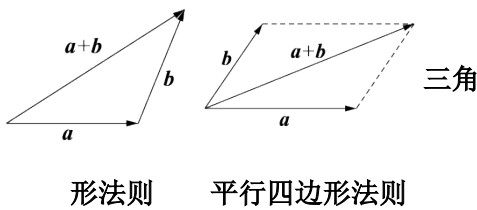
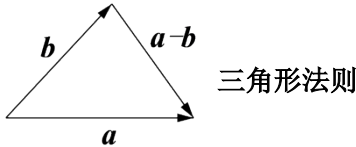


高一下学期《平面向量》期末复习综合练习

知识要点

向量的线性运算

运 算	定 义	法 则（或几何意义）	运 算 律
加 法	求两个向量和的运算	 形法则 平行四边形法则	①交换律 $a + b = b + a$ ②结合律 $(a + b) + c = a + (b + c)$
减 法	求 a 与 b 的相反向量 $-b$ 的和的运算叫做 a 与 b 的差	 三角形法则	$a - b = a + (-b)$
数 乘	求实数 λ 与向量 a 的积的运算	(1) $ \lambda a = \lambda a $ (2) 当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 的方向相同; 当 $\lambda < 0$ 时, λa 与 a 的方向相反; 当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda a = 0$	$\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$ $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$

向量共线定理与性质

- (1) 向量共线定理: 如果 $a = \lambda b$ 且 $b \neq 0$, 则 $a \parallel b$;
- (2) 向量共线性质: $a \parallel b$ 且 $b \neq 0$, 则一定存在唯一一个实数 λ , 使 $a = \lambda b$.

向量的数量积的定义

①定义: 非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$, 它们的夹角为 θ , 数量 $|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ 叫做向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积 (或内积); 向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积记作 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, 即 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$;

向量的投影向量: 向量 a 在 b 方向上的投影向量为 $|a| \cos \theta \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

平面向量数量积的性质与运算律

(1) 平面向量数量积的性质

设 $\vec{a}, \vec{b}$ 都是非零向量, $\vec{e}$ 是单位向量, θ 为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ (或 $\vec{e}$) 的夹角. 则

① $\vec{a} \cdot \vec{e} = \vec{e} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cos \theta$; ② $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$;

两个向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为锐角 $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ 且 $\vec{a}, \vec{b}$ 不共线; 两个向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为钝角 $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ 且 $\vec{a}, \vec{b}$ 不共线.

平面向量线性运算的坐标表示

(1) 两个向量和 (差) 的坐标表示

已知非零向量 $\vec{a} = (x_1, y_1); \vec{b} = (x_2, y_2)$

则: $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2); \vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$

(2) 向量数乘的坐标表示

$\vec{a} = (x_1, y_1);$ 则 $\lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$

平面向量数量积的几何与坐标运算

已知非零向量 $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2), \theta$ 为向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角.

结论	几何表示	坐标表示
模	$ \vec{a} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$	$ \vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2}$
数量积	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b} \cos \theta$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$
夹角	$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \vec{b} }$	$\cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$
$\vec{a} \perp \vec{b}$ 的充要条件	$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$	$x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$

$a \perp b$ 的充要条件	$a = \lambda b (\lambda \neq 0)$	$x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$
$ a \cdot b $ 与 $ a b $ 的关系	$ a \cdot b \leq a b $ (当且仅当 $a \parallel b$ 时等号成立)	$ x_1 x_2 + y_1 y_2 \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$

考点探究

典例 1 向量相等与共线

1. 向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线, $\vec{AB} = \vec{a} + k\vec{b}$, $\vec{AC} = l\vec{a} + \vec{b} (k, l \in \mathbb{R})$, 且 $\vec{AB}$ 与 $\vec{AC}$ 共线, 则 k, l 应满足 ()

A. $k+l=0$ B. $k-l=0$ C. $kl+1=0$ D. $kl-1=0$

【分析】根据题意知 $l\vec{a} + \vec{b} \neq \vec{0}$, 然后根据 $\vec{AB}$ 与 $\vec{AC}$ 共线可得出 $\vec{a} + k\vec{b} = \lambda(l\vec{a} + \vec{b})$, 从而可得出 k, l 应满足的关系式.

【解答】解: $\because \vec{a}, \vec{b}$ 不共线, $\therefore l\vec{a} + \vec{b} \neq \vec{0}$, 且 $\vec{AB}$ 与 $\vec{AC}$ 共线,

$\therefore$ 存在实数 λ , 使 $\vec{a} + k\vec{b} = \lambda(l\vec{a} + \vec{b})$,

$$\therefore \begin{cases} \lambda l = 1 \\ k = \lambda \end{cases}, \therefore kl - 1 = 0.$$

故选: D.

典例 2 平面向量数量积的性质及其运算

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2AC = 2$, P, Q 为线段 BC 上的点, 且 $\vec{BP} = \vec{PQ} = \vec{QC}$. 若

$\vec{AP} \cdot \vec{AQ} = \frac{5}{9}$, 则 $\angle BAC = ()$

A. 150° B. 120° C. 60° D. 30°

【分析】由平面向量数量积的运算, 结合平面向量的夹角的运算求解即可.

【解答】解: 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2AC = 2$, P, Q 为线段 BC 上的点, 且 $\vec{BP} = \vec{PQ} = \vec{QC}$,

$$\therefore \vec{AP} \cdot \vec{AQ} = \frac{5}{9},$$

$$\begin{aligned}
&\therefore (AB+BP) \cdot (AB+BQ) = \frac{5}{9}, \\
&\therefore (AB+\frac{1}{3}BC) \cdot (AB+\frac{2}{3}BC) = \frac{5}{9}, \\
&\therefore (\frac{2}{3}AB+\frac{1}{3}AC) \cdot (\frac{1}{3}AB+\frac{2}{3}AC) = \frac{5}{9}, \\
&\therefore 2AB^2+2AC^2+5AB \cdot AC = 5, \\
&\therefore 2 \times 4 + 2 \times 1 + 5AB \cdot AC = 5, \\
&\therefore AB \cdot AC = -1, \\
&\therefore |AB| |AC| \cos A = -1, \\
&\therefore \cos A = -\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

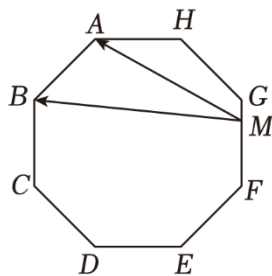
即 $\angle BAC = 120^\circ$,

故选: B.

2、窗花是贴在窗纸或窗户玻璃上的剪纸,是中国古老的汉族传统民间艺术之一,它历史悠久,风格独特,深受国内外人士所喜爱.如图甲是一个正八边形窗花隔断,图乙是从窗花图中抽象出的几何图形示意图.已知正八边形 $ABCDEFGH$ 的边长为 $2\sqrt{2}$, M 是正八边形 $ABC-DEFGH$ 边上任意一点,则 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ 的最大值为()



甲



乙

- A. $30+4\sqrt{2}$ B. $28+8\sqrt{2}$ C. $26+16\sqrt{2}$ D. $24+16\sqrt{2}$

【分析】取 AB 的中点 O , 连接 MO , 通过转化得 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO}^2 - 2$, 则转化为求 $|\overrightarrow{MO}|$ 的最大值, 由图得当点 M 与点 F 或点 E 重合时, $|\overrightarrow{MO}|$ 取得最大值, 计算 $|\overrightarrow{MO}|$ 最值即可.

【解答】解 如图, 取 AB 的中点 O , 连接 MO , 连接 BE , OE , 分别过点 C , 点 D 作 BE 的垂线, 垂足分别为 I , J ,

$$\text{所以 } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = \overrightarrow{MO}^2 - 2,$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/788117063137006130>