}x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$

$=-\sin(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$，

$\therefore f(x) = -\sin(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}$，

$\therefore f(x)$ 的周期为 $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$，

$f(1) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$，$f(2) = 1$，$f(3) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$，$f(4) = 0$，

$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 2$.

$\therefore f(1) + f(2) + \cdots + f(2020)$

$= 505 \times [f(1) + f(2) + f(3) + f(4)]$

$= 505 \times 2$

$= 1010$.

故选：**C**

【点睛】

本题重点考查了三角函数的图象与性质、三角恒等变换等知识，掌握辅助角公式化简函数解析式是解题的关键，属于中档题.

3、**A**

【解析】

根据幂函数定义，求得 b 的值，结合充分条件与必要条件的概念即可判断.

【详解】

$\because$当函数 $f(x) = (2b^2 - 3b - 1)x^a$ 为幂函数时，$2b^2 - 3b - 1 = 1$，

解得 $b = 2$ 或 $-\frac{1}{2}$，

$\therefore$“$b = 2$”是“函数 $f(x) = (2b^2 - 3b - 1)x^a$ 为幂函数”的充分不必要条件.

故选：**A.**

【点睛】

本题考查了充分必要条件的概念和判断，幂函数定义的应用，属于基础题.

4、**D**

【解析】

构造函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$，利用导数求得 $f(x)$ 的单调区间，由此判断出 a,b,c 的大小关系.

【详解】

依题意，得 $a=\ln\sqrt[3]{3}=\frac{\ln 3}{3}$， $b=e^{-1}=\frac{\ln e}{e}$， $c=\frac{3\ln 2}{8}=\frac{\ln 8}{8}$.令 $\boldsymbol{f(x)=\frac{\ln x}{x}}$，所以 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.所以函数 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减.所以 $[f(x)]_{\max}=f(e)=\frac{1}{e}=b$，且 $f(3)>f(8)$，即 $a>c$，所以 $b>a>c$.故选：D.

【点睛】

本小题主要考查利用导数求函数的单调区间，考查化归与转化的数学思想方法，考查对数式比较大小，属于中档题.

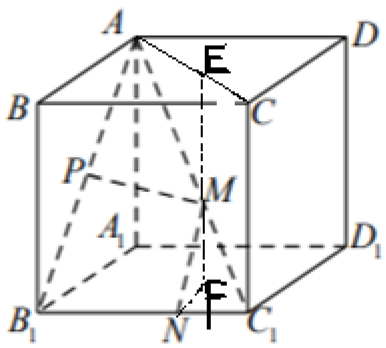
5、D

【解析】

取 AC 中点 E，过 M 作 $MF\perp$ 面 $A_1B_1C_1D_1$，可得 ΔMFN 为等腰直角三角形，由 $\Delta APM\cong\Delta AEM$，可得 $PM=EM$，当 $MN\perp B_1C_1$ 时， MN 最小，由 $MF=\frac{\sqrt{2}}{2}MN$，故 $2PM+\sqrt{2}MN=2\left(PM+\frac{\sqrt{2}}{2}MN\right)=2\left(EM+MF\right)\ge 2AA_1=2$，即可求解.

【详解】

取 AC 中点 E，过 M 作 $MF\perp$ 面 $A_1B_1C_1D_1$，如图：



则 $\Delta APM\cong\Delta AEM$，故 $PM=EM$，

而对固定的点 M，当 $MN\perp B_1C_1$ 时， MN 最小.

此时由 $MF\perp$ 面 $A_1B_1C_1D_1$，可知 ΔMFN 为等腰直角三角形， $MF=\frac{\sqrt{2}}{2}MN$，

故 $2PM+\sqrt{2}MN=2\left(PM+\frac{\sqrt{2}}{2}MN\right)=2\left(EM+MF\right)\ge 2AA_1=2$.

故选：D

【点睛】

本题考查了空间几何体中的线面垂直、考查了学生的空间想象能力，属于中档题.

6、**D**

【解析】

根据函数 $f\left(x\right)$ 为 R 上的奇函数可得 φ，由函数 $f\left(x\right)$ 的对称轴及单调性即可确定 ω 的值，进而确定函数 $f\left(x\right)$ 的解析式，即可求得 $f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ 的值.

【详解】

函数 $f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\varphi\right)$（$\omega>0$，$0<\varphi\le\pi$）是 R 上的奇函数，

则 $\varphi=\pi$，所以 $f\left(x\right)=-\sin\omega x$.

又 $f\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 对称可得 $\dfrac{\pi\omega}{4}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in Z$，即 $\omega=2+4k$，$k\in Z$，

由函数的单调区间知，$\dfrac{\pi}{11}\le\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2\pi}{\omega}$，

即 $\omega\le5.5$，

综上 $\omega=2$，则 $f\left(x\right)=-\sin2x$，

$f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

故选：**D**

【点睛】

本题考查了三角函数的图象与性质的综合应用，由对称轴、奇偶性及单调性确定参数，属于中档题.

7、**A**

【解析】

分析：首先需要去分析交换后甲盒中的红球的个数，对应的事件有哪些结果，从而得到对应的概率的大小，再者就是对随机变量的值要分清，对应的概率要算对，利用公式求得其期望.

详解：根据题意有，如果交换一个球，

有交换的都是红球、交换的都是蓝球、甲盒的红球换的乙盒的蓝球、甲盒的蓝球交换的乙盒的红球，

红球的个数就会出现 $m,m-1,m+1$ 三种情况；

如果交换的是两个球，有红球换红球、蓝球换蓝球、一蓝一红换一蓝一红、红换蓝、蓝换红、一蓝一红换两红、一蓝一红换亮蓝，

对应的红球的个数就是 $m-2,m-1,m,m+1,m+2$ 五种情况，所以分析可以求得 $p_1>p_2,E(\xi_1)<E(\xi_2)$，故选 **A.**

点睛：该题考查的是有关随机事件的概率以及对应的期望的问题，在解题的过程中，需要对其对应的事件弄明白，对应的概率会算，以及变量的可取值会分析是多少，利用期望公式求得结果.

8、**C**

【解析】

结合正弦定理、三角形的内角和定理、两角和的正弦公式，求得 BC 边长，由此求得 AC 边上的高.

【详解】

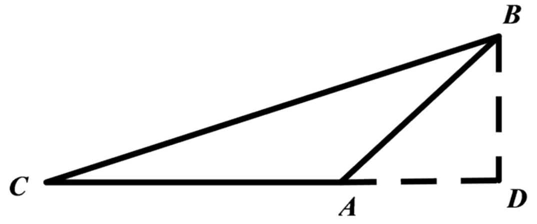
过 B 作 $BD\perp CA$，交 CA 的延长线于 D.由于 $\cos A=-\frac{2}{3}$，所以 A 为钝角，且 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，所以

$\sin\angle CBA=\sin\left(\pi-\angle CBA\right)=\sin\left(A+C\right)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{15}-2}{6}$.在三角形

ABC 中，由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，即 $\frac{BC}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{\sqrt{15}-2}{\frac{\sqrt{15}-2}{6}}$，所以 $BC=2\sqrt{5}$.在 $Rt\Delta BCD$ 中有

$BD=BC\sin C=2\sqrt{5}\times\frac{1}{2}=\sqrt{5}$，即 AC 边上的高为 $\sqrt{5}$.

故选：**C**



【点睛】

本小题主要考查正弦定理解三角形，考查三角形的内角和定理、两角和的正弦公式，属于中档题.

9、**B**

【解析】

首先根据题中所给的三视图，得到点 **M** 和点 **N** 在圆柱上所处的位置，将圆柱的侧面展开图平铺，点 **M**、**N** 在其四分之一的矩形的对角线的端点处，根据平面上两点间直线段最短，利用勾股定理，求得结果.

【详解】

根据圆柱的三视图以及其本身的特征，

将圆柱的侧面展开图平铺，

可以确定点 **M** 和点 **N** 分别在以圆柱的高为长方形的宽，圆柱底面圆周长的四分之一为长的长方形的对角线的端点处，

所以所求的最短路径的长度为 $\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，故选 **B.**