基础公式

平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

完全平方公式 $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

立方和差公式 $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$

十字相乘法 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

万能求根公式 $\mathrm{a}x^2+bx+c=0 \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

韦达定理 $x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad x_1x_2=\frac{c}{a}$

幂的运算 $a^m\cdot a^n=a^{m+n} \quad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}} \quad a^{-m}=\frac{1}{a^m}$

对数运算 $\ln ab=\ln a+\ln b \quad \ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$

$\ln a^b=b\ln a \quad \ln e=1$

勾股定理 $a^2+b^2=c^2$

三角函数 $\sin\alpha=\frac{y}{r} \quad \cos\alpha=\frac{x}{r} \quad \tan\alpha=\frac{y}{x}$

$\sin^2x+\cos^2x=1$

$\tan\mathrm{x}=\frac{\sin\mathrm{x}}{\cos\mathrm{x}} \quad \cot x=\frac{1}{\tan x}$

$\sin 2\mathrm{x}=2\sin x\cos x$

$\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x=2\cos^2x-1=1-2\sin^2x$

$\sin^2x=\frac{1-\cos 2x}{2} \quad \cos^2x=\frac{1+\cos 2x}{2}$

$1+\tan^2x=\sec^2x \quad 1+\cot^2x=\csc^2x$

$\csc x=\frac{1}{\sin x} \quad \sec x=\frac{1}{\cos x}$

函数、连续、极限公式

等价无穷小 当□→0 时

$$\sin\square\to\tan\square\to\arcsin\square\to\arctan\square\to\square$$

$$e^{\square}-1\sim\square \qquad \ln(1+\square)\sim\square$$

$$1-\cos\square\sim\frac{\square^2}{2} \qquad \sqrt[n]{1+\square}\sim\frac{\square}{n}$$

$$\tan\square-\sin\square\sim\frac{\square^3}{2} \quad \tan\square-\square\sim\frac{\square^3}{3} \quad \square-\sin\square\sim\frac{\square^3}{6}$$

两个重要极限 当□→0 时

$$\lim_{\square\to0}\frac{\sin\square}{\square}=1 \qquad \lim_{\square\to0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=e$$

极限存在 ↔ 左极限=右极限

函数连续 ↔ 左极限=右极限=函数值

第一类间断点 左极限=右极限≠函数值 为可去间断点

左极限≠右极限 为跳跃间断点

第二类间断点 至少一个极限为无穷 为无穷间断点

极限在一个区间上波动 为震荡间断点

泰勒展开式

$$f(x)=\frac{f(x_0)}{0!}+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

麦克劳林展开式

$$f(x)\sim f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

导数与微分

定义 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$　$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

求导公式 $(\mathrm{C})'=0$

$(x^a)'=ax^{a-1}$　　$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$　　$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$

$(a^x)'=a^x\ln a$　　$(e^x)'=e^x$

$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$　　$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

$(\sin x)'=\cos x$　　$(\cos x)'=-\sin x$

$(\tan x)'=\sec^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$

$(\cot x)'=-\csc^2 x=-\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\sec x)'=\sec x\tan x$

$(\csc x)'=-\csc x\cot x$

$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

运算法则 $(u\pm v)'=u'\pm v'$

$(Cu)'=Cu'$

$(uv)'=\mathrm{u'v+uv'}$

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$　　$(v\neq 0)$

$\mathrm{y=u}(x)^{v(x)}$求导可化为$\ln y=v(x)\ln u(x)$

参数方程求导 $\begin{cases} x=\varphi(x) \\ y=\psi(x) \end{cases}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}$

隐函数求导 $\mathrm{F}(x,y)=0$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_y}{F_x}$

先求不定积分在求导 $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$

微分 $df(x)=f'(x)dx$

洛必达法则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$ $\left(\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty}\text{时可用}\right)$

单调性 $f'(x)>0$时，$\mathrm{y}=f'(x)$为增函数

$f'(x)<0$时，$\mathrm{y}=f'(x)$为减函数

极值点的判定：

① 使$f(x)=0$ ，求出驻点x_0

$x<x_0$时$f'(x)>0,\ x>x_0$时$f'(x)<0$,则$f(x)$在x_0处取得极大值

$x<x_0$时$f'(x)<0,\ x>x_0$时$f'(x)>0$,则$f(x)$在x_0处取得极小值

② 当$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)\neq 0$时

若$f''(x_0)<0,\ f(x_0)$取得最大值

若$f''(x_0)>0,\ f(x_0)$取得最小值

凹凸性 若$f''(x_0)>0,\ f(x)$为凹

若$f''(x_0)<0,\ f(x)$为凸

凹凸性发生改变的点叫拐点

导数存在 $\leftrightarrow$ 左导数=右导数

导数为曲线上某一点的切线的斜率

函数在一点可导 $\rightarrow$ 函数在该点连续

中值定理

零点定理　函数$y = f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)\cdot f(b) < 0$

那么存在$c \in (a,b)$,使得$f(c) = 0$

罗尔定理　函数$f(x)$满足以下条件：

① 在闭区间 [a,b] 上连续

② 在开区间 (a,b) 内可导

③ $f(a) = f(b)$

那么至少存在一点$\varepsilon \in (a,b)$,使得$f'(\varepsilon) = 0$

拉格朗日中值定理 函数$f(x)$满足以下条件：

① 在闭区间[a,b]上连续

② 在开区间 (a,b) 内可导

那么至少存在一点$\varepsilon \in (a,b)$,使得$f'(\varepsilon) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

柯西中值定理 函数$f(x)$ $g(x)$满足以下条件：

① 在闭区间[a,b]上连续

② 在开区间 (a,b) 内可导

③ 对任意$x \in (a,b)$，$g(x) \neq 0$

那么至少存在一点$\varepsilon \in (a,b)$,使得$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f\prime(\varepsilon)}{g\prime(\varepsilon)}$成立

积分中值定理 函数$f(x)$在$[a,b]$上连续

则在积分区间$[a,b]$上至少存在一个点ε

使得$\int_a^b f(x)dx = f(\varepsilon)(b-a)$

不定积分与定积分

不定积分基本公式：

$\int k dx = kx + C \quad (k \in R)$　　$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C \quad (a \neq -1)$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$　　$\int e^x dx = e^x + C$

$\int \sin x \, dx = \cos x + C$　　$\int \cos x \, dx = -\sin x + C$

$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$　　$\int \sec^2 x \, dx = -\tan x + C$

$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$　　$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$　　$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

不定积分扩展公式：

$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$

$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arcsin \frac{x}{a} + C$

$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

定积分公式：

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

$\int_a^b k dx = k(a-b)$

三角代换：

① 含$\sqrt{a^2 - x^2}$ 时，令$x = a \sin t$ ； $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

② 含$\sqrt{a^2 + x^2}$ 时，令$x = a \tan t$ ； $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

③ 含$\sqrt{x^2 - a^2}$ 时，令$x = a \sec t$ ； $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

分部积分 $\int u dv = uv - \int v du$

定积分技巧：

① 偶倍奇零

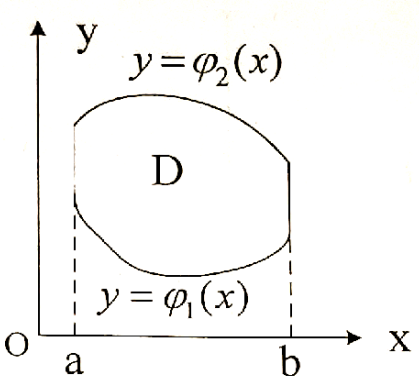
$f(x)$在$[-a,a]$上连续且为偶函数，则$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

$f(x)$在$[-a,a]$上连续且为奇函数，则$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

② $\frac{1}{4}$ 圆的面积　　$\int_{0}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{\pi}{4}a^2$

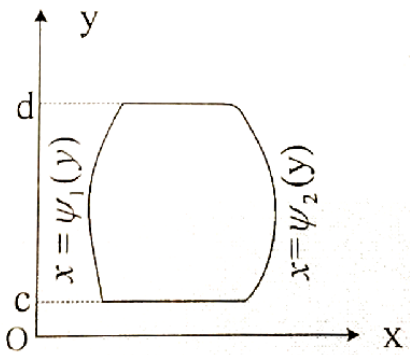
定积分的应用：

平面图形面积



基本型 1

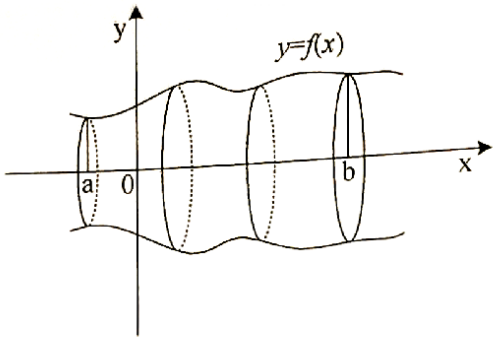
$A_1 = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]dx$



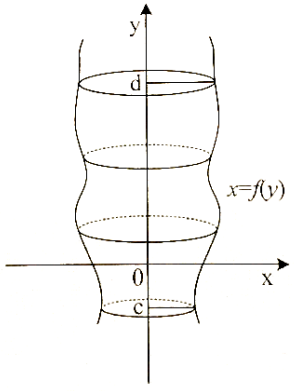
基本型 2

$A_2 = \int_c^d [\psi_2(y) - \psi_1(y)]dy$

旋转体体积



$V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx$



$V_y = \pi\int_c^d f^2(y)dy$

向量代数与空间解析几何

单位向量 模为 1 的向量，记为 e

两点距离公式 $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

方向余弦 $\cos\alpha = \frac{x}{|r|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$\cos\beta = \frac{y}{|r|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$\cos\gamma = \frac{z}{|r|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

向量的运算 设$a = (a_x, a_y, a_z)$，$b = (b_x, b_y, b_z)$

加减 $a \pm b = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$

数乘 $\mathrm{k}a = (ka_x, ka_y, ka_z)$

数量积（点乘） $a \cdot b = |a||b|\cos\theta = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$

向量积（叉乘） $a \times b = |a||b|\sin\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

向量关系 $a \parallel b \Leftrightarrow a \times b = 0 \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$

$a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0$

平面方程 $\vec{\mathrm{n}} = (A, B, C)$为法向量，垂直于平面

一般式 $\mathrm{A}x + By + Cz = 0$

点法式 $\mathrm{A}(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$

截距式 $\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1 \quad (ABC \neq 0)$

直线方程 $\vec{\mathrm{s}} = (m, n, p)$为方向向量，平行于直线

一般式方程 $\begin{cases} \mathrm{A}_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \mathrm{A}_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

参数方程 $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$ 点向式方程 $\frac{x-x_0}{m} + \frac{y-y_0}{n} + \frac{z-z_0}{p}$

多元函数微积分学

偏导数定义 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,\ y)-f(x_0,\ y_0)}{\Delta x}$ $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,\ y+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)}{\Delta y}$

隐函数的偏导数 $\mathrm{F}(x,y,z)=0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_X}{F_z}\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

全微分 $\mathrm{dz}=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$

二元函数极值：

设$\mathrm{z}=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处有极值

令$\begin{cases}f_x(x_0,y_0)=0\\ f_y(x_0,y_0)=0\end{cases}$ 求出驻点(x_0,y_0)

令$\begin{cases}f_{xx}(x_0,y_0)=A\\ f_{xy}(x_0,y_0)=B\\ f_{yy}(x_0,y_0)=C\end{cases}$

若：$\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2>0$时有极值，且当 A<0 时有极大值，A>0 时有极小值

$\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2<0$时没有极值

$\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2=0$时可能有极值，也可能没极值，还需另作讨论

拉格朗日乘数法：

要找函数$\mathrm{z}=f(x,y)$在附加条件$\varphi(x,y)$=0 的可能极值点

先作拉格朗日函数$\mathrm{L}(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

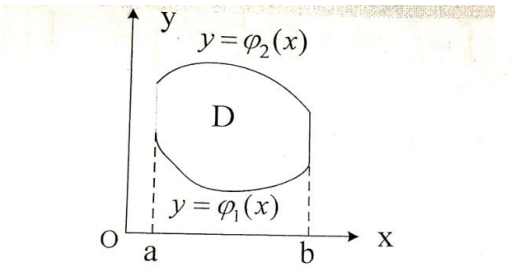
令$\begin{cases}f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0\\ f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0\\ \varphi(x,y)=0\end{cases}$ 解出x,y,λ

则得到的(x,y)就是函数$f(x,y)$附加条件$\varphi(x,y)$=0 的可能极值点

二重积分的计算方法

直角坐标计算二重积分

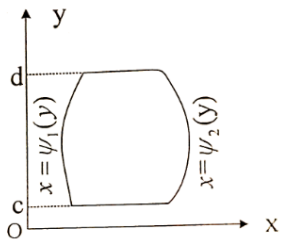
X 型



$$D:\begin{cases}\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\\ a\le x\le b\end{cases}$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

Y 型



$$D:\begin{cases}\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\\ c\le y\le d\end{cases}$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$

极坐标计算二重积分

$$令\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\quad\begin{cases}\varphi_1(\theta)\le r\le\varphi_2(\theta)\\ \alpha\le\theta\le\beta\end{cases}$$

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,rdrd\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,rdr$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/796002240035010054