山东省青岛即墨区2024届高三下学期第一次诊断考试数学试题

考生请注意：

1．答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。

2．第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。

3．考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知双曲线 **C**：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的焦距为8，一条渐近线方程为 $y=\sqrt{3}x$，则 **C** 为（　　）

A．$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$　　B．$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$

C．$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{48}=1$　　D．$\frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{16}=1$

2．已知复数 z 满足 $i\cdot z=2+i$，则 z 的共轭复数是（）

A．$-1-2i$　　B．$-1+2i$　　C．$1-2i$　　D．$1+2i$

3．在直角坐标系中，已知 **A**（1，0），**B**（4，0），若直线 $x+my-1=0$ 上存在点 **P**，使得 $|PA|=2|PB|$，则正实数 **m** 的最小值是(　　)

A．$\frac{1}{3}$　　B．3　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\sqrt{3}$

4．已知函数 $f(x)=\ln x+1$，$g(x)=2e^{x-\frac{1}{2}}$，若 $f(m)=g(n)$ 成立，则 $m-n$ 的最小值是（　　）

A．$\frac{1}{2}+\ln 2$　　B．$e-2$　　C．$\ln 2-\frac{1}{2}$　　D．$\sqrt{e}-\frac{1}{2}$

5．已知点 $A(2,0)$、$B(0,-2)$．若点 P 在函数 $y=\sqrt{x}$ 的图象上，则使得 $\triangle PAB$ 的面积为 2 的点 P 的个数为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

6．设 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是非零向量，若对于任意的 $\lambda\in R$，都有 $|\vec{a}-\vec{b}|\le|\vec{a}-\lambda\vec{b}|$ 成立，则

A．$a//b$　　B．$\vec{a}\perp\vec{b}$　　C．$(\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{a}$　　D．$(\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{b}$

7．设 $a,b\in R,i$ 是虚数单位，则“复数 $z=a+bi$ 为纯虚数”是“$ab=0$”的（　　）

A．充要条件　　B．必要不充分条件

C．既不充分也不必要条件　　D．充分不必要条件

8．已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)-1$（$\omega>0$，$0<\varphi<\pi$）的一个零点是 $\frac{\pi}{3}$，函数 $y=f(x)$

图象的一条对称轴是直线 $x=-\frac{\pi}{6}$，则当 ω 取得最小值时，函数 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间是（　　）

A．$\left[3k\pi-\frac{\pi}{3},3k\pi-\frac{\pi}{6}\right]$（$k\in\mathbf{Z}$）　　B．$\left[3k\pi-\frac{5\pi}{3},3k\pi-\frac{\pi}{6}\right]$（$k\in\mathbf{Z}$）

C．$\left[2k\pi-\frac{2\pi}{3},2k\pi-\frac{\pi}{6}\right]$（$k\in\mathbf{Z}$）　　D．$\left[2k\pi-\frac{\pi}{3},2k\pi-\frac{\pi}{6}\right]$（$k\in\mathbf{Z}$）

9．若复数 $m(m-2)+(m^2-3m+2)i$ 是纯虚数，则实数 m 的值为( )

A．0 或 2　　B．2　　C．0　　D．1 或 2

10．已知复数 z 在复平面内对应的点的坐标为 $(-1,2)$，则下列结论正确的是（　　）

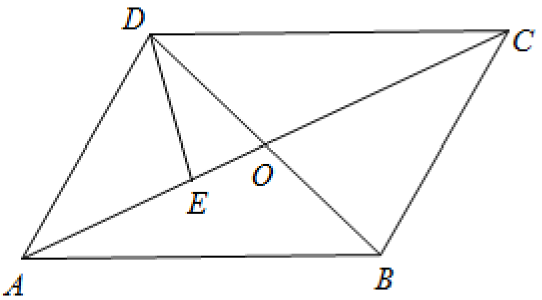
A．$z\cdot i=2-i$　　B．复数 z 的共轭复数是 $1-2i$

C．$|z|=5$　　D．$\frac{z}{1+i}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

11．已知平面向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，且 $(\sqrt{2}\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{b}$，则 $\vec{a},\vec{b}$ 所夹的锐角为（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{4}$　　C．$\frac{\pi}{3}$　　D．0

12．如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 交于点 O，且 $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EO}$，则 $\overrightarrow{ED}=$（　　）



A．$\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$　　B．$\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

C．$\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$　　D．$\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．给出以下式子：

①tan25°+tan35°$+\sqrt{3}$ tan25°tan35°；

②2(sin35°cos25°+cos35°cos65°)；

③$\frac{1+tan15°}{1-tan15°}$

其中，结果为 $\sqrt{3}$ 的式子的序号是_____.

14．（5 分）有一道描述有关等差与等比数列的问题:有四个和尚在做法事之前按身高从低到高站成一列，已知前三个和尚的身高依次成等差数列，后三个和尚的身高依次成等比数列，且前三个和尚的身高之和为450 cm，中间两个和尚的身高之和为315 cm，则最高的和尚的身高是____________ cm．

15．将函数$f(x)=\sin 2x$的图像向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位，得到函数$g(x)$的图像，则函数$y=f(x)-g(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的值域为__________．

16．在ΔABC中，内角A，B，C的对边分别是a，b，c，且$c^2=a^2+b^2-\sqrt{2}ab$，$a=8$，$\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{3}$，则$c=$_______．

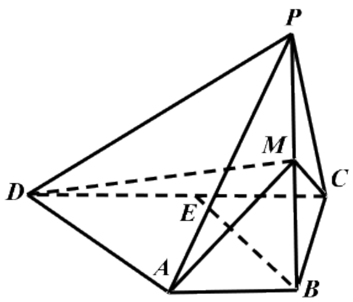
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t\\y=1-\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，圆 C 的极坐标方程为$\rho^2-4\rho\cos\theta=3$．

（1）求直线 l 的普通方程和圆 C 的直角坐标方程；

（2）直线 l 与圆 C 交于 A，B 两点，点 $P(2,1)$，求$|PA|\cdot|PB|$的值.

18．（12 分）如图，四棱锥$P-ABCD$的底面为直角梯形$AB//DC$，$\angle ABC=90°$，$AB=BC=1$，$CD=2$，$PC\perp$底面$ABCD$，且$PC=\sqrt{2}$，E为CD的中点.



（1）证明：$BE\perp AP$；

（2）设点M是线段BP上的动点，当直线AM与直线DP所成的角最小时，求三棱锥$P-CDM$的体积.

19．（12 分）古人云：“腹有诗书气自华.”为响应全民阅读，建设书香中国，校园读书活动的热潮正在兴起.某校为统计学生一周课外读书的时间，从全校学生中随机抽取n名学生进行问卷调查，统计了他们一周课外读书时间（单位：h）的数据如下：

一周课外读书时间/h	$(0,2]$	$(2,4]$	$(4,6]$	$(6,8]$	$(8,10]$	$(10,12]$	$(12,14]$	$(14,16]$	$(16,18]$	合计
频数	**4**	**6**	**10**	**12**	**14**	**24**	a	**46**	**34**	n
频率	**0.02**	**0.03**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.12**	**0.25**	p	**0.17**	**1**

（1）根据表格中提供的数据，求 a， p， n 的值并估算一周课外读书时间的中位数.

（2）如果读书时间按 $(0,6]$，$(6,12]$，$(12,18]$ 分组，用分层抽样的方法从 n 名学生中抽取 20 人.

①求每层应抽取的人数；

②若从 $(0,6]$，$(6,12]$ 中抽出的学生中再随机选取 2 人，求这 2 人不在同一层的概率.

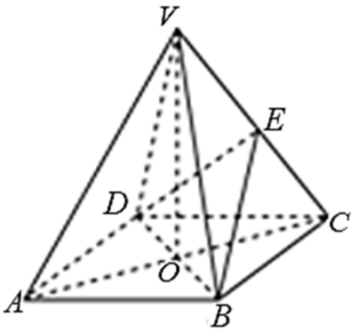
20.（12 分）函数 $f(x)=ax-\ln(x+1),g(x)=\sin x$，且 $f(x)\geq 0$ 恒成立.

（1）求实数 a 的集合 M；

（2）当 $a\in M$ 时，判断 $f(x)$ 图象与 $g(x)$ 图象的交点个数，并证明.

（参考数据：$\ln 2\approx 0.69,e^{\frac{x}{2}-1}\approx 1.77$）

21.（12 分）如图，四棱锥 ***V*- *ABCD*** 中，底面 ***ABCD*** 是菱形，对角线 ***AC*** 与 ***BD*** 交于点 ***O***，***VO***⊥平面 ***ABCD***，***E*** 是棱 ***VC*** 的中点.



（1）求证：***VA***∥平面 ***BDE***；

（2）求证：平面 ***VAC***⊥平面 ***BDE***.

22.（10 分）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，直线 l 垂直于 x 轴，垂足为 T，与抛物线 $y^2=4x$ 交于不同的两点 P,Q，且 $\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_2Q}=-5$，过 F_2 的直线 m 与椭圆 C 交于 A,B 两点，设 $\overrightarrow{F_2A}=\lambda\overrightarrow{F_2B}$，且 $\lambda\in[-2,-1]$.

（1）求点 T 的坐标；

（2）求 $\left|\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}\right|$ 的取值范围.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、**A**

【解析】

由题意求得 c 与 $\frac{b}{a}$ 的值，结合隐含条件列式求得 a^2，b^2，则答案可求.

【详解】

由题意，$2c=8$，则 $c=4$，

又 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，且 $a^2+b^2=c^2$，

解得 $a^2=4$，$b^2=12$.

∴双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$.

故选：A.

【点睛】

本题考查双曲线的简单性质，属于基础题.

2、**D**

【解析】

两边同乘$-i$，化简即可得出答案.

【详解】

$i\cdot z=2+i$ 两边同乘$-i$ 得 $z=1-2i$,共轭复数为 $1+2i$，选 D.

【点睛】

$z=a+bi(a,b\in R)$ 的共轭复数为 $\overline{z}=a-bi$

3、**D**

【解析】

设点 $P(1-my,y)$，由 $|PA|=2|PB|$，得关于 y 的方程.由题意，该方程有解，则 $\Delta\geq 0$，求出正实数 m 的取值范围，即求正实数 m 的最小值.

【详解】

由题意，设点$P\left(1-my,y\right)$.

$\because\left|PA\right|=2\left|PB\right|,\therefore\left|PA\right|^2=4\left|PB\right|^2$，

即$\left(1-my-1\right)^2+y^2=4\left[\left(1-my-4\right)^2+y^2\right]$，

整理得$\left(m^2+1\right)y^2+8my+12=0$，

则$\Delta=\left(8m\right)^2-4\left(m^2+1\right)\times12\geq0$，解得$m\geq\sqrt{3}$或$m\leq-\sqrt{3}$.

$\because m>0,\therefore m\geq\sqrt{3},\therefore m_{\min}=\sqrt{3}$.

故选：D.

【点睛】

本题考查直线与方程，考查平面内两点间距离公式，属于中档题.

4、**A**

【解析】

分析：设$f(m)=g(n)=t$，则$t>0$，把m,n用t表示，然后令$h(t)=m-n$，由导数求得$h(t)$的最小值.

详解：设$f(m)=g(n)=t$，则$t>0$，$m=e^{t-1}$，$n=\ln\frac{t}{2}+\frac{1}{2}=\ln t-\ln2+\frac{1}{2}$，

$\therefore m-n=e^{t-1}-\ln t+\ln2-\frac{1}{2}$，令$h(t)=e^{t-1}-\ln t+\ln2-\frac{1}{2}$，

则$h'(t)=e^{t-1}-\frac{1}{t}$，$h''(t)=e^{t-1}+\frac{1}{t^2}>0$，$\therefore h'(t)$是$(0,+\infty)$上的增函数，

又$h'(1)=0$，$\therefore$当$t\in(0,1)$时，$h'(t)<0$，当$t\in(1,+\infty)$时，$h'(t)>0$，

即$h(t)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，$h(1)$是极小值也是最小值，

$h(1)=\frac{1}{2}+\ln2$，$\therefore m-n$的最小值是$\frac{1}{2}+\ln2$.

故选 **A**.

点睛: 本题易错选 **B**，利用导数法求函数的最值，解题时学生可能不会将其中求$b-a$的最小值问题，通过构造新函数，转化为求函数$h(t)$的最小值问题，另外通过二次求导，确定函数的单调区间也很容易出错.

5、**C**

【解析】

设出点P的坐标，以AB为底结合$\triangle PAB$的面积计算出点P到直线AB的距离，利用点到直线的距离公式可得出关于a的方程，求出方程的解，即可得出结论.

【详解】

设点 P 的坐标为 $\left(a,\sqrt{a}\right)$，直线 AB 的方程为 $\frac{x}{2}-\frac{y}{2}=1$，即 $x-y-2=0$，

设点 P 到直线 AB 的距离为 d，则 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times d=2$，解得 $d=\sqrt{2}$，

另一方面，由点到直线的距离公式得 $d=\frac{\left|a-\sqrt{a}-2\right|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

整理得 $a-\sqrt{a}=0$ 或 $a-\sqrt{a}-4=0$，$\because a\geq 0$，解得 $a=0$ 或 $a=1$ 或 $a=\frac{9+\sqrt{17}}{2}$.

综上，满足条件的点 P 共有三个.

故选：**C.**

【点睛】

本题考查三角形面积的计算，涉及点到直线的距离公式的应用，考查运算求解能力，属于中等题.

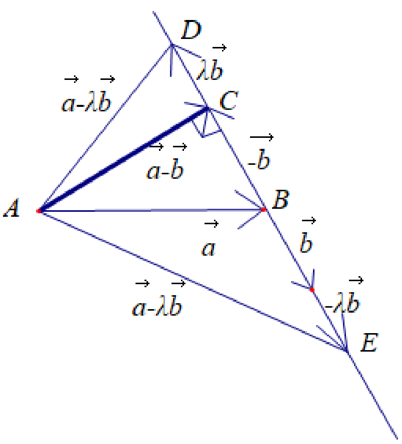
6、**D**

【解析】

画出 $\vec{a}$，$\vec{b}$，根据向量的加减法，分别画出 $(\vec{a}-\lambda\vec{b})$ 的几种情况，由数形结合可得结果.

【详解】

由题意，得向量 $(\vec{a}-\vec{b})$ 是所有向量 $(\vec{a}-\lambda\vec{b})$ 中模长最小的向量，如图，



当 $AC\perp BC$，即 $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\perp\vec{b}$ 时，$|AC|$ 最小，满足 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|\leq\left|\vec{a}-\lambda\vec{b}\right|$，对于任意的 $\lambda\in R$，

所以本题答案为 **D.**

【点睛】

本题主要考查了空间向量的加减法，以及点到直线的距离最短问题，解题的关键在于用有向线段正确表示向量，属于基础题.

7、**D**

【解析】

结合纯虚数的概念，可得$a=0,b\neq 0$，再结合充分条件和必要条件的定义即可判定选项.

【详解】

若复数$z=a+bi$为纯虚数，则$a=0,b\neq 0$，所以$ab=0$，若$ab=0$，不妨设$a=1,b=0$，此时复数$z=a+bi=1$，不是纯虚数，所以“复数$z=a+bi$为纯虚数”是“$ab=0$”的充分不必要条件.

故选：**D**

【点睛】

本题考查充分条件和必要条件，考查了纯虚数的概念，理解充分必要条件的逻辑关系是解题的关键，属于基础题.

8、**B**

【解析】

根据函数$f\left(x\right)$的一个零点是$x=\frac{\pi}{3}$，得出$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$，再根据$x=-\frac{\pi}{6}$是对称轴，得出$-\frac{\pi}{6}\omega-\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in Z$，求出$w$的最小值与对应的$\varphi$，写出$f\left(x\right)$即可求出其单调增区间.

【详解】

依题意得，$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{\pi\omega}{3}+\varphi\right)-1=0$，即$\sin\left(\frac{\pi\omega}{3}+\varphi\right)=\frac{1}{2}$，

解得$\frac{\pi\omega}{3}+\varphi=2k_1\pi+\frac{\pi}{6}$或$\frac{\pi\omega}{3}+\varphi=2k_2\pi+\frac{5\pi}{6}$（其中$k_1$，$k_2\in\mathbf{Z}$）.①

又$\sin\left(-\frac{\pi\omega}{6}+\varphi\right)=\pm 1$，

即$-\frac{\pi\omega}{6}+\varphi=k_3\pi+\frac{\pi}{2}$（其中$k_3\in\mathbf{Z}$）.②

由①−②得$\frac{\pi\omega}{2}=\left(2k_1-k_3\right)\pi-\frac{\pi}{3}$或$\frac{\pi\omega}{2}=\left(2k_2-k_3\right)\pi+\frac{\pi}{3}$，

即$\omega=2\left(2k_1-k_3\right)-\frac{2}{3}$或$\omega=2\left(2k_2-k_3\right)+\frac{2}{3}$（其中$k_1$，$k_2$，$k_3\in\mathbf{Z}$），因此$\omega$的最小值为$\frac{2}{3}$.

因为$\sin\left(-\frac{\pi\omega}{6}+\varphi\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{9}+\varphi\right)=\pm 1$，所以$-\frac{\pi}{9}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）.

又$0<\varphi<\pi$，所以$\varphi=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{9}$，所以$f\left(x\right)=2\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{9}\right)-1=2\cos\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{9}\right)-1$，

令$2k\pi-\pi\leq\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{9}\leq 2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），则$3k\pi-\frac{5\pi}{3}\leq x\leq 3k\pi-\frac{\pi}{6}$（$k\in\mathbf{Z}$）.

因此，当ω取得最小值时，$f\left(x\right)$的单调递增区间是$\left[3k\pi-\frac{5\pi}{3},3k\pi-\frac{\pi}{6}\right]$（$k\in\mathbf{Z}$）.

故选：**B**

【点睛】

此题考查三角函数的对称轴和对称点，在对称轴处取得最值，对称点处函数值为零，属于较易题目.

9、**C**

【解析】

试题分析：因为复数$m(m-2)+(m^2-3m+2)i$是纯虚数，所以$m(m-2)=0$且$m^2-3m+2\neq 0$，因此$m=0$.注意不要忽视虚部不为零这一隐含条件.

考点：纯虚数

10、**D**

【解析】

首先求得$z=-1+2i$，然后根据复数乘法运算、共轭复数、复数的模、复数除法运算对选项逐一分析，由此确定正确选项.

【详解】

由题意知复数$z=-1+2i$，则$z\cdot i=(-1+2i)\cdot i=-2-i$，所以**A**选项不正确；复数$z$的共轭复数是$-1-2i$，所以**B**选项不正确；$|z|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$，所以**C**选项不正确；$\frac{z}{1+i}=\frac{-1+2i}{1+i}=\frac{(-1+2i)\cdot(1-i)}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$，所以**D**选项正确.

故选：**D**

【点睛】

本小题考查复数的几何意义，共轭复数，复数的模，复数的乘法和除法运算等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力，数形结合思想.

11、**B**

【解析】

根据题意可得$(\sqrt{2}\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}=0$，利用向量的数量积即可求解夹角.

【详解】

因为$(\sqrt{2}\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{b}\Rightarrow(\sqrt{2}\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}=0$

即$\sqrt{2}\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|^2$

而$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

所以$\vec{a},\vec{b}$夹角为$\dfrac{\pi}{4}$

故选：B

【点睛】

本题考查了向量数量积求夹角，需掌握向量数量积的定义求法，属于基础题.

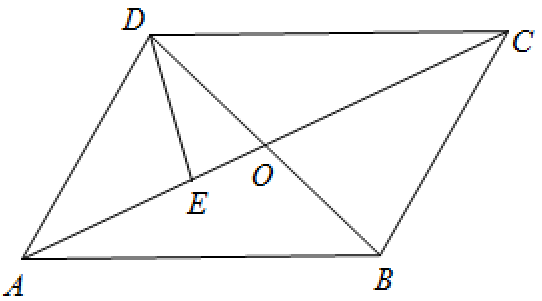
12、C

【解析】

画出图形，以$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$为基底将向量$\overrightarrow{ED}$进行分解后可得结果.

【详解】

画出图形，如下图.



选取$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$为基底，则$\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$,

$\therefore\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}-\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

故选C.

【点睛】

应用平面向量基本定理应注意的问题

（1）只要两个向量不共线，就可以作为平面的一组基底，基底可以有无穷多组，在解决具体问题时，合理选择基底会给解题带来方便.

（2）利用已知向量表示未知向量，实质就是利用平行四边形法则或三角形法则进行向量的加减运算或数乘运算.

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13、①②③

【解析】

由已知分别结合和差角的正切及正弦余弦公式进行化简即可求解.