

江西省景德镇市重点中学 2023-2024 学年高四复课班第二学期第一次联考数学试题

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型 (B) 填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

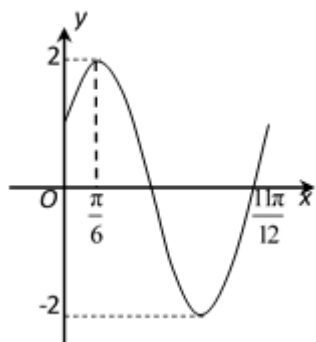
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知某口袋中有 3 个白球和 a 个黑球 ($a \in N^*$)，现从中随机取出一球，再换回一个不同颜色的球 (即若取出的是白球，则放回一个黑球；若取出的是黑球，则放回一个白球)，记换好球后袋中白球的个数是 ξ 。若 $E\xi = 3$ ，则 $D\xi =$

()

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

2. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示，且 $f(a+x) + f(a-x) = 0$ ，则 $|a|$ 的最小值为 ()



- A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$
C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{12}$

3. M 是抛物线 $y^2 = 4x$ 上一点， N 是圆 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 关于直线 $x - y - 1 = 0$ 的对称圆上的一点，则 $|MN|$ 最小值是 ()

- A. $\frac{\sqrt{11}}{2} - 1$ B. $\sqrt{3} - 1$ C. $2\sqrt{2} - 1$ D. $\frac{3}{2}$

4. 已知将函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($0 < \omega < 6, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$

的图象，若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象都关于 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称，则下述四个结论：

- ① $\omega = 3$ ② $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ③ $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ 点 $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$ 为函数 $f(x)$ 的一个对称中心

其中所有正确结论的编号是 ()

- A. ①②③ B. ①③④ C. ①②④ D. ②③④

5. 连接双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 及 $C_2: \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ 的 4 个顶点的四边形面积为 S_1 ，连接 4 个焦点的四边形的面积为

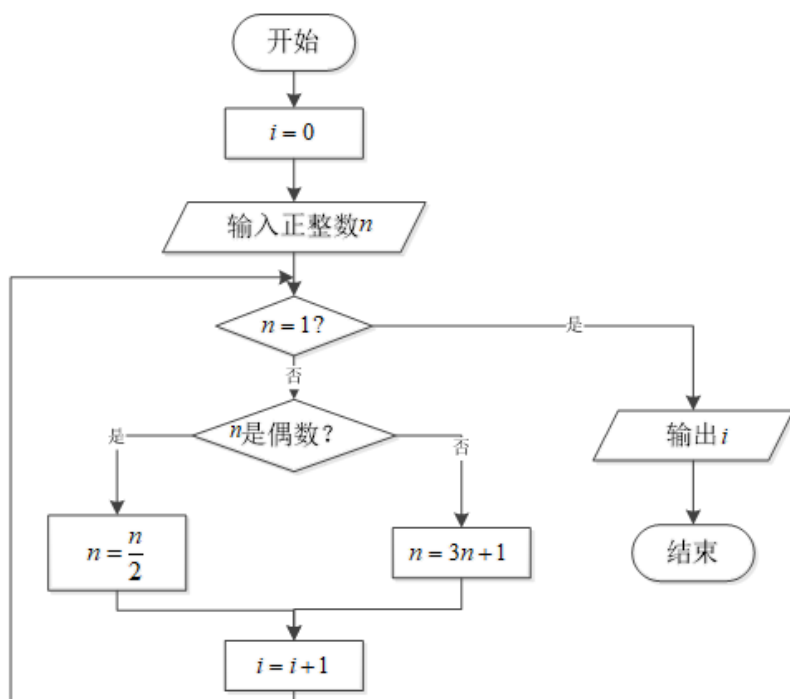
S_2 ，则当 $\frac{S_1}{S_2}$ 取得最大值时，双曲线 C_1 的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{2}$

6. 定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = f(x)$ ，当 $x \in [-3, -2]$ 时， $f(x) = -x - 2$ ，则 ()

- A. $f\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) > f\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)$ B. $f(\sin 3) < f(\cos 3)$
C. $f\left(\sin\frac{4\pi}{3}\right) < f\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right)$ D. $f(2020) > f(2019)$

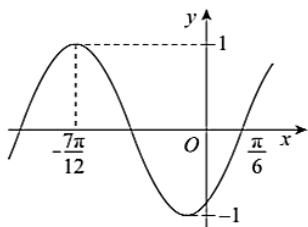
7. 很多关于整数规律的猜想都通俗易懂，吸引了大量的数学家和数学爱好者，有些猜想已经被数学家证明，如“费马大定理”，但大多猜想还未被证明，如“哥德巴赫猜想”、“角谷猜想”。“角谷猜想”的内容是：对于每一个正整数，如果它是奇数，则将它乘以 3 再加 1；如果它是偶数，则将它除以 2；如此循环，最终都能够得到 1. 下图为研究“角谷猜想”的一个程序框图. 若输入 n 的值为 10，则输出 i 的值为 ()



- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

8. 已知函数 $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$ ($A > 0$, $\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$), 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{3\pi}{4}$ 个单位长度, 得到

函数 $g(x)$ 的部分图象如图所示, 则 $f(x) = \frac{1}{3}$ 是 $g\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 的 ()



- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

9. 已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) + 3^{-x} - 3^x$, 不等式 $f(a\sqrt{x^2 + 4}) + f(x^2 + 5) \geq 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则 a 的取值范围为 ()

- A. $[-2, +\infty)$ B. $(-\infty, -2]$ C. $\left[-\frac{5}{2}, +\infty\right)$ D. $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right]$

10. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点都在球 O 的球面上, $PA \perp$ 平面 ABC , $\triangle ABC$ 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形, 若球 O 的表面积为 20π , 则直线 PC 与平面 PAB 所成角的正切值为 ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{\sqrt{7}}{3}$ C. $\frac{3}{7}\sqrt{7}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

11. 设不等式组 $\begin{cases} x-2 \leq 0 \\ x+y \geq 0 \\ x-y \geq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域为 Ω ，在区域 Ω 内任取一点 $P(x, y)$ ，则 P 点的坐标满足不等式

$x^2 + y^2 \leq 2$ 的概率为

- A. $\frac{\pi}{8}$ B. $\frac{\pi}{4}$
C. $\frac{1}{2+\pi}$ D. $\frac{1}{\sqrt{2}+\pi}$

12. 复数 $(a-i)(2-i)$ 的实部与虚部相等，其中 i 为虚部单位，则实数 $a = (\quad)$

- A. 3 B. $-\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. -1

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

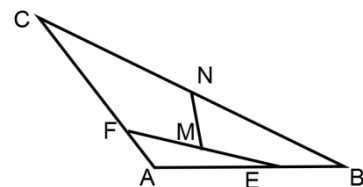
13. 已知 F 为抛物线 $C: x^2 = 8y$ 的焦点， P 为 C 上一点， $M(-4, 3)$ ，则 $\triangle PMF$ 周长的最小值是_____.

14. 已知函数 $f(x) = 4\sin x + \frac{1}{3}x^3$ 在 $x = 0$ 处的切线与直线 $nx - y - 6 = 0$ 平行，则 n 为_____.

15. 在二项式 $(x^2 + 2)^6$ 的展开式中， x^8 的系数为_____.

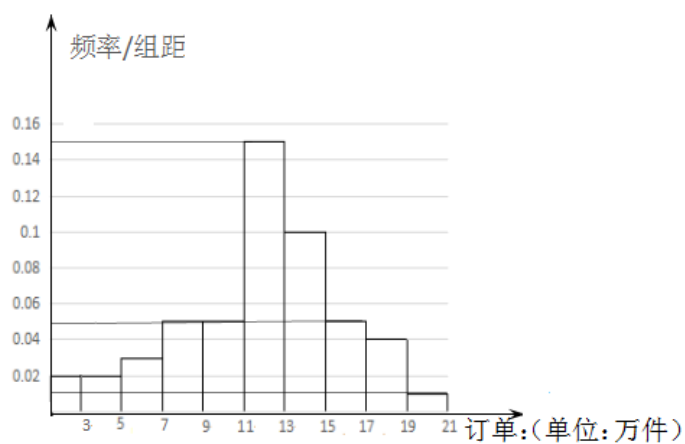
16. 如图，在等腰三角形 ABC 中，已知 $|AB| = |AC| = 1$ ， $\angle A = 120^\circ$ ， E 、 F 分别是边 AB 、 AC 上的点，且

$\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AF} = \mu \overrightarrow{AC}$ ，其中 $\lambda, \mu \in (0, 1)$ 且 $\lambda + 4\mu = 1$ ，若线段 EF 、 BC 的中点分别为 M 、 N ，则 $|\overrightarrow{MN}|$ 的最小值是_____.



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 为了解网络外卖的发展情况，某调查机构从全国各城市中抽取了 100 个相同等级地城市，分别调查了甲乙两家网络外卖平台（以下简称外卖甲、外卖乙）在今年 3 月的订单情况，得到外卖甲该月订单的频率分布直方图，外卖乙该月订单的频数分布表，如下图表所示.



订单：（单位：万件）	[3,5)	[5,7)	[7,9)	[9,11)
频数	1	2	2	3

订单：（单位：万件）	[11,13)	[13,15)	[15,17)	[17,19)	[19,21)
频数	40	20	20	10	2

（1）现规定，月订单不低于 13 万件的城市为“业绩突出城市”，填写下面的列联表，并根据列联表判断是否有 90%的把握认为“是否为业绩突出城市”与“选择网络外卖平台”有关.

	业绩突出城市	业绩不突出城市	总计
外卖甲			
外卖乙			
总计			

（2）由频率分布直方图可以认为，外卖甲今年 3 月在全国各城市的订单数 Z （单位：万件）近似地服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，其中 μ 近似为样本平均数 $\bar{x}$ （同一组数据用该区间的中点值作代表）， σ 的值已求出，约为 3.64，现把频率视为概率，解决下列问题：

- ①从全国各城市中随机抽取 6 个城市，记 X 为外卖甲在今年 3 月订单数位于区间 $(4.88, 15.8)$ 的城市个数，求 X 的数学期望；
- ②外卖甲决定在今年 3 月订单数低于 7 万件的城市开展“订外卖，抢红包”的营销活动来提升业绩，据统计，开展此活动后城市每月外卖订单数将提高到平均每月 9 万件的水平，现从全国各月订单数不超过 7 万件的城市中采用分层抽样的方法选出 100 个城市不开展营销活动，若每按一件外卖订单平均可获纯利润 5 元，但每件外卖平均需送出红包 2 元，则外卖甲在这 100 个城市中开展营销活动将比不开展营销活动每月多盈利多少万元？

附：①参考公式： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a+b+c+d$ 。

参考数据：

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.001
k_0	2.702	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

②若 $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(\mu - \sigma < Z \leq \mu + \sigma) = 0.6826$ ， $P(\mu - 2\sigma < Z \leq \mu + 2\sigma) = 0.9544$ 。

18. (12分) 在直角坐标系 xOy 中，已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \alpha, \\ y = 3 \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数)，以坐标原点为极点， x 轴的正半轴为极轴，建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin \theta + \rho \cos \theta = 6$ 。

(1) 求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程；

(2) 若射线 m 的极坐标方程为 $\theta = \frac{\pi}{3}$ ($\rho \geq 0$)，设 m 与 C 相交于点 M ， m 与 l 相交于点 N ，求 $|MN|$ 。

19. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $P(0, \sqrt{3})$ ，曲线 $C: \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \alpha \\ y = 2 \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数) 以原点为极点， x 轴正半轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\rho \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

(I) 判断点 P 与直线 l 的位置关系并说明理由；

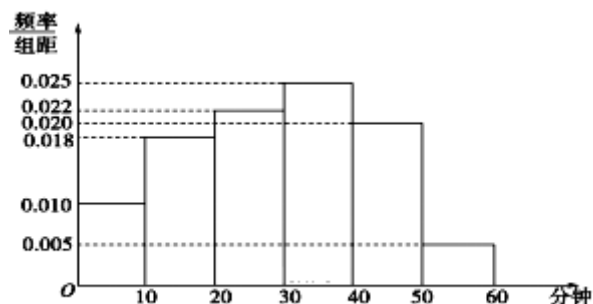
(II) 设直线与曲线 C 的两个交点分别为 A, B ，求 $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|}$ 的值。

20. (12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，直线 l 垂直于 x 轴，垂足为 T ，与抛物线 $y^2 = 4x$ 交于不同的两点 P, Q ，且 $\overrightarrow{F_1P} \cdot \overrightarrow{F_2Q} = -5$ ，过 F_2 的直线 m 与椭圆 C 交于 A, B 两点，设 $\overrightarrow{F_2A} = \lambda \overrightarrow{F_2B}$ ，且 $\lambda \in [-2, -1]$ 。

(1) 求点 T 的坐标；

(2) 求 $\left| \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} \right|$ 的取值范围。

21. (12分) 电视传媒公司为了了解某地区观众对某体育节目的收视情况，随机抽取了 100 名观众进行调查，其中女性有 55 名，下面是根据调查结果绘制的观众日均收看该体育节目时间的频率分布直方图：



将日均收看该体育节目时间不低于 40 分钟的观众称为“体育迷”。

(1)根据已知条件完成下面的列联表，并据此资料你是否认为“体育迷”与性别有关？

	非体育迷	体育迷	合计
男			
女		10	55
合计			

(2)将上述调查所得到的频率视为概率。现在从该地区大量电视观众中，采用随机抽样方法每次抽取 1 名观众，抽取 3 次，记被抽取的 3 名观众中的“体育迷”人数为 X 。若每次抽取的结果是相互独立的，求 X 的分布列，期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 。

附：
$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}.$$

$P(K^2 \geq k)$	0.05	0.01
k	3.841	6.635

22. (10 分) 在极坐标系中，直线 l 的极坐标方程为 $\theta = \frac{\pi}{3} (\rho \in R)$ ，以极点为原点，极轴为 x 轴的正半轴建立平面直角坐标系，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3 \cos \alpha, \\ y = 1 + \cos 2\alpha \end{cases} (\alpha \text{ 为参数})$ ，求直线 l 与曲线 C 的交点 P 的直角坐标。

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

由题意 $\xi = 2$ 或 4 ，则 $D\xi = \frac{1}{2}[(2-3)^2 + (4-3)^2] = 1$ ，故选 B.

2、A

【解析】

a 是函数 $f(x)$ 的零点，根据五点法求出图中零点及 y 轴左边第一个零点可得.

【详解】

由题意 $\frac{3}{4}T = \frac{11\pi}{12} - \frac{\pi}{6}$ ， $T = \pi$ ， $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 y 轴右边的第一个零点为 $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$ ，在 y 轴左边第一个零点是

$$\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12},$$

$\therefore |a|$ 的最小值是 $\frac{\pi}{12}$.

故选：A.

【点睛】

本题考查三角函数的周期性，考查函数的对称性. 函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的零点就是其图象对称中心的横坐标.

3、C

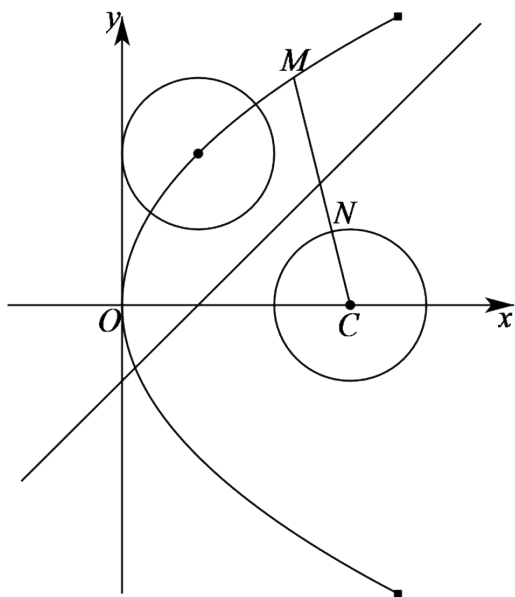
【解析】

求出点 $(1, 2)$ 关于直线 $x - y - 1 = 0$ 的对称点 C 的坐标，进而可得出圆 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 关于直线 $x - y - 1 = 0$ 的

对称圆 C 的方程，利用二次函数的基本性质求出 $|MC|$ 的最小值，由此可得出 $|MN|_{\min} = |MC|_{\min} - 1$ ，即可得解.

【详解】

如下图所示：



设点 $(1, 2)$ 关于直线 $x - y - 1 = 0$ 的对称点为点 $C(a, b)$,

$$\text{则} \begin{cases} \frac{a+1}{2} - \frac{b+2}{2} - 1 = 0 \\ \frac{b-2}{a-1} = -1 \end{cases}, \text{整理得} \begin{cases} a-b-3=0 \\ a+b-3=0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a=3 \\ b=0 \end{cases}, \text{即点 } C(3, 0),$$

所以, 圆 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 关于直线 $x - y - 1 = 0$ 的对称圆 C 的方程为 $(x-3)^2 + y^2 = 1$,

$$\text{设点 } M\left(\frac{y^2}{4}, y\right), \text{ 则 } |MC| = \sqrt{\left(\frac{y^2}{4} - 3\right)^2 + y^2} = \sqrt{\frac{y^4}{16} - \frac{y^2}{2} + 9} = \sqrt{\frac{1}{16}(y^2 - 4)^2 + 8},$$

当 $y = \pm 2$ 时, $|MC|$ 取最小值 $2\sqrt{2}$, 因此, $|MN|_{\min} = |MC|_{\min} - 1 = 2\sqrt{2} - 1$.

故选: C.

【点睛】

本题考查抛物线上一点到圆上一点最值的计算, 同时也考查了两圆关于直线对称性的应用, 考查计算能力, 属于中等题.

4、B

【解析】

首先根据三角函数的平移规则表示出 $g(x)$, 再根据对称性求出 ω 、 φ , 即可求出 $f(x)$ 的解析式, 从而验证可得;

【详解】

$$\text{解: 由题意可得 } g(x) = \sin\left[\omega\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \varphi\right] = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\omega + \varphi\right),$$

$$\text{又} \because f(x) \text{ 和 } g(x) \text{ 的图象都关于 } x = \frac{\pi}{4} \text{ 对称, } \therefore \begin{cases} \frac{\pi}{4}\omega + \varphi = k_1\pi + \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{3}\omega + \varphi = k_2\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (k_1, k_2 \in \mathbf{Z}),$$

$$\therefore \text{解得 } \frac{\pi}{3}\omega = (k_1 - k_2)\pi \quad (k_1, k_2 \in \mathbf{Z}), \text{ 即 } \omega = 3(k_1 - k_2) \quad (k_1, k_2 \in \mathbf{Z}), \text{ 又} \because 0 < \omega < 6, \therefore \omega = 3, \quad \varphi = -\frac{\pi}{4}, \therefore$$

$$f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right), \therefore f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0,$$

$\therefore$ ①③④正确, ②错误.

故选: B

【点睛】

本题考查三角函数的性质的应用, 三角函数的变换规则, 属于基础题.

5、D

【解析】

先求出四个顶点、四个焦点的坐标, 四个顶点构成一个菱形, 求出菱形的面积, 四个焦点构成正方形, 求出其面积,

利用重要不等式求得 $\frac{S_1}{S_2}$ 取得最大值时有 $a = b$, 从而求得其离心率.

【详解】

双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 与 $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ 互为共轭双曲线,

四个顶点的坐标为 $(\pm a, 0), (0, \pm b)$, 四个焦点的坐标为 $(\pm c, 0), (0, \pm c)$,

四个顶点形成的四边形的面积 $S_1 = \frac{1}{2} \times 2a \times 2b = 2ab$,

四个焦点连线形成的四边形的面积 $S_2 = \frac{1}{2} \times 2c \times 2c = 2c^2$,

所以 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2ab}{2c^2} = \frac{ab}{a^2 + b^2} \leq \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2}$,

当 $\frac{S_1}{S_2}$ 取得最大值时有 $a = b$, $c = \sqrt{2}a$, 离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$,

故选: D.

【点睛】

该题考查的是有关双曲线的离心率的问题, 涉及到的知识点有共轭双曲线的顶点, 焦点, 菱形面积公式, 重要不等式求最值, 等轴双曲线的离心率, 属于简单题目.

6、B

【解析】

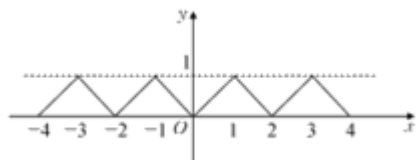
根据函数的周期性以及 $x \in [-3, -2]$ 的解析式，可作出函数 $f(x)$ 在定义域上的图象，由此结合选项判断即可.

【详解】

由 $f(x+2) = f(x)$ ，得 $f(x)$ 是周期函数且周期为 2，

先作出 $f(x)$ 在 $x \in [-3, -2]$ 时的图象，然后根据周期为 2 依次平移，

并结合 $f(x)$ 是偶函数作出 $f(x)$ 在 R 上的图象如下，



选项 A, $0 < \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} < 1$,

所以 $f\left(\sin \frac{\pi}{6}\right) < f\left(\cos \frac{\pi}{6}\right)$ ，选项 A 错误；

选项 B, 因为 $\frac{3\pi}{4} < 3 < \pi$ ，所以 $0 < \sin 3 < \frac{\sqrt{2}}{2} < -\cos 3 < 1$ ，

所以 $f(\sin 3) < f(-\cos 3)$ ，即 $f(\sin 3) < f(\cos 3)$ ，选项 B 正确；

选项 C, $\sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $1 > -\sin \frac{4\pi}{3} > -\cos \frac{4\pi}{3} > 0$ ，

所以 $f\left(-\sin \frac{4\pi}{3}\right) > f\left(-\cos \frac{4\pi}{3}\right)$ ，即 $f\left(\sin \frac{4\pi}{3}\right) > f\left(\cos \frac{4\pi}{3}\right)$ ，

选项 C 错误；

选项 D, $f(2020) = f(0) < f(1) = f(2019)$ ，选项 D 错误.

故选：B.

【点睛】

本题考查函数性质的综合运用，考查函数值的大小比较，考查数形结合思想，属于中档题.

7、B

【解析】

根据程序框图列举出程序的每一步，即可得出输出结果.

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/788033025126007000>