

新疆维吾尔自治区巴音郭楞蒙古自治州和静高级中学 2023-2024 学年高三数学第一学
期期末调研试题

请考生注意:

1. 请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上, 请用 0.5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。
2. 答题前, 认真阅读答题纸上的《注意事项》, 按规定答题。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

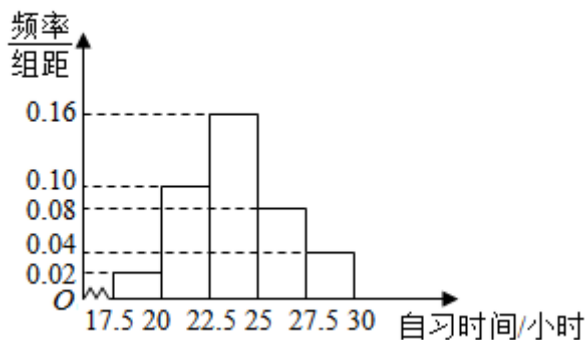
1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$, 集合 $B = \{x | x - 1 \geq 0\}$, 则 $\complement_{\mathbb{R}}(A \cap B) = (\quad)$.

- A. $(-\infty, 1) \cup [3, +\infty)$ B. $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$
C. $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ D. $(1, 3)$

2. 1777 年, 法国科学家蒲丰在宴请客人时, 在地上铺了一张白纸, 上面画着一条条等距离的平行线, 而他给每个客人发许多等质量的, 长度等于相邻两平行线距离的一半的针, 让他们随意投放. 事后, 蒲丰对针落地的位置进行统计, 发现共投针 2212 枚, 与直线相交的有 704 枚. 根据这次统计数据, 若客人随意向这张白纸上投放一根这样的针, 则针落地后与直线相交的概率约为 ()

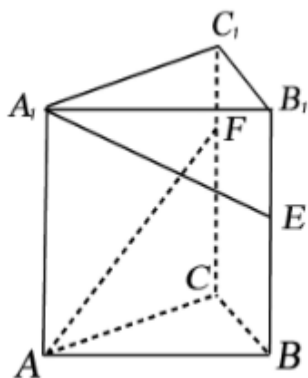
- A. $\frac{1}{2\pi}$ B. $\frac{3}{\pi}$ C. $\frac{2}{\pi}$ D. $\frac{1}{\pi}$

3. 某学校调查了 200 名学生每周的自习时间 (单位: 小时), 制成了如图所示的频率分布直方图, 其中自习时间的范围是 $[17.5, 30]$, 样本数据分组为 $[17.5, 20)$, $[20, 22.5)$, $[22.5, 25)$, $[25, 27.5)$, $[27.5, 30]$. 根据直方图, 这 200 名学生中每周的自习时间不少于 22.5 小时的人数是 ()



- A. 56 B. 60 C. 140 D. 120

4. 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 底面为正三角形, 侧棱垂直底面, $AB = 4$, $AA_1 = 8$. 若 E, F 分别是棱 BB_1, CC_1 上的点, 且 $BE = B_1E$, $C_1F = \frac{1}{4}CC_1$, 则异面直线 A_1E 与 AF 所成角的余弦值为 ()



- A. $\frac{\sqrt{2}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{26}}{13}$ C. $\frac{\sqrt{13}}{13}$ D. $\frac{\sqrt{13}}{10}$

5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 0 \\ |\ln x|, & x > 0 \end{cases}$, 则方程 $f[f(x)] = 3$ 的实数根的个数是 ()

- A. 6 B. 3 C. 4 D. 5

6. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 + ax, & x \geq 0 \end{cases}$, 若函数 $y = f(x) - ax - b$ 恰有三个零点, 则 ()

- A. $a < -1, b < 0$ B. $a < -1, b > 0$
C. $a > -1, b < 0$ D. $a > -1, b > 0$

7. 宁波古圣王阳明的《传习录》专门讲过易经八卦图, 下图是易经八卦图 (含乾、坤、巽、震、坎、离、艮、兑八卦), 每一卦由三根线组成 (“—”表示一根阳线, “——”表示一根阴线). 从八卦中任取两卦, 这两卦的六根线中恰有四根阴线的概率为 ()



- A. $\frac{5}{14}$ B. $\frac{3}{14}$ C. $\frac{3}{28}$ D. $\frac{5}{28}$

8. 已知命题 p : $m = 1$ 是“直线 $x - my = 0$ 和直线 $x + my = 0$ 互相垂直”的充要条件; 命题 q : 对任意

$a \in \mathbf{R}, f(x) = x^2 + a$ 都有零点; 则下列命题为真命题的是 ()

- A. $(\neg p) \wedge (\neg q)$ B. $p \wedge (\neg q)$ C. $p \vee q$ D. $p \wedge q$

9. 已知平面 $ABCD \perp$ 平面 $ADEF$, $AB \perp AD$, $CD \perp AD$, 且 $AB = 3$, $AD = CD = 6$, $ADEF$ 是正方形, 在正方形 $ADEF$ 内部有一点 M , 满足 MB, MC 与平面 $ADEF$ 所成的角相等, 则点 M 的轨迹长度为 ()

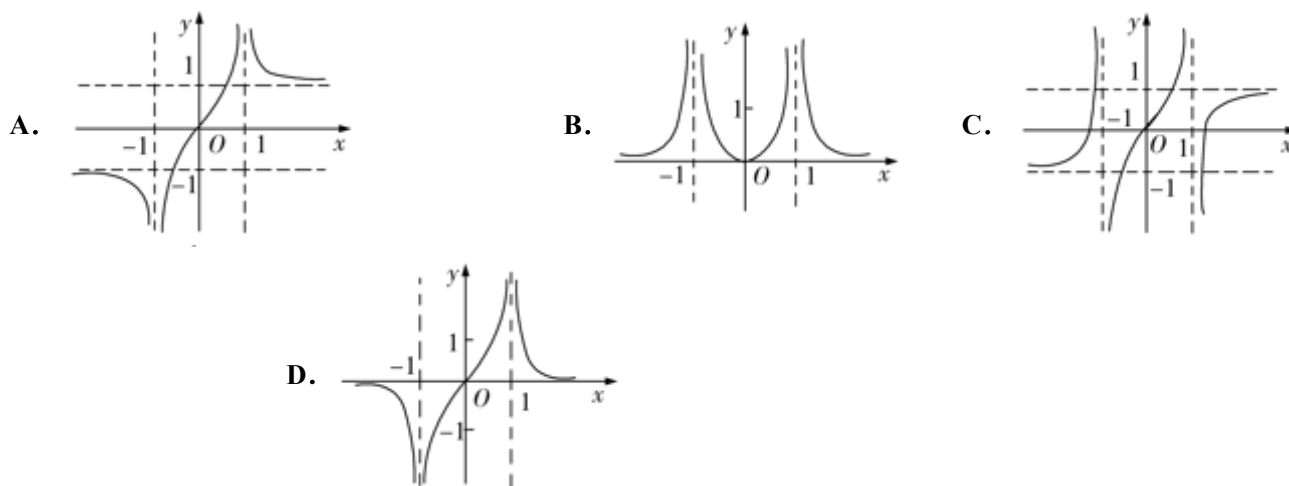
- A. $\frac{4}{3}$ B. 16 C. $\frac{4}{3}\pi$ D. 8π

10. 已知三棱柱

$ABC - A_1B_1C_1$ 的 6 个顶点都在球 O 的球面上. 若 $AB = 3$, $AC = 4$, $AB \perp AC$, $AA_1 = 12$, 则球 O 的半径为 ()

- A. $\frac{3\sqrt{17}}{2}$ B. $2\sqrt{10}$ C. $\frac{13}{2}$ D. $3\sqrt{10}$

11. 函数 $f(x) = \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$ 的图象大致为



12. 关于函数 $f(x) = 4 \left| \sin \left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} \right) \right| + 4 \left| \cos \left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} \right) \right|$, 有下述三个结论:

- ① 函数 $f(x)$ 的一个周期为 $\frac{\pi}{2}$;
- ② 函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right]$ 上单调递增;
- ③ 函数 $f(x)$ 的值域为 $[4, 4\sqrt{2}]$.

其中所有正确结论的编号是 ()

- A. ①② B. ② C. ②③ D. ③

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 满足 $a_1 = 2$, $3S_n = (n+m)a_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{R}$), 且

$a_n b_n = n+1$. 若任意 $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \leq T_{2n} - T_n$ 成立, 则实数 λ 的取值范围为_____.

14. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 若顶点到渐近线的距离为 1, 则双曲线方程为_____.

15. $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^5$ 的展开式中 x^4 项的系数为_____.

16. 若复数 Z 满足 $(1-2i)Z = -\frac{1}{2}(2+i)$, 其中 i 为虚数单位, 则 Z 的共轭复数在复平面内对应点的坐标为_____.

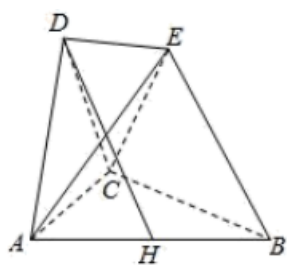
三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 已知中心在原点 O 的椭圆 C 的左焦点为 $F_1(-1, 0)$, C 与 y 轴正半轴交点为 A , 且 $\angle AF_1O = \frac{\pi}{3}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 过点 A 作斜率为 k_1 、 k_2 ($k_1 k_2 \neq 0$) 的两条直线分别交 C 于异于点 A 的两点 M 、 N . 证明: 当 $k_2 = \frac{k_1}{k_1 - 1}$ 时, 直线 MN 过定点.

18. (12 分) 如图, 空间几何体 $ABCDE$ 中, $\triangle ACD$ 是边长为 2 的等边三角形, $EB = EC = \sqrt{6}$, $BC = 2\sqrt{3}$, $\angle ACB = 90^\circ$, 平面 $ACD \perp$ 平面 ABC , 且平面 $EBC \perp$ 平面 ABC , H 为 AB 中点.



(1) 证明: $DH \parallel$ 平面 BCE ;

(2) 求二面角 $E-AB-C$ 平面角的余弦值.

19. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n + 2^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 其前 n 项和为 S_n .

(1) 通过计算 $\frac{a_1}{2^0}$, $\frac{a_2}{2^1}$, $\frac{a_3}{2^2}$, 猜想并证明数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 1$, $b_{n+1} = \frac{n}{n+2}b_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $c_n = S_n \left(b_n - \frac{t}{n}\right)$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 若数列 $\{c_n\}$ 是单调递减数列,

求常数 t 的取值范围.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - (a-1)x - \ln x$ ($a \in \mathbb{R}, a \neq 0$)

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间

(2) 记函数 $y = F(x)$ 的图象为曲线 C , 设点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 是曲线 C 上不同两点, 如果在曲线 C 上存在点

$M(x_0, y_0)$, 使得① $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$; ② 曲线 C 在点 M 处的切线平行于直线 AB , 则称函数存在“中值和谐切线”, 当 $a = 2$

时, 函数 $f(x)$ 是否存在“中值和谐切线”请说明理由

21. (12 分) 某精密仪器生产车间每天生产 n 个零件, 质检员小张每天都会随机地从中抽取 50 个零件进行检查是否合格, 若较多零件不合格, 则需对其余所有零件进行检查. 根据多年的生产数据和经验, 这些零件的长度服从正态分布 $N(10, 0.1^2)$ (单位: 微米 μm), 且相互独立. 若零件的长度 d 满足 $9.7\mu m < d < 10.3\mu m$, 则认为该零件是合格的, 否则该零件不合格.

(1) 假设某一天小张抽查出不合格的零件数为 X , 求 $P(X \geq 2)$ 及 X 的数学期望 EX ;

(2) 小张某天恰好从 50 个零件中检查出 2 个不合格的零件, 若以此频率作为当天生产零件的不合格率. 已知检查一个零件的成本为 10 元, 而每个不合格零件流入市场带来的损失为 260 元. 假设 n 充分大, 为了使损失尽量小, 小张是否需要检查其余所有零件, 试说明理由.

附: 若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则

$$P(\mu - 3\sigma < \xi < \mu + 3\sigma) = 0.9987, 0.9987^{50} = 0.9370, 0.9987^{49} \times 0.0013 = 0.0012.$$

22. (10 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 其中 $a < c$, $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} = \frac{-\cos(B+C)}{\sin C \cos C}$.

(1) 求角 C 的值;

(2) 若 $c = 45$, $a = 27\sqrt{2}$, D 为 AC 边上的任意一点, 求 $AD + 2BD$ 的最小值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、A

【解析】

算出集合 A, B 及 $A \cap B$, 再求补集即可.

【详解】

由 $x^2 - 2x - 3 < 0$, 得 $-1 < x < 3$, 所以 $A = \{x | -1 < x < 3\}$, 又 $B = \{x | x \geq 1\}$,

所以 $A \cap B = \{x | 1 \leq x < 3\}$, 故 $\complement_{\mathbb{R}}(A \cap B) = \{x | x < 1 \text{ 或 } x \geq 3\}$.

故选：A.

【点睛】

本题考查集合的交集、补集运算，考查学生的基本运算能力，是一道基础题.

2、D

【解析】

根据统计数据，求出频率，用以估计概率.

【详解】

$$\frac{704}{2212} \approx \frac{1}{\pi}.$$

故选:D.

【点睛】

本题以数学文化为背景，考查利用频率估计概率，属于基础题.

3、C

【解析】

试题分析：由题意得，自习时间不少于 22.5 小时的频率为 $(0.16 + 0.08 + 0.04) \times 2.5 = 0.7$ ，故自习时间不少于 22.5 小时的频率为 $0.7 \times 200 = 140$ ，故选 C.

考点：频率分布直方图及其应用.

4、B

【解析】

建立空间直角坐标系，利用向量法计算出异面直线 A_1E 与 AF 所成角的余弦值.

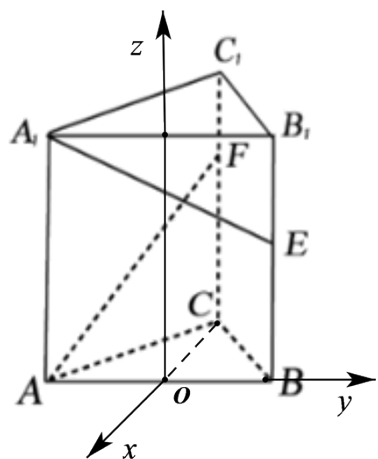
【详解】

依题意三棱柱底面是正三角形且侧棱垂直于底面.设 AB 的中点为 O ，建立空间直角坐标系如下图所示.所以

$A_1(0, -2, 8), E(0, 2, 4), A(0, -2, 0), F(-2\sqrt{3}, 0, 6)$ ，所以 $\overrightarrow{A_1E} = (0, 4, -4), \overrightarrow{AF} = (-2\sqrt{3}, 2, 6)$.所以异面直线 A_1E 与

$$AF \text{ 所成角的余弦值为 } \left| \frac{\overrightarrow{A_1E} \cdot \overrightarrow{AF}}{|\overrightarrow{A_1E}| \cdot |\overrightarrow{AF}|} \right| = \left| \frac{8 - 24}{4\sqrt{2} \times 2\sqrt{13}} \right| = \frac{\sqrt{26}}{13}.$$

故选：B



【点睛】

本小题主要考查异面直线所成的角的求法，属于中档题.

5、D

【解析】

画出函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 0 \\ |\ln x|, & x > 0 \end{cases}$,将方程 $f[f(x)] = 3$ 看作 $t = f(x), f(t) = 3$ 交点个数，运用图象判断根的个数.

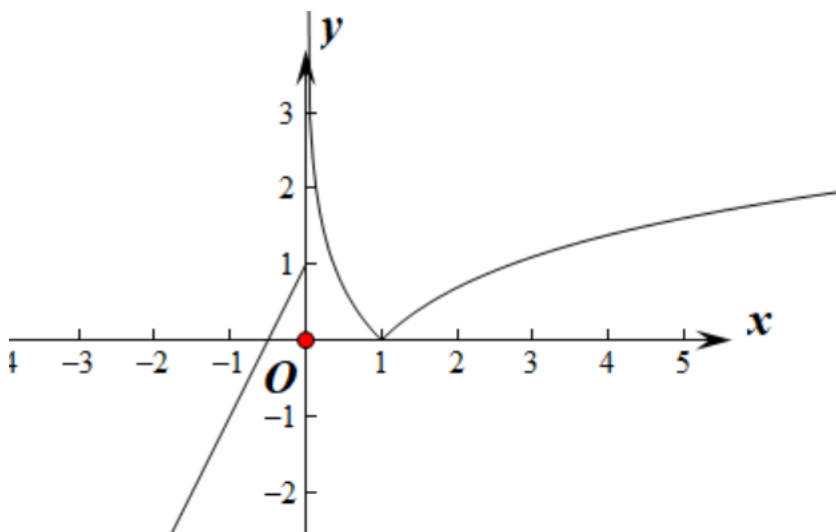
【详解】

画出函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 0 \\ |\ln x|, & x > 0 \end{cases}$

令 $t = f(x)$, $\therefore f(t) = 3$ 有两解 $t_1 \in (0, 1), t_2 \in (1, +\infty)$, 则 $t_1 = f(x), f(x) = t_2$ 分别有 3 个, 2 个解, 故方程

$f[f(x)] = 3$ 的实数根的个数是 $3+2=5$ 个

故选：D



【点睛】

本题综合考查了函数的图象的运用，分类思想的运用，数学结合的思想判断方程的根，难度较大，属于中档题.

6、C

【解析】

当 $x < 0$ 时, $y = f(x) - ax - b = x - ax - b = (1-a)x - b$ 最多一个零点; 当 $x \geq 0$ 时,

$y = f(x) - ax - b = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 + ax - ax - b = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 - b$, 利用导数研究函数的单调性, 根据单调性画函数草图, 根据草图可得.

【详解】

当 $x < 0$ 时, $y = f(x) - ax - b = x - ax - b = (1-a)x - b = 0$, 得 $x = \frac{b}{1-a}$; $y = f(x) - ax - b$ 最多一个零点;

当 $x \geq 0$ 时, $y = f(x) - ax - b = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 + ax - ax - b = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 - b$,

$$y' = x^2 - (a+1)x,$$

当 $a+1 \leq 0$, 即 $a \leq -1$ 时, $y' \geq 0$, $y = f(x) - ax - b$ 在 $[0, +\infty)$ 上递增, $y = f(x) - ax - b$ 最多一个零点. 不合题意

当 $a+1 > 0$, 即 $a > -1$ 时, 令 $y' > 0$ 得 $x \in [a+1, +\infty)$, 函数递增, 令 $y' < 0$ 得 $x \in [0, a+1)$, 函数递减; 函数最多有 2 个零点;

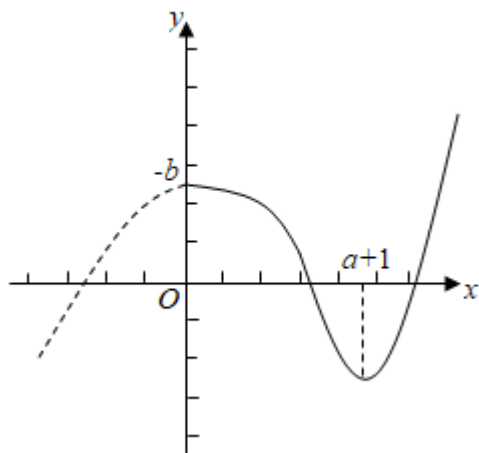
根据题意函数 $y = f(x) - ax - b$ 恰有 3 个零点 $\Leftrightarrow$ 函数 $y = f(x) - ax - b$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有一个零点, 在 $[0, +\infty)$ 上有 2 个零点,

如图:

$$\therefore \frac{b}{1-a} < 0 \text{ 且 } \begin{cases} -b > 0 \\ \frac{1}{3}(a+1)^3 - \frac{1}{2}(a+1)(a+1)^2 - b < 0 \end{cases},$$

解得 $b < 0$, $1-a > 0$, $0 > b > -\frac{1}{6}(a+1)^3$, $\therefore a > -1$.

故选 C.



【点睛】

遇到此类问题，不少考生会一筹莫展.由于方程中涉及 a, b 两个参数，故按“一元化”想法，逐步分类讨论，这一过程中有可能分类不全面、不彻底.

7、B

【解析】

根据古典概型的概率求法，先得到从八卦中任取两卦基本事件的总数，再找出这两卦的六根线中恰有四根阴线的基本事件数，代入公式求解.

【详解】

从八卦中任取两卦基本事件的总数 $n = C_8^2 = 28$ 种，

这两卦的六根线中恰有四根阴线的基本事件数有 6 种，

分别是（巽，坤），（兑，坤），（离，坤），（震，艮），（震，坎），（坎，艮），

所以这两卦的六根线中恰有四根阴线的概率是 $p = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$.

故选：B

【点睛】

本题主要考查古典概型的概率，还考查了运算求解的能力，属于基础题.

8、A

【解析】

先分别判断每一个命题的真假，再利用复合命题的真假判断确定答案即可.

【详解】

当 $m = 1$ 时，直线 $x - my = 0$ 和直线 $x + my = 0$ ，即直线为 $x - y = 0$ 和直线 $x + y = 0$ 互相垂直，

所以“ $m = 1$ ”是直线 $x - my = 0$ 和直线 $x + my = 0$ 互相垂直“的充分条件，

当直线 $x - my = 0$ 和直线 $x + my = 0$ 互相垂直时， $m^2 = 1$ ，解得 $m = \pm 1$.

所以“ $m = 1$ ”是直线 $x - my = 0$ 和直线 $x + my = 0$ 互相垂直“的不必要条件.

p ：“ $m = 1$ ”是直线 $x - my = 0$ 和直线 $x + my = 0$ 互相垂直“的充分不必要条件，故 p 是假命题.

当 $a = 1$ 时， $f(x) = x^2 + 1$ 没有零点，

所以命题 q 是假命题.

所以 $(\neg p) \wedge (\neg q)$ 是真命题， $p \wedge (\neg q)$ 是假命题， $p \vee q$ 是假命题， $p \wedge q$ 是假命题.

故选：A.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/788072064007006051>