

几何-直线型几何-勾股定理和弦图-5 星题

课程目标

知识点	考试要求	具体要求	考察频率
勾股定理和弦图	B	1.能够理解勾股定理的概念 2.熟练应用勾股定理和弦图来解决相关的几何问题	少考

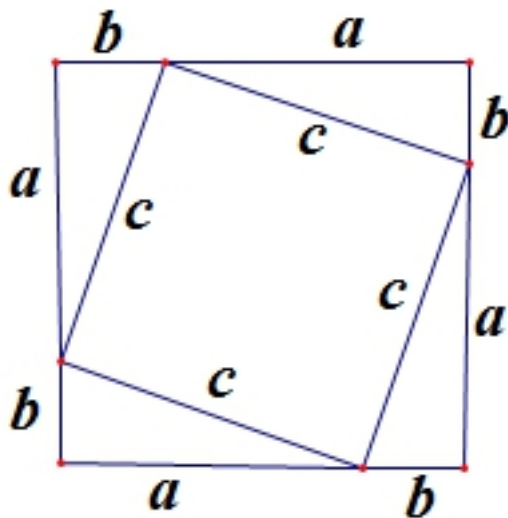
知识提要

勾股定理和弦图

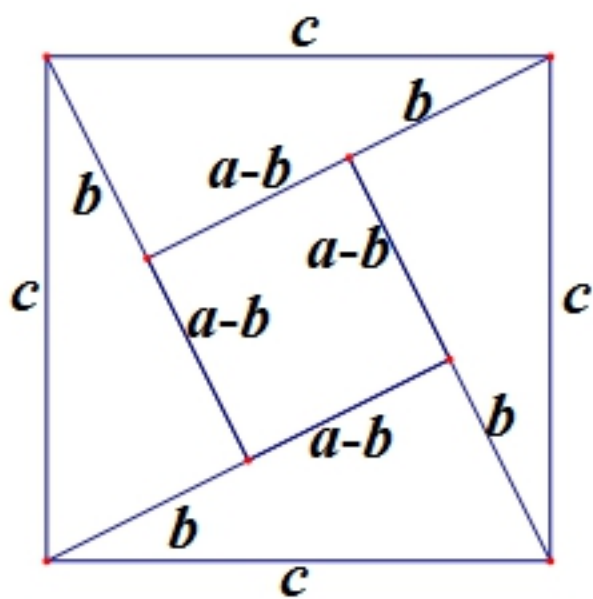
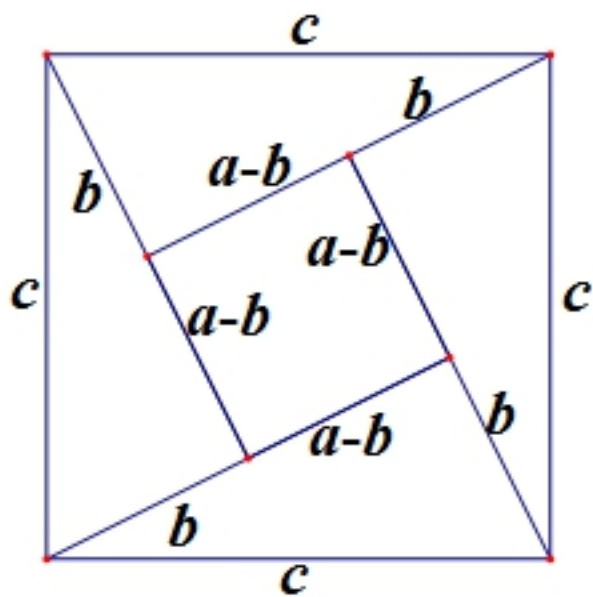
- 勾股定理

在直角三角形中，两条直角边的平方和等于斜边的平方。即： $AB^2 + AC^2 = BC^2$

- 勾股图与弦图



$$(a+b)^2 - \frac{4ab}{2} = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = c^2, \text{ 所以 } c^2 = a^2 + b^2$$

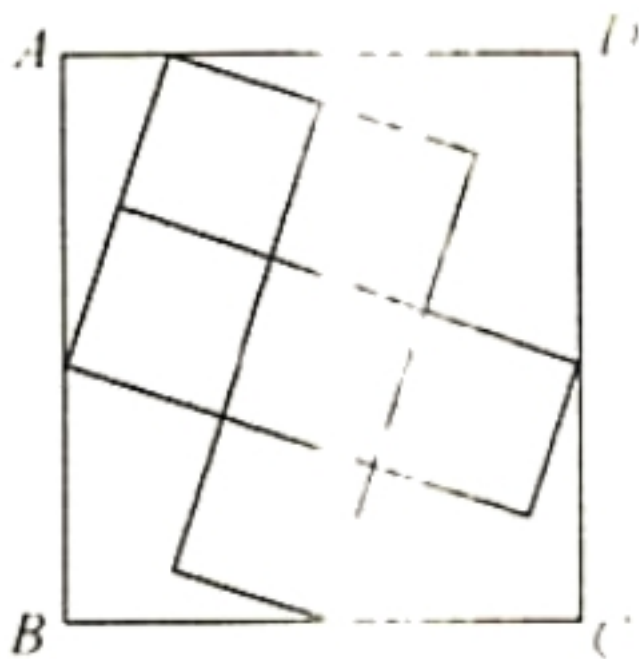


$$(a-b)^2 + \frac{4ab}{2} = a^2 - 2ab + b^2 + 2ab = c^2, \text{ 所以 } c^2 = a^2 + b^2$$

精选例题

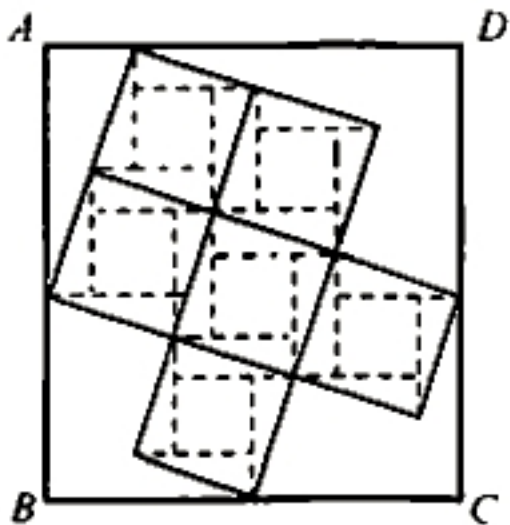
勾股定理和弦图

1. 如下图所示，长方形 $ABCD$ 中被嵌入了 6 个相同的正方形。已知 $AB = 22$ 厘米， $BC = 20$ 厘米，那么每一个正方形的面积为_____平方厘米。

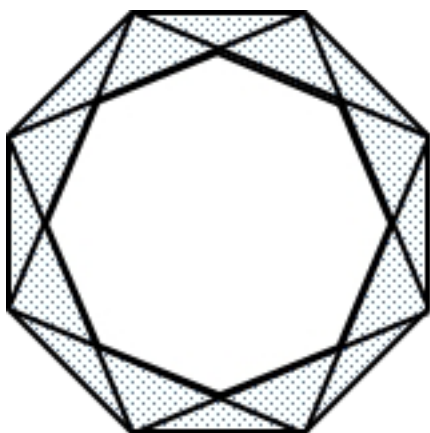


【答案】 40

【分析】 如下图所示，对每个正方形作弦图，设小直角三角形的长直角边为 x 厘米，短直角边为 y 厘米，则 $\begin{cases} 3x + y = 20 \\ 3x + 2y = 22 \end{cases}$ ，所以 $\begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$ ，小正方形面积为 $6^2 + 2^2 = 40$ (平方厘米)。

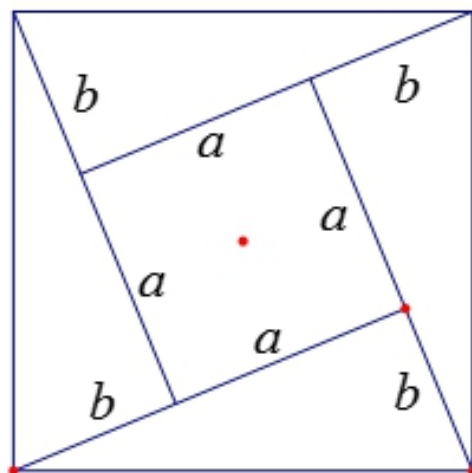
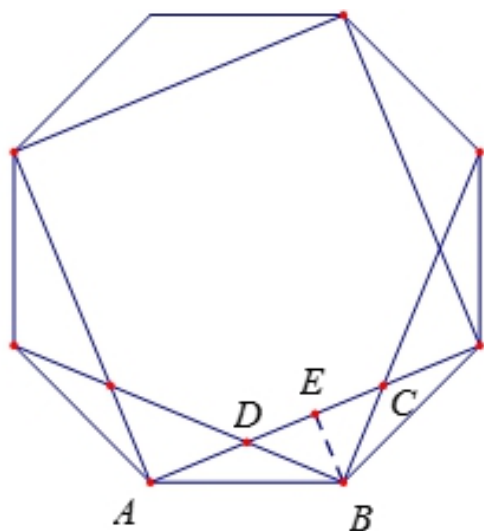


2. 在下图中，将一个每边长均为 12 厘米的正八边形的 8 个顶点间隔地连线，可以连出两个正方形。图中阴影部分的面积是_____平方厘米。



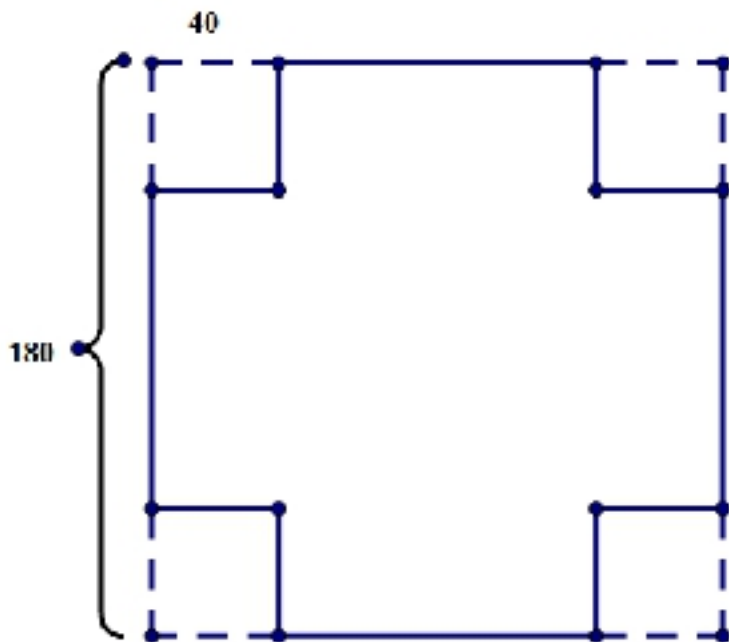
【答案】 288

【分析】 如下左图，记 $AD = a$ ，由对称性知， $DB = a$ ， $BC = a$ 。
 取 E 为 DC 中点，连接 BE ，将 $\triangle ABC$ 分成直角三角形 ABE 和等腰直角三角形 BEC 。
 四个 $\triangle BEC$ 可以拼成一个边长 a 的正方形。
 记 $BE = b$ ，则 $CE = b$ ， $DE = b$ 。
 由 $AE = a + b$ ， $BE = b$ 知：由 4 个 $\triangle ABE$ 和一个以 a 为边长的正方形可拼成一个以 AB 为边长的正方形（如下右弦图）。



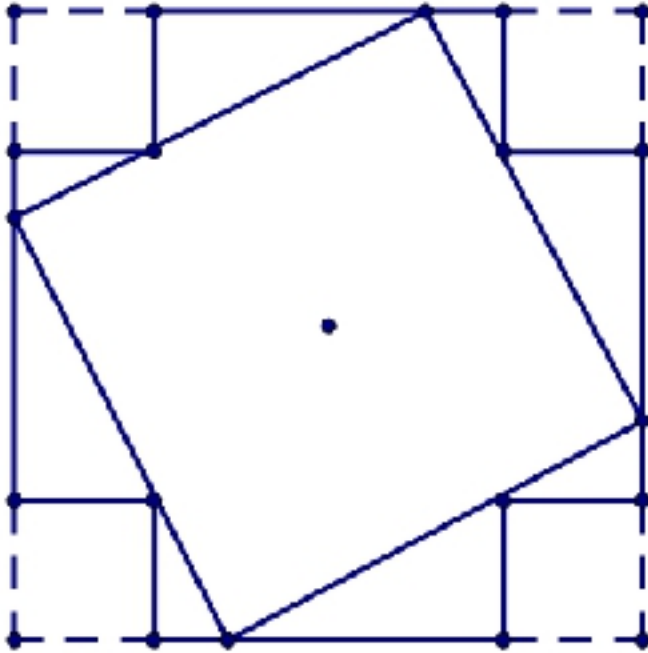
题中阴影可看做 8 个 $\triangle ABE$ 再加上 8 个 $\triangle BEC$ 的面积和，4 个 $\triangle ABE$ 与 4 个 $\triangle BEC$ 拼成边长为 12 的正方形，因此本题答案为 $122 \times 2 = 288$ 平方厘米。

3. 如下图所示，一块边长为 180 厘米的正方形铁片，四角各被截去了一个边长为 40 厘米的小正方形。现在要从剩下的铁片中剪出一块完整的正方形铁片来。剪出的正方形面积最大为_____平方厘米。



【答案】 18000

【分析】 如右图所示，铁片分为中间的正方形和四个长方形两部分，中间部分的面积为 $100^2 = 10000$ 平方厘米，四个长方形每个的面积为 $40 \times 100 = 4000$ 平方厘米，剪出的最大正方形为中间的正方形加上四个长方形的一半，面积为 $10000 + 4000 \div 2 \times 4 = 18000$ 平方厘米。

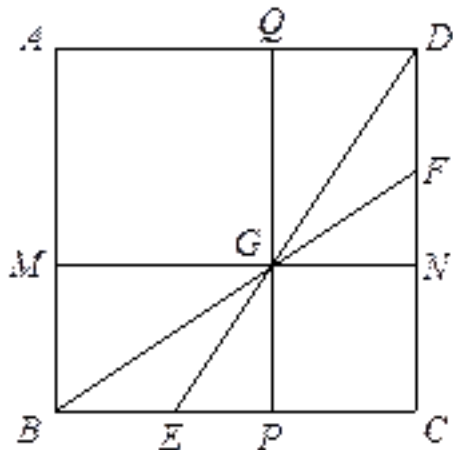


4. 平面上的五个点 A, B, C, D, E 满足： $AB = 16$ 厘米， $BC = 8$ 厘米， $AD = 10$ 厘米， $DE = 2$ 厘米， $AC = 24$ 厘米， $AE = 12$ 厘米。如果三角形 EAB 的面积为 96 平方厘米，则点 A 到 CD 的距离等于_____厘米。

【答案】 $\frac{120}{13}$

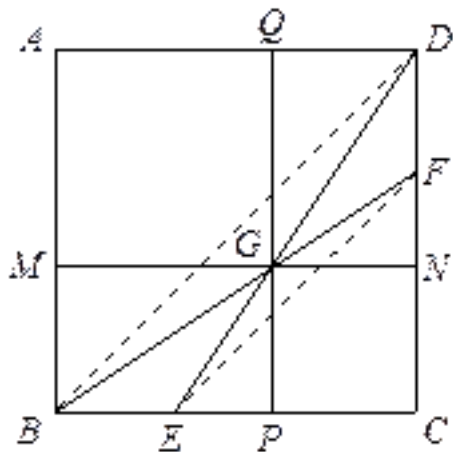
【分析】 得三角形 CAD 是直角三角形， $CD = 26$ 厘米，点 A 到 CD 的距离为 $\frac{10 \times 24}{26} = \frac{120}{13}$ 厘米。

5. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， E, F 分别在 BC 与 CD 上，且 $CE = 2BE$ ， $CF = 2DF$ ，连接 BF, DE ，相交于点 G ，过 G 作 MN, PQ 得到两个正方形 $MGQA$ 和 $PCNG$ ，设正方形 $MGQA$ 的面积为 S_1 ，正方形 $PCNG$ 的面积为 S_2 ，则 $S_1:S_2 =$ _____。



【答案】 9:4

【分析】 连接 BD 、 EF .



设正方形 $ABCD$ 边长为 3, 则

$$CE = CF = 2, BE = DF = 1,$$

所以,

$$EF^2 = 2^2 + 2^2 = 8, BD^2 = 3^2 + 3^2 = 18.$$

因为

$$EF^2 \cdot BD^2 = 8 \times 18 = 144 = 12^2,$$

所以

$$EF \cdot BD = 12.$$

由梯形蝴蝶定理, 得

$$\begin{aligned} & S_{\triangle GEF} : S_{\triangle GBD} : S_{\triangle DGF} : S_{\triangle BGE} \\ &= EF^2 : BD^2 : EF \cdot BD : EF \cdot BD \\ &= 8 : 18 : 12 : 12 \\ &= 4 : 9 : 6 : 6, \end{aligned}$$

所以,

$$S_{\triangle BGE} = \frac{6}{4+9+6+6} S_{\text{梯形} BDFE} = \frac{6}{25} S_{\text{梯形} BDFE}.$$

因为

$$S_{\triangle BCD} = 3 \times 3 \div 2 = \frac{9}{2}, S_{\triangle CEF} = 2 \times 2 \div 2 = 2,$$

所以

$$S_{\text{梯形} BDFE} = S_{\triangle BCD} - S_{\triangle CEF} = \frac{5}{2},$$

所以,

$$S_{\triangle BGE} = \frac{6}{25} \times \frac{5}{2} = \frac{3}{5}.$$

由于 $\triangle BGE$ 底边 BE 上的高即为正方形 $PCNG$ 的边长, 所以

$$CN = \frac{3}{5} \times 2 \div 1 = \frac{6}{5},$$

$$ND = 3 - \frac{6}{5} = \frac{9}{5},$$

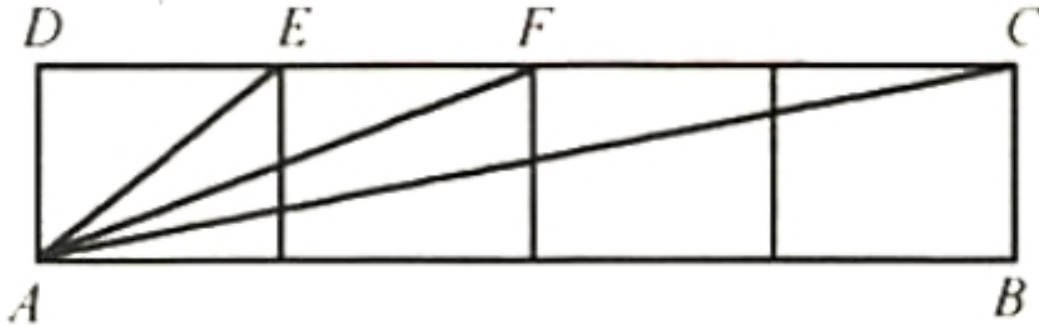
所以

$$AM:CN = DN:CN = 3:2,$$

则

$$S_1:S_2 = AM^2:CN^2 = 9:4.$$

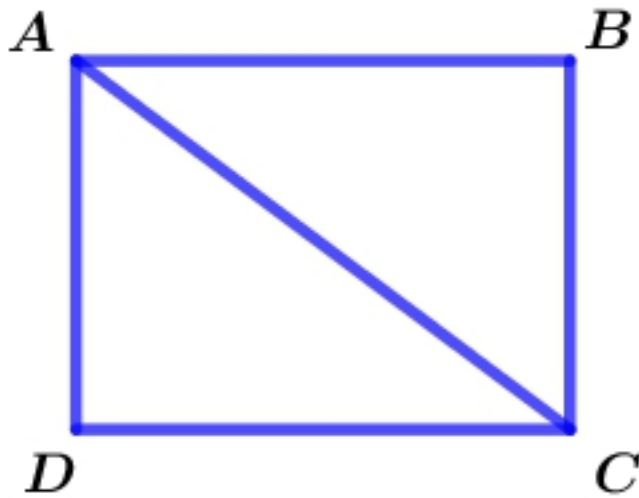
6. 将矩形 $ABCD$ 分成四个全等的矩形, 如下图所示. 若 $AE = 29$ 厘米 $AF = 41$ 厘米, 请问 AC 的长度是多少厘米?



【答案】 71 厘米

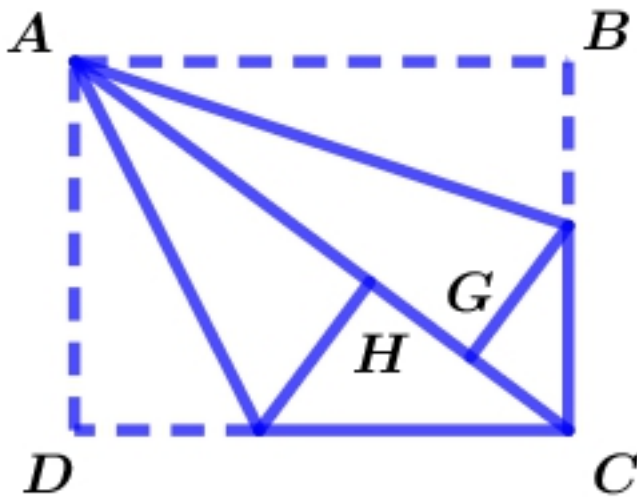
【分析】 设 $AD = a$, $DE = EF = b$, 所以 $a^2 + b^2 = 29^2$, $a^2 + (2b)^2 = 41^2$, 由此得 $b^2 = 280$. 于是 $AC^2 = a^2 + (4b)^2 = (a^2 + b^2) + 15b^2 = 29^2 + 15 \times 280 = 5041 = 71^2$. 所以 $AC = 71$ 厘米.

7. 如下图所示，长方形 $ABCD$ ， $AB = 24$ ， $BC = 18$ ，把 AB 边对折到 AC 上与 AC 重合，把 AD 边也对折到 AC 上与 AC 重合，请问得到的新图形的面积是多少？



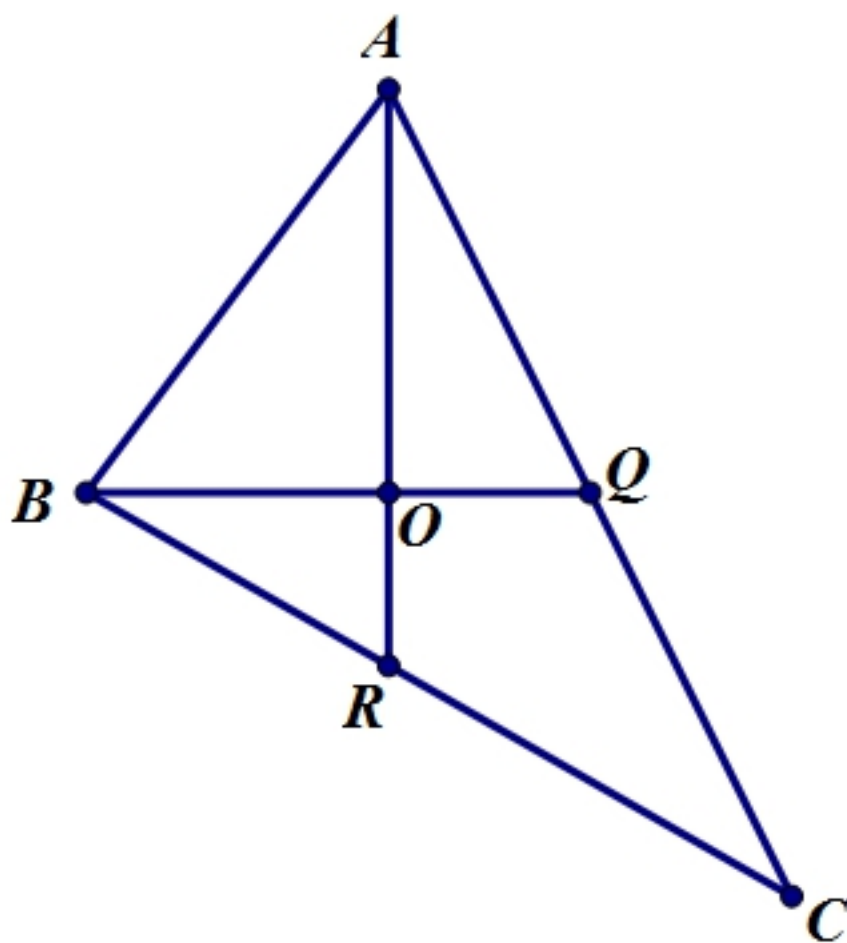
【答案】 255

【分析】



如上图所示，把 AB 对折到 AC 上与 AC 重合，把 AD 对折到 AC 上与 AC 重合，得到四边形 $AECF$ ，由勾股定理， $AC = 30$ ，设 $BE = EG = x$ ， $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BAE} + S_{\triangle AEC}$ ，所以 $24 \times 18 \div 2 = 24x \div 2 + 30x \div 2$ ，那么 $x = 8$ ，设 $FH = DF = y$ ， $S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ADF} + S_{\triangle AFC}$ ，所以 $24 \times 18 \div 2 = 18y \div 2 + 30y \div 2$ ，那么 $y = 9$ ， $S_{\text{四边形 } AECF} = S_{\triangle AEC} + S_{\triangle AFC} = 30 \times (8 + 9) \div 2 = 255$ 。

8. 三角形 ABC 中，线段 AR 、 BQ 分别是 BC 、 AC 边上的中线，且 BQ 与 AR 互相垂直。如图所示，已知 $AC = 8$ 、 $BC = 6$ 。请问 $AB^2 + BC^2 + CA^2$ 等于多少？



【答案】 120

【分析】 如右图所示，连接 RQ ， AR 与 BQ 交于 O 点，
设 $AO = c$ ， $BO = a$ ， $OR = d$ ， $OQ = b$ ，
因为 $c^2 + b^2 = AQ^2 = \frac{1}{4}AC^2 = 16$ ， $a^2 + d^2 = BR^2 = \frac{1}{4}BC^2 = 9$ ，
又因为 $a^2 + c^2 = AB^2$ ， $b^2 + d^2 = QR^2 = \frac{1}{4}AB^2$ ，所以
 $\frac{5}{4}AB^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 16 + 9 = 25$ ．所以 $AB^2 = 20$ ．
所以 $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 20 + 64 + 36 = 120$ ．

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/788106107120007036>