知识点52 复数的概念及四则运算（P3-15）

知识点53 复数的几何意义（P16-20）

知识点54 复数的三角表示*（P21-25）

01

知识点52 复数的概念及四则运算

教材知识萃取

复数的定义	形如$a+b\mathrm{i}(a,b\in \mathbf{R})$的数叫做复数,其中$a$是复数的实部,$b$是复数的虚部.
复数的分类	对于复数$a+b\mathrm{i}(a,b\in \mathbf{R})$,当且仅当$b=0$时,它是实数;当$b\neq 0$时,它叫做虚数;当$a=0$且$b\neq 0$时,它叫做纯虚数.
复数的模	对于复数$z=a+b\mathrm{i}(a,b\in \mathbf{R})$,复数$z$的模$\vert z\vert=\vert a+b\mathrm{i}\vert=\sqrt{a^2+b^2}$.
共轭复数	$a+b\mathrm{i}$与$c+d\mathrm{i}$共轭$\Leftrightarrow a=c$,且$b=-d(a,b,c,d\in \mathbf{R})$.
复数相等	**注意** 实数能比较大小，虚数不能比较大小.

教材知识萃取

设$z_1=a+b\mathrm{i}$,$z_2=c+d\mathrm{i}$($a,b,c,d\in\mathbf{R}$),则复数的四则运算法则如下表所示.

复数的运算	加减法	$z_1\pm z_2=(a+b\mathrm{i})\pm(c+d\mathrm{i})=(a\pm c)+(b\pm d)\mathrm{i}$.
	乘法	$z_1\cdot z_2=(a+b\mathrm{i})\cdot(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}$.
	除法	$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)\mathrm{i}}{c^2+d^2}$($c+d\mathrm{i}\neq0$).

教材素材变式

1. [人A必修二P80练习第1题变式] $(1+2\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})=$(**A**)

A. $11+2\mathrm{i}$ B. $11+10\mathrm{i}$ C. $-5+10\mathrm{i}$ D. $-5+2\mathrm{i}$

【解析】$(1+2\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})=3-4\mathrm{i}+6\mathrm{i}-8\mathrm{i}^2=11+2\mathrm{i}$. 故选A .

2.[人A必修二P73习题7.1第3题变式，2023全国甲卷（理）]设$a \in \mathbf{R}$，$(a+\mathrm{i})(1-a\mathrm{i})=2$，则$a=$(C)

A.-2　　B.-1　　C.1　　D.2

【解析】$\because (a+\mathrm{i})(1-a\mathrm{i})=a+\mathrm{i}-a^2\mathrm{i}-a\mathrm{i}^2=2a+(1-a^2)\mathrm{i}=2, \therefore 2a=2$且$1-a^2=0$，得$a=1$，故选C.

3. [人A必修二P81习题7.2第4题变式] 若复数z满足$(1+\mathrm{i})^2z=2+\mathrm{i}$，则$\overline{z}=$(**D**)

A.$-\frac{1}{2}-\mathrm{i}$ B.$-\frac{1}{2}+\mathrm{i}$ C.$\frac{1}{2}-\mathrm{i}$ D.$\frac{1}{2}+\mathrm{i}$

【解析】因为$(1+\mathrm{i})^2z=2+\mathrm{i}$，所以$z=\frac{2+\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2}=\frac{2+\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}=\frac{(2+\mathrm{i})\mathrm{i}}{2\mathrm{i}^2}=\frac{1}{2}-\mathrm{i}$，所以$\overline{z}=\frac{1}{2}+\mathrm{i}$.故选D.

4.[人A必修二P94复习参考题7第1（2）题变式,2023新课标Ⅰ卷]已知$z=\frac{1-\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}}$，则$z-\overline{z}=$（ A ）

A.$-\mathrm{i}$ B.i C.0 D.1

【解析】因为$z=\frac{1-\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}}=\frac{(1-\mathrm{i})^2}{2(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=-\frac{1}{2}\mathrm{i}$，所以$\overline{z}=\frac{1}{2}\mathrm{i}$，所以$z-\overline{z}=-\frac{1}{2}\mathrm{i}-\frac{1}{2}\mathrm{i}=-\mathrm{i}$.故选A.

5. [人B必修四P32习题10-1B第6题变式] 若复数$z=a^2-3+2a\mathrm{i}$的实部与虚部互为相反数，则实数a的值为$\underline{1或-3}$.

【解析】 复数$z=a^2-3+2a\mathrm{i}$的实部为a^2-3，虚部为$2a$,则依题意得$a^2-3+2a=0$，解得$a=1$或$a=-3$.

6. [人A必修二P69例1变式] 已知复数$z=m^2-m+(m-1)\mathrm{i}$是纯虚数，其中$m\in\mathbf{R}$，i是虚数单位，则$\frac{1}{z}=$__i__.

【解析】 因为复数$z=m^2-m+(m-1)\mathrm{i}$是纯虚数，其中$m\in\mathbf{R}$，所以$\begin{cases}m^2-m=0,\\ m-1\neq 0,\end{cases}$得$m=0$，所以$z=-\mathrm{i}$，因此，$\frac{1}{z}=\frac{-\mathrm{i}^2}{-\mathrm{i}}=\mathrm{i}$.

7. [人A必修二P95复习参考题7第3，8题变式] 已知i是虚数单位，$z=1+\mathrm{i}-3\mathrm{i}^{2\,023}$，且$z$的共轭复数为$\overline{z}$，则$z\cdot\overline{z}=$__17__.

【解析】 $z=1+\mathrm{i}-3\mathrm{i}^{2\,023}=1+\mathrm{i}-3\mathrm{i}^{4\times 505+3}=1+\mathrm{i}+3\mathrm{i}=1+4\mathrm{i}$，$\therefore\overline{z}=1-4\mathrm{i}$，

$\therefore z\cdot\overline{z}=(1+4\mathrm{i})(1-4\mathrm{i})=1-16\mathrm{i}^2=1+16=17$.

常用结论

（1）$z \cdot \overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$;（2）若$z_1,z_2 \in \mathbf{C}$，则$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$，$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$;（3）$\mathrm{i}^{4n} = 1, \mathrm{i}^{4n+1} = \mathrm{i}, \mathrm{i}^{4n+2} = -1,$

$\mathrm{i}^{4n+3} = -\mathrm{i}, n \in \mathbf{Z}$.

8. [人A必修二P81习题7.2第7题变式] 已知复数$z=1+\mathrm{i}$（i为虚数单位）是关于x的方程$x^2+px+q=0$（p，q为实数）的一个根，则$p+q=$__0__.

【解析】 解法一 由复数$z=1+\mathrm{i}$（i为虚数单位）是关于x的方程$x^2+px+q=0$（p，q为实数）的一个根，知

$(1+\mathrm{i})^2+p(1+\mathrm{i})+q=0$，即$(p+q)+(2+p)\mathrm{i}=0$，由复数相等可得$\begin{cases}p+q=0,\\2+p=0,\end{cases}$故$p+q=0$.

解法二 因为实系数一元二次方程的虚数根共轭成对出现，所以$1-\mathrm{i}$也为方程的一个根，由一元二次方程根与系数的关系得，$1+\mathrm{i}+1-\mathrm{i}=-p=2$，$(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=q=2$，所以$p+q=0$.

变式探究

已知虚数z是关于x的方程$x^2-4x+a=0(a\in\mathbf{R})$的一个根，且$|z|=\sqrt{5}$，则$a=$(D)

A.1　　B.2　　C.4　　D.5

【解析】通解 设$z=m+n\mathrm{i}(m,n\in\mathbf{R}$且$n\neq0)$，代入原方程可得$m^2-n^2-4m+a+(2mn-4n)\mathrm{i}=0$，所以$\begin{cases}m^2-n^2-4m+a=0,\\2mn-4n=0,\end{cases}$得$\begin{cases}-n^2-4+a=0,\\m=2,\end{cases}$因为$|z|=\sqrt{m^2+n^2}=\sqrt{5}$，所以$n^2=1$,则$a=5$.故选D.

秒杀解 因为实系数一元二次方程$x^2-4x+a=0$的虚数根共轭成对出现，所以$a=z\cdot\bar{z}=|z|^2=5$,故选D.

02

知识点53 复数的几何意义