

2023-2024 学年安徽省东至三中高三寒假检测试题数学试题

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 在 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)(2x+1)^3$ 展开式中的常数项为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 7

2. 设函数 $g(x) = e^x + (1 - \sqrt{e})x - a$ ($a \in \mathbb{R}$, e 为自然对数的底数), 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) + f(x) = x^2$,

且当 $x \leq 0$ 时, $f'(x) < x$. 若存在 $x_0 \in \left\{x \mid f(x) + \frac{1}{2} \geq f(1-x) + x\right\}$, 且 x_0 为函数 $y = g(x) - x$ 的一个零点, 则实数

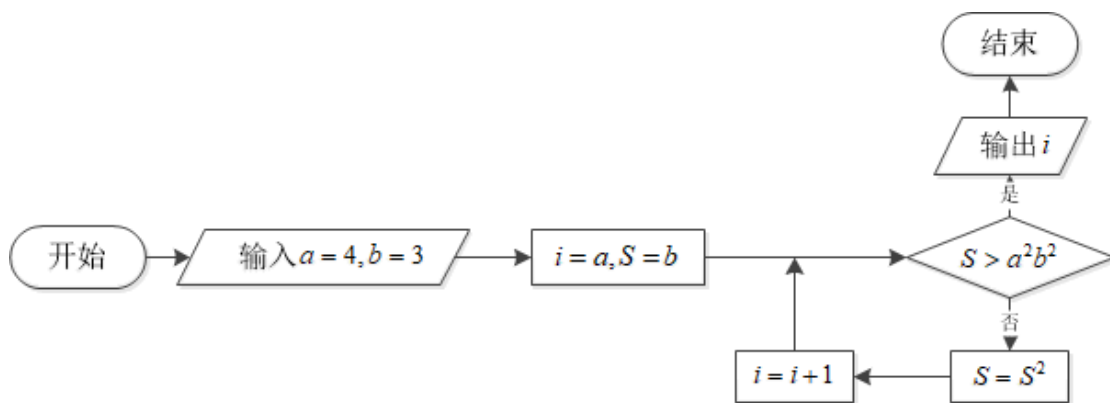
a 的取值范围为 ()

- A. $\left(\frac{\sqrt{e}}{2}, +\infty\right)$ B. $(\sqrt{e}, +\infty)$ C. $[\sqrt{e}, +\infty)$ D. $\left[\frac{\sqrt{e}}{2}, +\infty\right)$

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 d ($d \neq 0$) 的等差数列, 且 a_1, a_3, a_6 成等比数列, 则 $\frac{a_1}{d} =$ ()

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

4. 如图所示的程序框图, 若输入 $a = 4$, $b = 3$, 则输出的结果是 ()



- A. 6 B. 7 C. 5 D. 8

5. 在复平面内, 复数 $\frac{1+i}{(1-i)^2}$ 对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

6. 若 $a \in \mathbb{R}$, 则“ $a = 3$ ”是“ $x(1+ax)^5$ 的展开式中 x^3 项的系数为 90”的 ()

- A. 必要不充分条件 B. 充分不必要条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 已知函数 $f(x) = 3\sin(\omega x + \varphi)$, ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$), 若 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0$, 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒有 $f(x) \leq \left|f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right|$, 在

区间 $\left(\frac{\pi}{15}, \frac{\pi}{5}\right)$ 上有且只有一个 x_1 使 $f(x_1) = 3$, 则 ω 的最大值为 ()

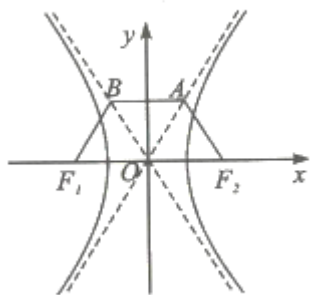
- A. $\frac{123}{4}$ B. $\frac{111}{4}$ C. $\frac{105}{4}$ D. $\frac{117}{4}$

8. 已知集合 $M = \{x | -2 < x < 6\}$, $N = \{x | -3 < x < \log_2 35\}$, 则 $M \cap N =$ ()

- A. $\{x | -2 < x < \log_2 35\}$ B. $\{x | -3 < x < \log_2 35\}$
C. $\{x | -3 < x < 6\}$ D. $\{x | \log_2 35 < x < 6\}$

9. 如图, 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左, 右焦点分别是 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, 直线 $y = \frac{bc}{2a}$ 与双曲线 C 的两

条渐近线分别相交于 A, B 两点. 若 $\angle BF_1F_2 = \frac{\pi}{3}$, 则双曲线 C 的离心率为 ()



- A. 2 B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$
C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$, 若不等式 $f(x) \leq |x - k|$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则实数 k 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 1]$ B. $[1, +\infty)$ C. $[0, 1]$ D. $(-1, 0]$

11. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(1-x) = f(1+x)$, 当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = x - \frac{2}{x}$, 则 $\{x | f(x+2) > 1\} =$ ()

- A. $\{x|x < -3 \text{ 或 } x > 0\}$ B. $\{x|x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$
 C. $\{x|x < -2 \text{ 或 } x > 0\}$ D. $\{x|x < 2 \text{ 或 } x > 4\}$

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0 \\ \log_3 x, & x > 0 \end{cases}$, 则 $f\left(f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\log_3 2$ D. $\log_3 2$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 若以 $N(0, 2)$ 为圆心且与椭圆 C 有公共点的圆的最大半径为 $\sqrt{26}$, 此时椭圆 C 的方程是_____.

14. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线与准线的一个交点坐标为 $(1, \sqrt{3})$, 则双曲线的焦距为_____.

15. 已知 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)(1 - 2x)^7 = \frac{1}{x} + a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_7x^7$, 则 $a_2 =$ _____,

$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_7 =$ _____

16. 某高中共有 1800 人，其中高一、高二、高三年级的人数依次成等差数列，现用分层抽样的方法从中抽取 60 人，那么高二年级被抽取的人数为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = |4x - 1| - |x + 2|$.

(1) 解不等式 $f(x) > 2$;

(2) 记函数 $y = f(x) + 5|x + 2|$ 的最小值为 k , 正实数 a, b 满足 $a + 6b = \frac{k}{9}$, 求证: $\sqrt{\frac{6b+a}{ab}} \geq 2\sqrt{6}$.

18. (12 分) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $2\sin^2 \frac{A-B}{2} + 2\cos^2 \frac{A+B}{2} + 2\cos A \cos B = 1$

(1) 求角 C 的大小

(2) 若 $c = 4, |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| = \sqrt{38}$, 求的周长

19. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$ (t 为参数)，直线 l 与曲线 $C: (x-1)^2 + y^2 = 1$ 交于

A, B 两点.

(1) 求 $|AB|$ 的长;

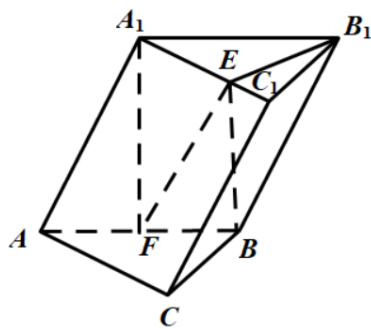
(2) 在以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立的极坐标系中, 设点 P 的极坐标为 $\left(2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$, 求点 P 到线段 AB 中点 M 的距离.

20. (12 分) 已知椭圆 C 的短轴的两个端点分别为 $A(0,1)$ 、 $B(0,-1)$, 焦距为 $2\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 已知直线 $y=m$ 与椭圆 C 有两个不同的交点 M 、 N , 设 D 为直线 AN 上一点, 且直线 BD 、 BM 的斜率的积为 $-\frac{1}{4}$. 证明: 点 D 在 x 轴上.

21. (12 分) 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 平面 $AA_1B_1B \perp$ 平面 ABC , $AB=AA_1=A_1B=4$, $BC=2$, $AC=2\sqrt{3}$, 点 F 为棱 AB 的中点, 点 E 为线段 A_1C_1 上的动点.



(1) 求证: $EF \perp BC$;

(2) 若直线 B_1E 与平面 A_1FC_1 所成角为 60° , 求二面角 $E-BB_1-A_1$ 的正切值.

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = (x+2)\ln(x+1) - ax (a \in \mathbb{R})$

(I) 若 $a=1$, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 若 $f(x) \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(III) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 + 3n - 1$, $b_n = \frac{4}{a_n}$, 求证: 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n < \ln(n+1)(n+2)$.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

求出 $(2x+1)^3$ 展开项中的常数项及含 x 的项，问题得解。

【详解】

$(2x+1)^3$ 展开项中的常数项及含 x 的项分别为：

$$C_3^3(1)^3(2x)^0 = 1, C_3^1(2x)^1 \times 1^2 = 6x,$$

所以 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)(2x+1)^3$ 展开式中的常数项为： $1 \times 1 + \frac{1}{x} \times 6x = 7$ 。

故选：D

【点睛】

本题主要考查了二项式定理中展开式的通项公式及转化思想，考查计算能力，属于基础题。

2、D

【解析】

先构造函数 $T(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$ ，由题意判断出函数 $T(x)$ 的奇偶性，再对函数 $T(x)$ 求导，判断其单调性，进而可求出结果。

【详解】

$$\text{构造函数 } T(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2,$$

$$\text{因为 } f(-x) + f(x) = x^2,$$

$$\text{所以 } T(x) + T(-x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2 + f(-x) - \frac{1}{2}(-x)^2 = f(x) + f(-x) - x^2 = 0,$$

所以 $T(x)$ 为奇函数，

当 $x \leq 0$ 时， $T'(x) = f'(x) - x < 0$ ，所以 $T(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减，

所以 $T(x)$ 在 R 上单调递减。

$$\text{因为存在 } x_0 \in \left\{x \mid f(x) + \frac{1}{2} \geq f(1-x) + x\right\},$$

$$\text{所以 } f(x_0) + \frac{1}{2} \geq f(1-x_0) + x_0,$$

$$\text{所以 } T(x_0) + \frac{1}{2}x_0^2 + \frac{1}{2} \geq T(1-x_0) + \frac{1}{2}(1-x_0)^2 + x_0,$$

化简得 $T(x_0) \geq T(1-x_0)$,

所以 $x_0 \leq 1-x_0$, 即 $x_0 \leq \frac{1}{2}$

令 $h(x) = g(x) - x = e^x - \sqrt{e}x - a \left(x \leq \frac{1}{2} \right)$,

因为 x_0 为函数 $y = g(x) - x$ 的一个零点,

所以 $h(x)$ 在 $x \leq \frac{1}{2}$ 时有一个零点

因为当 $x \leq \frac{1}{2}$ 时, $h'(x) = e^x - \sqrt{e} \leq e^{\frac{1}{2}} - \sqrt{e} = 0$,

所以函数 $h(x)$ 在 $x \leq \frac{1}{2}$ 时单调递减,

由选项知 $a > 0$, $-\frac{a}{\sqrt{e}} < 0 < \frac{1}{2}$,

又因为 $h\left(-\frac{a}{\sqrt{e}}\right) = e^{-\frac{a}{\sqrt{e}}} - \sqrt{e}\left(-\frac{a}{\sqrt{e}}\right) - a = e^{-\frac{a}{\sqrt{e}}} > 0$,

所以要使 $h(x)$ 在 $x \leq \frac{1}{2}$ 时有一个零点,

只需使 $h\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - \frac{1}{2}\sqrt{e} - a \leq 0$, 解得 $a \geq \frac{\sqrt{e}}{2}$,

所以 a 的取值范围为 $\left[\frac{\sqrt{e}}{2}, +\infty\right)$, 故选 D.

【点睛】

本题主要考查函数与方程的综合问题, 难度较大.

3、A

【解析】

根据等差数列和等比数列公式直接计算得到答案.

【详解】

由 a_1, a_3, a_6 成等比数列得 $a_3^2 = a_1 \cdot a_6$, 即 $(a_1 + 2d)^2 = a_1(a_1 + 5d)$, 已知 $d \neq 0$, 解得 $\frac{a_1}{d} = 4$.

故选: A.

【点睛】

本题考查了等差数列, 等比数列的基本量的计算, 意在考查学生的计算能力.

4、B

【解析】

列举出循环的每一步，可得出输出结果.

【详解】

$i=4$ ， $S=3$ ， $S > a^2b^2$ 不成立， $S=3^2=9$ ， $i=4+1=5$ ；

$S > a^2b^2$ 不成立， $S=9^2=81$ ， $i=5+1=6$ ；

$S > a^2b^2$ 不成立， $S=81^2=6561$ ， $i=6+1=7$ ；

$S > a^2b^2$ 成立，输出*i*的值为7.

故选：B.

【点睛】

本题考查利用程序框图计算输出结果，一般要将算法的每一步列举出来，考查计算能力，属于基础题.

5、B

【解析】

化简复数为 $a+bi$ 的形式，然后判断复数的对应点所在象限，即可求得答案.

【详解】

$$\text{Q } \frac{1+i}{(1-i)^2} = \frac{1+i}{-2i} = \frac{(1+i)i}{-2i \cdot i}$$

$$= \frac{-1+i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$\therefore$ 对应的点的坐标为 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 在第二象限

故选：B.

【点睛】

本题主要考查了复数代数形式的乘除运算，考查了复数的代数表示法及其几何意义，属于基础题.

6、B

【解析】

求得 $x(1+ax)^5$ 的二项展开式的通项为 $C_5^k \times a^k \cdot x^{k+1}$ ，令 $k=2$ 时，可得 x^3 项的系数为90，即 $C_5^2 \times a^2=90$ ，求得 a ，即可得出结果.

【详解】

若 $a=3$ 则 $x(1+ax)^5=x(1+3x)^5$ 二项展开式的通项为 $C_5^k \times 3^k \cdot x^{k+1}$ ，令 $k+1=3$ ，即 $k=2$ ，则 x^3 项的系数为

$C_5^2 \times 3^2 = 90$, 充分性成立; 当 $x(1+ax)^5$ 的展开式中 x^3 项的系数为 90, 则有 $C_5^2 \times a^2 = 90$, 从而 $a = \pm 3$, 必要性不成立.

故选: B.

【点睛】

本题考查二项式定理、充分条件、必要条件及充要条件的判断知识, 考查考生的分析问题的能力和计算能力, 难度较易.

7、C

【解析】

根据 $f(x)$ 的零点和最值点列方程组, 求得 ω, φ 的表达式 (用 k 表示), 根据 $f(x_1)$ 在 $\left(\frac{\pi}{15}, \frac{\pi}{5}\right)$ 上有且只有一个最大值,

求得 ω 的取值范围, 求得对应 k 的取值范围, 由 k 为整数对 k 的取值进行验证, 由此求得 ω 的最大值.

【详解】

$$\text{由题意知} \begin{cases} -\frac{\pi}{3}\omega + \varphi = k_1\pi, \\ \frac{\pi}{3}\omega + \varphi = k_2\pi + \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad k_1, k_2 \in Z, \text{ 则 } \begin{cases} \omega = \frac{3(2k+1)}{4}, \\ \varphi = \frac{(2k'+1)\pi}{4}, \end{cases} \quad \text{其中 } k = k_1 - k_2, \quad k' = k_2 + k_1.$$

又 $f(x_1)$ 在 $\left(\frac{\pi}{15}, \frac{\pi}{5}\right)$ 上有且只有一个最大值, 所以 $\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{15} = \frac{2\pi}{15} \leq 2T$, 得 $0 < \omega \leq 30$, 即 $\frac{3(2k+1)}{4} \leq 30$, 所以

$k \leq 19.5$, 又 $k \in Z$, 因此 $k \leq 19$.

$$\text{①当 } k=19 \text{ 时, } \omega = \frac{117}{4}, \text{ 此时取 } \varphi = \frac{3\pi}{4} \text{ 可使 } \begin{cases} -\frac{\pi}{3}\omega + \varphi = k_1\pi, \\ \frac{\pi}{3}\omega + \varphi = k_2\pi + \frac{\pi}{2}, \end{cases} \text{ 成立, 当 } x \in \left(\frac{\pi}{15}, \frac{\pi}{5}\right) \text{ 时,}$$

$\frac{117}{4}x + \frac{3\pi}{4} \in (2.7\pi, 6.6\pi)$, 所以当 $\frac{117}{4}x_1 + \frac{3\pi}{4} = 4.5\pi$ 或 6.5π 时, $f(x_1) = 3$ 都成立, 舍去;

$$\text{②当 } k=18 \text{ 时, } \omega = \frac{111}{4}, \text{ 此时取 } \varphi = \frac{\pi}{4} \text{ 可使 } \begin{cases} -\frac{\pi}{3}\omega + \varphi = k_1\pi, \\ \frac{\pi}{3}\omega + \varphi = k_2\pi + \frac{\pi}{2}, \end{cases} \text{ 成立, 当 } x \in \left(\frac{\pi}{15}, \frac{\pi}{5}\right) \text{ 时, } \frac{111}{4}x + \frac{\pi}{4} \in (2.1\pi, 5.8\pi),$$

所以当 $\frac{111}{4}x_1 + \frac{\pi}{4} = 2.5\pi$ 或 4.5π 时, $f(x_1) = 3$ 都成立, 舍去;

$$\text{③当 } k=17 \text{ 时, } \omega = \frac{105}{4}, \text{ 此时取 } \varphi = \frac{3\pi}{4} \text{ 可使 } \begin{cases} -\frac{\pi}{3}\omega + \varphi = k_1\pi, \\ \frac{\pi}{3}\omega + \varphi = k_2\pi + \frac{\pi}{2}, \end{cases} \text{ 成立, 当 } x \in \left(\frac{\pi}{15}, \frac{\pi}{5}\right) \text{ 时,}$$

$\frac{105}{4}x + \frac{3\pi}{4} \in (2.5\pi, 6\pi)$, 所以当 $\frac{105}{4}x_1 + \frac{3\pi}{4} = 4.5\pi$ 时, $f(x_1) = 3$ 成立;

综上所述 ω 的最大值为 $\frac{105}{4}$.

故选: C

【点睛】

本小题主要考查三角函数的零点和最值, 考查三角函数的性质, 考查化归与转化的数学思想方法, 考查分类讨论的数学思想方法, 属于中档题.

8、A

【解析】

根据对数性质可知 $5 < \log_2 35 < 6$, 再根据集合的交集运算即可求解.

【详解】

$$\because 5 < \log_2 35 < 6,$$

$$\text{集合 } M = \{x \mid -2 < x < 6\},$$

$$\therefore \text{由交集运算可得 } M \cap N = \{x \mid -2 < x < \log_2 35\}.$$

故选: A.

【点睛】

本题考查由对数的性质比较大小, 集合交集的简单运算, 属于基础题.

9、A

【解析】

易得 $B(-\frac{c}{2}, \frac{bc}{2a})$, 过 B 作 x 轴的垂线, 垂足为 T , 在 $\triangle F_1TB$ 中, 利用 $\frac{BT}{F_1T} = \tan \frac{\pi}{3}$ 即可得到 a, b, c 的方程.

【详解】

由已知, 得 $B(-\frac{c}{2}, \frac{bc}{2a})$, 过 B 作 x 轴的垂线, 垂足为 T , 故 $F_1T = \frac{c}{2}$,

$$\text{又 } \angle BF_1F_2 = \frac{\pi}{3}, \text{ 所以 } \frac{BT}{F_1T} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, \text{ 即 } \frac{\frac{bc}{2}}{\frac{c}{2}} = \frac{b}{a} = \sqrt{3},$$

$$\text{所以双曲线 } C \text{ 的离心率 } e = \sqrt{1 + (\frac{b}{a})^2} = 2.$$

故选: A.

【点睛】

本题考查双曲线的离心率问题, 在作双曲线离心率问题时, 最关键的是找到 a, b, c 的方程或不等式, 本题属于容易题.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/788042130111006113>