考点三 三角形及其性质

知识点整合

一、三角形的基础知识

1．三角形的概念

由三条线段首尾顺次相接组成的图形，叫做三角形．

2．三角形的三边关系

（1）三角形三边关系定理：三角形的两边之和大于第三边．

推论：三角形的两边之差小于第三边．

（2）三角形三边关系定理及推论的作用：

①判断三条已知线段能否组成三角形；②当已知两边时，可确定第三边的范围；③证明线段不等关系．

3．三角形的内角和定理及推论

三角形的内角和定理：三角形三个内角和等于 180°．

推论：①直角三角形的两个锐角互余；②三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和；③三角形的一个外角大于任何一个和它不相邻的内角．

4．三角形中的重要线段

（1）三角形的一个角的平分线与这个角的对边相交，这个角的顶点和交点间的线段叫做三角形的角平分线．

（2）在三角形中，连接一个顶点和它对边的中点的线段叫做三角形的中线．

（3）从三角形一个顶点向它的对边做垂线，顶点和垂足之间的线段叫做三角形的高线（简称三角形的高）．

（4）连接三角形两边中点的线段叫做三角形的中位线，三角形的中位线平行于第三边，且等于第三边的一半．

考向一 三角形的三边关系

在判断三条线段能否组成一个三角形时，可以根据两条较短线段的长度之和是否大于第三条线段的长度来判断．

典例引领

1．等腰三角形的两边长分别为5cm 和2cm，则它的周长是 （　　）

A． 12cm　　B． 9cm　　C． 12cm 和 9cm　　D． 以上都不正确

【答案】A

【分析】本题考查的是等腰三角形的性质和三角形的三边关系；已知没有明确腰和底边的题目一定要想到两种情况，分类进行讨论，还应验证各种情况是否能构成三角形进行解答，这点非常重要，也是解题的关键．

由于未说明两边哪个是腰哪个是底，故需分情况讨论，从而得到其周长．

【详解】解：当等腰三角形的腰为 $5cm$，底为 $2cm$ 时，

$\because 5+2>5$

$\therefore 5cm$，$5cm$，$2cm$ 能够组成三角形，

此时周长为 $5+5+2=12cm$；

当等腰三角形的腰为 $2cm$，底为 $5cm$ 时，

$\because 2+2=4<5$，

$\therefore 2cm$，$2cm$，$5cm$ 不能够组成三角形．

则这个等腰三角形的周长是 $12cm$．

故选：A．

2．下列长度的三条线段能组成三角形的是（　　）

A．2，3，6　　B．4，4，8　　C．4，7，11　　D．5，8，12

【答案】D

【分析】本题考查了能够组成三角形三边的条件：用两条较短的线段相加，如果大于最长的那条线段就能够组成三角形．根据三角形的三边关系进行分析判断．

【详解】解：根据三角形任意两边的和大于第三边，得

A、$2+3=5<6$，不能组成三角形；

B、$4+4=8$，不能组成三角形；

C、$4+7=11$，不能组成三角形；

D、$5+8=13>12$，能够组成三角形．

故选：D．

3．下列木棒中，能与 3cm 和 7cm 的两根木棒围成一个三角形的是（　　）

A． 7cm　　B． 4cm　　C． 3cm　　D． 10cm

【答案】A

【分析】本题主要考查了三角形的三边关系，掌握三角形的三边关系：两边之和大于第三边、两边之差小于第三边成为解题的关键．

根据三角形的三边关系可得第三边的取值范围，然后结合选项即可解答．

【详解】解：设第三边为c，则$3+7>c>7-3$，即$10>c>4$．

结合选项可知，仅有 A 选项符合要求．

故选 A．

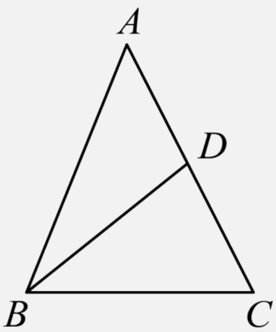
4．在$\triangle ABC$中，$AB=AC, AC$边上的中线BD把$\triangle ABC$的周长分为 21 和 27 的两部分，则BC的长为（　）

A．12　　B．12 或 20　　C．18　　D．18 或 20

【答案】B

【分析】本题考查的是等腰三角形的性质等知识点，题中给出了周长关系，要求底边长，首先应先想到等腰三角形的两腰相等，寻找问题中的等量关系，列方程求解，然后结合三角形三边关系验证答案，根据题意画出图形，列出关于x、y的方程组是解答此题的关键．

【详解】设等腰三角形的底边BC长为x，腰长为y，则根据题意，



得$\begin{cases} x+\frac{y}{2}=21 \\ y+\frac{y}{2}=27 \end{cases}$或$\begin{cases} x+\frac{y}{2}=27 \\ y+\frac{y}{2}=21 \end{cases}$，

解得$\begin{cases} x=12 \\ y=18 \end{cases}$或$\begin{cases} x=20 \\ y=14 \end{cases}$，

经检验，这两组解均能构成三角形，所以底边长为 12 或 20

故选：B．

5．下面不能组成三角形的三条线段是（　　）

A．$a=b=10\text{cm}$，$c=1\text{cm}$　　B．$a=b=c=6\text{cm}$

C．$a=3\text{cm}$，$b=4\text{cm}$，$c=7\text{cm}$　　D．$a=2\text{cm}$，$b=4\text{cm}$，$c=5\text{cm}$

【答案】C

【分析】本题主要考查了构成三角形的条件，三角形中任意两边之和大于第三边，任意两边之差小于第三边，据此求解即可.

【详解】解：A、$\because 1+10>10$，

$\therefore$三条长分别为$10cm,10cm,1cm$的线段能构成三角形，不符合题意；

B、$\because 6+6>6$，

$\therefore$三条长分别为$6cm,6cm,6cm$的线段能构成三角形，不符合题意；

C、$\because 3+4=7$，

$\therefore$三条长分别为$3cm,4cm,7cm$的线段不能构成三角形，符合题意；

D、$\because 2+4>5$，

$\therefore$三条长分别为$2cm,4cm,5cm$的线段能构成三角形，不符合题意；

故选：C.

6．已知一个三角形有两条边相等，一边长为$4cm$，另一边长为$7cm$，则这个三角形的周长为（　）

A．$15cm$　　B．$18cm$　　C．不能确定　　D．$15cm$或$18cm$

【答案】D

【分析】本题主要考查三角形的三边关系，解题的关键是利用三角形的三边关系确定第三边的长度．分情况考虑，当相等的两边是$4cm$时或当相等的两边是$7cm$时，根据三角形的三边关系进行验证，然后求出三角形的周长即可得答案.

【详解】解：$\because$一个三角形有两条边相等，一边长为$4cm$，另一边长为$7cm$，

$\therefore$①当相等的两边是$4cm$时，三边长为：4、4、7，

$\because 4+4>7$，符合三角形三边关系，

$\therefore$这个三角形的周长为$15cm$，

②当相等的两边是$7cm$时，三边长为：4、7、7，

$\because 4+7>7$，符合三角形三边关系，

$\therefore$这个三角形的周长为$18cm$，

综上所述：这个三角形的周长为$15cm$或$18cm$，

故选：D.

变式拓展

7．已知a、b、c是$\triangle ABC$的三边，$a=3$，$b=7$，c为整数，则c的最小值为________.

【答案】5

【分析】本题考查三角形三边关系．已知三角形的两边，则第三边的范围是：大于已知的两边的差，而小于两边的和．掌握三角形三边的关系是解题的关键．

根据已知的两边确定第三边的取值范围，再根据c为整数，即可得出答案．

【详解】解：$\because a$、b、c是$\triangle ABC$的三边，$a=3$，$b=7$，

$\therefore 7-3<c<7+3$，即$4<c<10$，

又$\because c$为整数，

$\therefore c$的最小值为5，

故答案为：5．

8．在$\triangle ABC$中，$AB=8$，$BC=4$，则AC边上的中线BD长x的取值范围是__________．

【答案】$2<x<6$

【分析】本题主要考查了全等三角形的判定和性质，三角形三边之间的关系，构造全等三角形是解题的关键．延长BD到E，使$DE=BD$，连接AE，证明$\triangle ADE\cong\triangle CDB$，再利用三边关系即可得到答案．

【详解】解：延长BD到E，使$DE=BD$，连接AE，

在$\triangle ADE$与$\triangle CDE$中，

$$\begin{cases} BD=DE \\ \angle ADE=\angle CDE \\ AD=CD \end{cases},$$

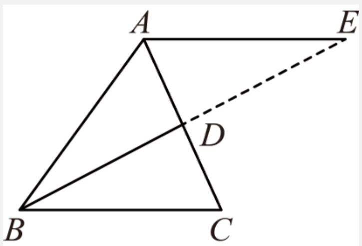
$\therefore \triangle ADE\cong\triangle CDB(\text{SAS})$，

$\therefore AE=BC$，

在$\triangle ABE$中，有$AB-AE<BE<AB+AE$，

即$4<2BD<12$，

$\therefore 2<x<6$，



故答案为：$2<x<6$．

三、解答题

9．已知x_1，x_2是关于x的一元二次方程$4x^2-4(m+1)x+m^2+3=0$的两个实数根，

(1)若$(x_1-2)(x_2-2)=5$，求m的值；

(2)已知$Rt\triangle ABC$的斜边长为$\sqrt{10}$，而且x_1，x_2恰好是$\triangle ABC$另外两条直角边的长，求这个$Rt\triangle ABC$的周长．

【答案】(1)9

(2)$4+\sqrt{10}$

【分析】此题考查了根与系数的关系，勾股定理，以及三角形三边关系，熟练掌握各自的性质是解本题的关键；

（1）利用根与系数的关系表示出两根之和与两根之积，已知等式变形后，代入计算即可求出m的值;

（2）根据题意得到$x_1^2+x_2^2=(\sqrt{10})^2$，依此得到关于$m$的方程求出$m$的值，进而代入原方程求出解，进而求出周长即可,

【详解】（1）∵ x_1，x_2是关于x的一元二次方程$4x^2-4(m+1)x+m^2+3=0$的两个实数根，

∵$\Delta=[-4(m+1)]^2-4\times4(m^2+3)=32m-32\geq0$，即$m\geq1$

$x_1+x_2=-\dfrac{-4(m+1)}{4}=m+1$，$x_1x_2=\dfrac{m^2+3}{4}$，

$(x_1-2)(x_2-2)=5$，

整理得：$x_1x_2-2(x_1+x_2)=1$，

代入得：$\dfrac{m^2+3}{4}-2(m+1)=1$，即$m^2-8m-9=0$，

$(m-9)(m+1)=0$，

解得：$m_1=9$，$m_2=-1$，

∵ $m\geq1$，

∵ $m_2=-1$不符合题意，舍去，

$\therefore m$的值为9；

（2）$\because$ $Rt\triangle ABC$ 的斜边长为 $\sqrt{10}$，而且 x_1，x_2 恰好是 $\triangle ABC$ 另外两条直角边的长，

$\therefore x_1^2+x_2^2=\left(\sqrt{10}\right)^2=10$，

$\because x_1+x_2=m+1$，$x_1x_2=\dfrac{m^2+3}{4}$，且 $\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=10$，

$\therefore \left(m+1\right)^2-2\times\dfrac{m^2+3}{4}=10$，

整理得：$m^2+4m-21=0$，

解得：$m_1=3$ 或 $m_2=-7$，

$\because m\geq 1$，

$\therefore m_2=-7$ 不符合题意，舍去，

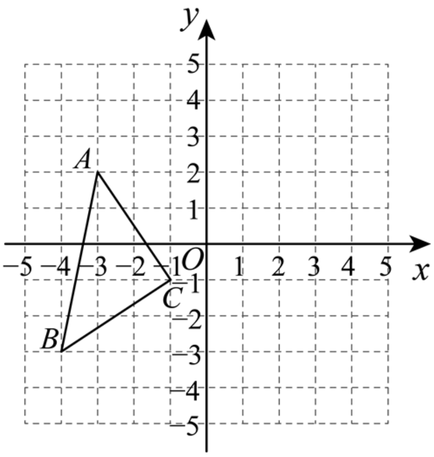
此时已知方程为 $4x^2-16x+12=0$ 即 $x^2-4x+3=0$

解得：$x_1=1$，$x_2=3$，

$\therefore 1+3+\sqrt{10}=4+\sqrt{10}$，

故这个 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的周长为 $4+\sqrt{10}$．

10．在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$ 三个顶点的坐标为：$A\left(-3,2\right),B\left(-4,-3\right),C\left(-1,-1\right)$，



(1)若 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 关于 y 轴对称，请写出点 A_1,B_1,C_1 的坐标（直接写答案）：A_1_；

B_1_；C_1_；

(2) $\triangle ABC$ 的面积为_；

(3)在 y 轴上画出点 P，使 $PB+PC$ 最小．

【答案】(1) $(3,2),(4,-3),(1,-1)$

(2)6.5

(3)见解析

【分析】本题考查了平面直角坐标系中点的坐标的对称变换、三角形的三边关系，理解掌握点的坐标的对称变换是解题关键.

（1）根据点关于 y 轴对称的性质“横坐标变为相反数，纵坐标不变”即可得；

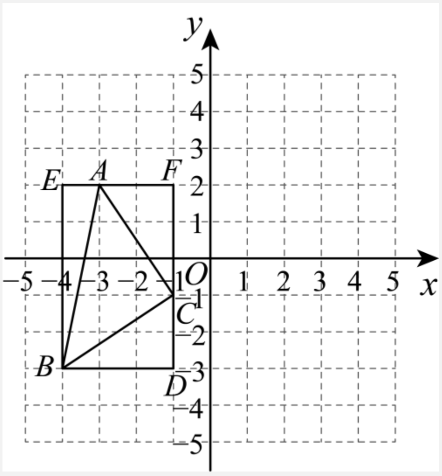
（2）三角形面积 = 矩形面积减去周围的三个三角形面积即可；

（3）由题意可得 y 轴是线段 BB_1 的垂直平分线，则 $PB=PB_1$，因此 $PB+PC=PB_1+PC$；又根据三角形的三边关系得 $PB_1+PC>B_1C$，所以当 P、C、B_1 三点共线时，$PB+PC$ 最小，且最小值为 CB_1.

【详解】（1）解：根据点关于 y 轴对称的性质得：$A_1(3,2),B_1(4,-3),C_1(1,-1)$，

故答案为：$A_1(3,2),B_1(4,-3),C_1(1,-1)$；

（2）如图可知，



$S_{\Delta ABC}=S_{XBDFE}-S_{\Delta ABE}-S_{\Delta BCD}-S_{\Delta ACF}$，

则 $S_{\Delta ABC}=3\times5-\frac{1}{2}\times1\times5-\frac{1}{2}\times3\times2-\frac{1}{2}\times2\times3=6.5$，

故答案为：6.5；

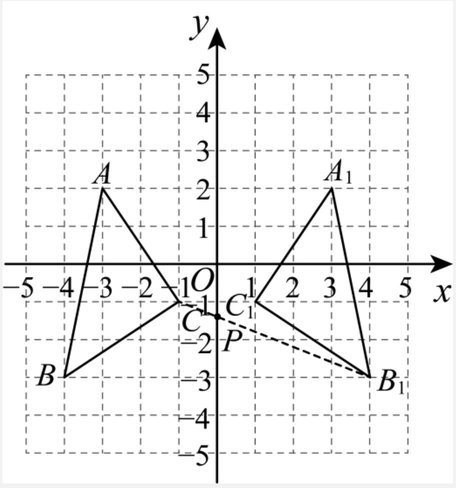
（3）解：由题意可得 y 轴是线段 BB_1 的垂直平分线，则 $PB=PB_1$，

因此 $PB+PC=PB_1+PC$，

由三角形的三边关系得 $PB_1+PC>B_1C$，

故当 P、C、B_1 三点共线时，$PB+PC$ 最小，且最小值为 CB_1，

连接 CB_1，与 y 轴的交点即为所求点 P（如图所示）.



11．已知a，b，c是三角形的三边长．

(1)化简：$|a-b-c|+|b-c-a|+|c-a-b|$；

(2)若$a=10$，$b=8$，$c=6$，求（1）中式子的值．

【答案】(1)$a+b+c$

(2)24

【分析】本题考查了三角形三边关系定理，绝对值的化简，求代数式的值

（1）根据a，b，c是三角形的三边长，得$b+c>a, a+c>b, a+b>c$，化简计算即可．

（2）根据$a=10$，$b=8$，$c=6$，代入化简式计算即可．

【详解】（1）$\because a$，b，c是三角形的三边长，得$b+c>a, a+c>b, a+b>c$，

$\therefore |a-b-c|+|b-c-a|+|c-a-b|$

$=b+c-a+a+c-b+a+b-c=a+b+c$．

（2）当$a=10$，$b=8$，$c=6$时，

原式$=a+b+c=10+8+6=24$．

12．已知a,b,c是三角形的三边长．

(1)化简：$|a-b-c|+3|a+c-b|$；

(2)a,b满足$|a-7|+(b-2)^2=0$，且三角形的周长是16，判断此三角形的形状，并说明理由．

【答案】(1)$2a-2b+4c$

(2)此三角形是等腰三角形，详见解析

【分析】本题考查了三角形三边关系定理，化简绝对值及绝对值的非负性，熟练掌握三角形三边关系定理是解题的关键.

（1）根据三角形三边关系定理可得$a-b-c<0$，$a+c-b>0$，再去绝对值符号即可；

（2）根据$|a-7|+(b-2)^2=0$及三角形的周长是16求得a，b，c的值即可判断三角形的形状.

【详解】（1）解：Q a,b,c是三角形的三边长，

$\therefore b+c>a,a+c>b$.

$\therefore a-b-c<0$，$a+c-b>0$.

$\therefore |a-b-c|+3|a+c-b|$

$=(b+c-a)+3(a+c-b)$

$=b+c-a+3a+3c-3b$

$=2a-2b+4c$.

（2）此三角形是等腰三角形.

理由如下：

Q $|a-7|+(b-2)^2=0$，

$\therefore a-7=0,b-2=0$.

$\therefore a=7,b=2$.

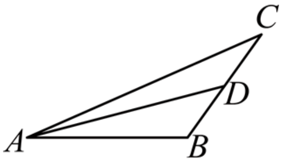
Q 三角形的周长是16，

$\therefore c=16-7-2=7$.

$\therefore a=c$.

$\therefore$此三角形是等腰三角形.

13．如图，在VABC中$(AB>BC)$，$AC=2BC$，BC边上的中线AD把VABC的周长分成50和35两部分，求AC和AB的长.



【答案】$AC=40$，$AB=25$

【分析】本题主要考查了三角形中线的性质和三边的关系，先根据 $AC=2BC$ 和三角形的中线列出方程求解，分类讨论①$AC+CD=50$，②$AC+CD=35$，注意答案是否满足条件，即是否满足题目给出的条件、是否满足三角形三边的关系．解题的关键是找到等量关系，列出方程．

【详解】解：设 $BD=CD=x$，则 $AC=2BC=4x$，

$\because BC$ 边上的中线 AD 把 $\triangle ABC$ 的周长分成 50 和 35 两部分，$AB>BC$，

①当 $AC+CD=50$，$AB+BD=35$ 时，

$4x+x=50$，

解得：$x=10$，

$\therefore AC=4x=4\times10=40$，

$BD=CD=10$，

$\therefore AB=35-BD=35-10=25$，

$\therefore AB=25>BC=20$，满足条件；

$\because BC+AB=20+25=45>AC=40$，满足三边关系，

$\therefore AC=40$，$AB=25$；

②当 $AC+CD=35$，$AB+BD=50$ 时，

$4x+x=35$，

解得：$x=7$，

$\therefore AC=4x=4\times7=28$，

$\therefore BD=CD=7$，

$AB=50-BD=50-7=43$，

$\because AC+BC=28+14=42<43=AB$，

$\therefore$ 不满足三角形的三边关系，

$\therefore$ 不合题意，舍去，

综上：$AC=40$，$AB=25$．

14．已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(m-2)x+2m-8=0$．

(1)求证：不论 m 为何值，方程总有两个实数根．

(2)若方程有一个根是负整数，求正整数 m 的值；

(3)若等腰三角形的其中一边为 4，列两边是这个方程的两根，求 m 的值．

【答案】(1)见解析

(2)1 或 2 或 3

(3)8

【分析】本题考查了一元二次方程及根的判别式、求根公式，等腰三角形定义及三角形三边关系.

（1）先计算根的判别式的值得到$\Delta=(m-6)^2\geq 0$，然后根据根的判别式的意义得到结论；

（2）利用求根公式得到$x_1=m-4$，$x_2=2$，则$m-4<0$，从而得到正整数m的值.

（2）分 4 为腰与 4 为底两种情况，求出方程的解，再验证是否能构成三角形，即可求解.

【详解】（1）证明：$\because \Delta=(m-2)^2-4(2m-8)$

$=m^2-12m+36$

$=(m-6)^2\geqslant 0$，

∴方程总有两个实数根；

（2）解：$\because x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{m-2\pm|m-6|}{2}$，

$\therefore x_1=m-4$，$x_2=2$，

∵方程有一个根是负整数，

$\therefore m-4<0$，

∴正整数m的值为 1 或 2 或 3.

（3）解：由（2）知$x_1=m-4$，$x_2=2$，

①当 4 为底边时，$m-4=2$，

$\because 2+2=4$，

∴等腰三角形不存在，舍去；

②当 4 为腰时，$m-4=4$，即$m=8$，

$\because 2+4>4$，

∴等腰三角形存在，

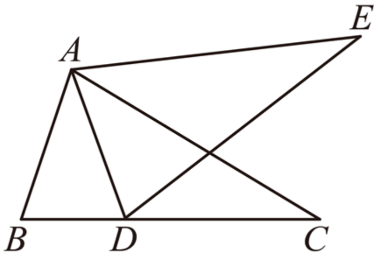
综上所述，m的值为 8.

考向二 三角形的内角和外角

在同一个三角形中：等角对等边；等边对等角；大角对大边；大边对大角．

典例引领

1．如图，$\triangle ABC \cong \triangle ADE$，点$D$在边$BC$上，$\angle EAC = 40^\circ$，则$\angle B$等于（　）



A．50°　　B．60°　　C．70°　　D．80°

【答案】C

【分析】本题考查了全等三角形的性质，先根据全等三角形的性质得到$AB = AD,\ \angle BAC = \angle DAE$，再证明$\angle BAD = \angle EAC = 40^\circ$，然后利用等腰三角形的性质和三角形内角和计算$\angle B$的度数．

【详解】解：$\because \triangle ABC \cong \triangle ADE$，

$\therefore AB = AD,\ \angle BAC = \angle DAE$，

$\therefore \angle BAD + \angle DAC = \angle DAC + \angle EAC$，

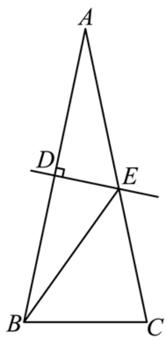
即$\angle BAD = \angle EAC = 40^\circ$，

$\because AB = AD$，

$\therefore \angle B = \angle ADB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAD) = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ$．

故选：C．

2．如图，等腰三角形ABC中，$AB = AC$，$\angle A = 24^\circ$，线段AB的垂直平分线交AB于点D，交AC于点E，连接BE，则$\angle CBE$等于（　　）



A．78°　　B．60°　　C．54°　　D．50°

【答案】C