

湖南省怀化市铁路第一中学 2024-2025 学年高一上学期入学

分班考试数学模拟卷

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、单选题

1. 已知 a 是任意有理数, 在下面各说法中:

(1) 方程 $ax=0$ 的解是 $x=1$; (2) 方程 $ax=a$ 的解是 $x=1$;

(3) 方程 $ax=1$ 的解是 $x=\frac{1}{a}$; (4) 方程 $|a|x=a$ 的解是 $x=\pm 1$.

结论正确的个数是 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

2. 若关于 x 的一元一次不等式组 $\begin{cases} 2x-1 \leq 3(x-2) \\ \frac{x-a}{2} > 1 \end{cases}$ 的解集为 $x \geq 5$, 且关于 y 的分式方程

$\frac{y}{y-2} + \frac{2a}{2-y} = -3$ 有非负整数解, 则符合条件的所有整数 a 的和为 ()

- A. -1 B. -2 C. -3 D. -4

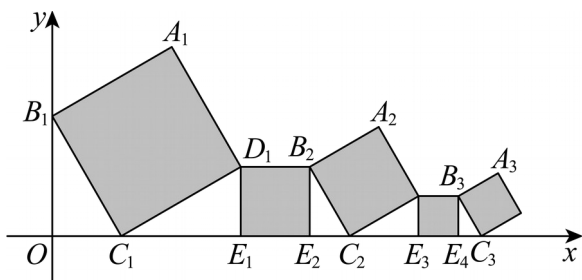
3. 设三角形的三边 a 、 b 、 c 满足 $a^4 - b^4 - c^4 - 2b^2c^2 = 0$, 则这个三角形的形状是 ()

- A. 直角三角形 B. 等腰三角形 C. 等边三角形 D. 无法确定

4. 已知在平面直角坐标系中放置了 5 个如图所示的正方形 (用阴影表示), 点 B_1 在 y 轴上,

点 C_1 、 E_1 、 E_2 、 C_2 、 E_3 、 E_4 、 C_3 在 x 轴上. 若正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 1, $\angle B_1C_1O = 60^\circ$

, $B_1C_1 \parallel B_2C_2 \parallel B_3C_3$, 则点 A_3 到 x 轴的距离是 ()



A. $\frac{\sqrt{3}+3}{18}$

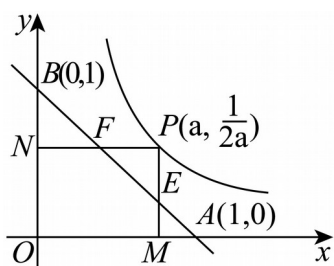
B. $\frac{\sqrt{3}+1}{18}$

C. $\frac{\sqrt{3}+3}{6}$

D. $\frac{\sqrt{3}+1}{6}$

5. 如图, P 是函数 $y = \frac{1}{2x} (x > 0)$ 图象上一点, 直线 $y = -x + 1$ 分别交 x 轴、 y 轴于点 A 、 B ,

作 $PM \perp x$ 轴于点 M , 交 AB 于点 E , 作 $PN \perp y$ 轴于点 N , 交 AB 于点 F . 则 $AF \cdot BE$ 的值为 ()



A. 2

B. $\sqrt{2}$

C. 1

D. $\frac{1}{2}$

6. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的大致图象如图所示, 顶点坐标为 $(1, -4a)$, 点 $A(4, y_1)$ 是

该抛物线上一点, 若点 $D(x_2, y_2)$ 是抛物线上任意一点, 有下列结论:

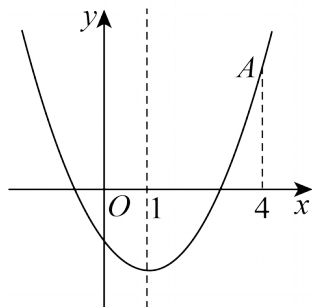
① $4a - 2b + c > 0$;

② 若 $y_2 > y_1$, 则 $x_2 > 4$;

③ 若 $0 \leq x_2 \leq 4$, 则 $0 \leq y_2 \leq 5a$;

④若方程 $a(x+1)(x-3)=-1$ 有两个实数根 x_1 和 x_2 ，且 $x_1 < x_2$ ，则 $-1 < x_1 < x_2 < 3$ 。

其中正确结论的个数是（ ）



- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

7. 已知 x_1 、 x_2 是一元二次方程 $x^2 + 3x - n = 0$ 的两个不相等的实数根， x_3 、 x_4 是一元二次

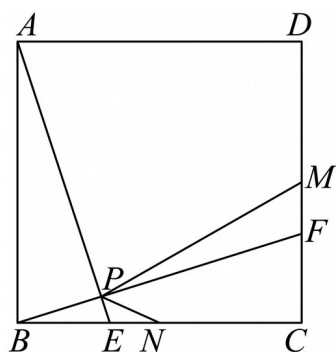
方程 $x^2 - 3x - n = 0$ 的两个不相等的实数根，其中 $n > 0$ 。若 $|x_1 - x_4| = 2|x_2 - x_3|$ ，则 n 的值

为（ ）

- A. 8 B. 9 C. 12 D. 18

8. 如图，正方形 $ABCD$ 边长为 4，点 E ， F 分别在边 BC ， CD 上，且满足 $BE = CF$ ， AE ，

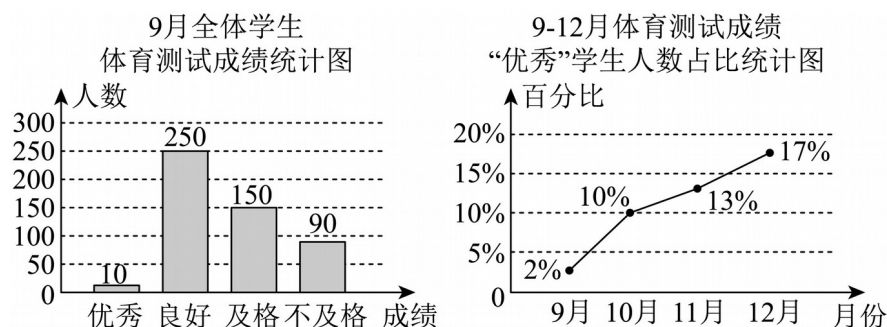
BF 交于 P 点， M ， N 分别是 CD ， BC 的中点，则 $\frac{1}{2}PM + PN$ 的最小值为（ ）



- A. $\sqrt{17}$ B. $2\sqrt{5}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\frac{4}{5}\sqrt{5}$

二、多选题

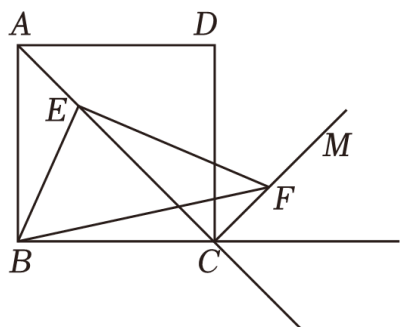
9. 随着中考的临近，某校初三年级连续四个月开展了体育模拟测试，并将测试成绩进行整理，最终绘制了如图所示的统计图（四次参加体育模拟测试的学生人数不变），下列四个结论中正确的是（ ）



- A. 10月测试成绩为“优秀”的学生有40人
- B. 9月体育测试中学生的及格率为30%
- C. 从9月到12月，测试成绩为“优秀”的学生人数在总人数中的占比逐渐增长
- D. 12月增长的“优秀”人数比11月增长的“优秀”人数多
10. 下列函数中，当 $x < -1$ 时，函数值 y 随 x 的增大而增大依次是（ ）

A. $y = -2x + 1$ B. $y = 2x$ C. $y = -\frac{2}{x+1}$ D. $y = \frac{2}{x}$

11. 如图，点 E 是正方形 $ABCD$ 对角线 AC 上一点（不与点 A ，点 C 重合），点 F 是正方形 $ABCD$ 的外角 $\angle DCN$ 的角平分线 QM 上一点，且 $CF = AE$ ，连接 BE ， EF 。下列说法正确的是（ ）



- A. 当点 E 是 AC 的中点时，四边形 $BEFC$ 是平行四边形

B. $\frac{BE}{EF}$ 的值为常数

C. 当 $\angle ABE = 30^\circ$ 时, $EF = 2CF$

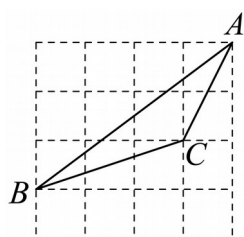
D. 当 $CE = AB$ 时, $\angle EFC = 75^\circ$

三、填空题

12. 2^{55} , 3^{44} , 5^{33} , 6^{22} 这四个数中最小的数是_____.

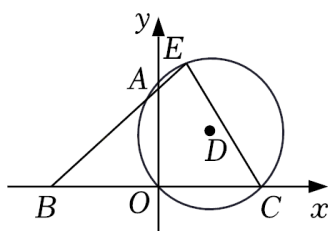
13. 如图, 在 4×4 正方形网格中, 每个小正方形的边长为 1, 顶点为格点. 若 $\triangle ABC$ 的顶

点均是格点, 则 $\cos \angle CBA$ 的值是_____.



14. 如图, 点 A 、 B 、 C 均在坐标轴上, $AO = BO = CO = 1$, 过 A 、 O 、 C 作 $\odot D$, E 是

$\odot D$ 上任意一点, 连结 CE , BE , 则 $CE^2 + BE^2$ 的最大值是_____.



四、解答题

15. (1) 解方程 $x^2 - 1 = 2(x + 1)$

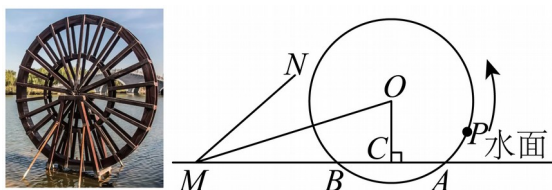
(2) 先化简，再求值： $\left(1 - \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - y^2}\right) \div \frac{1}{x^2 + xy}$ ，其中 x 、 y 满足 $\begin{cases} 2x + y = 3\sqrt{2} + 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$ 。

16. 如图，筒车是我国古代利用水力驱动的灌溉工具，唐代陈廷章在《水轮赋》中写道：

“水能利物，轮乃曲成”。如图，半径为 3m 的筒车 $\odot O$ 按逆时针方向每分钟转 1 圈，筒车

与水面分别交于点 A 、 B ，筒车的轴心 O 距离水面的高度 OC 长为 2.4m ，筒车上均匀分布

着若干个盛水筒。若以某个盛水筒 P 刚浮出水面时开始计算时间。



(1) 浮出水面 2.5 秒后，盛水筒 P 距离水面约多高？

(2) 若接水槽 MN 所在直线是 $\odot O$ 的切线，且与直线 AB 交于点 M ，已知 $MO = 8\text{cm}$ ，求盛水

筒 P 从最高点开始，至少经过多长时间可以将水倒入水槽 MN 中（即点 P 恰好在直线 MN 上）？

（参考数据 $\sin 37.5^\circ \approx 0.6$ ， $\cos 37.5^\circ \approx 0.8$ ， $\sin 22^\circ = \cos 68^\circ \approx \frac{3}{8}$ ， $\sin 17^\circ = \cos 73^\circ \approx 0.3$ ）

17. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2k + 3)x + k^2 + 3k + 2 = 0$ 。

(1) 判断方程根的情况；

(2) 若方程的两根 x_1 、 x_2 满足 $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 6$ ，求 k 值；

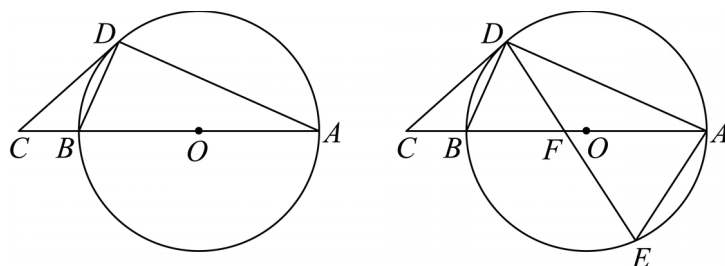
(3) 若 $\triangle ABC$ 的两边 AB 、 AC 的长是方程的两根，第三边 BC 的长为 5，

① 则 k 为何值时， $\triangle ABC$ 是以 BC 为斜边的直角三角形？

② k 为何值时, $\triangle ABC$ 是等腰三角形, 并求出 $\triangle ABC$ 的周长.

18. 如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, D 为 $\odot O$ 上一点, 连接 AD , BD , C 为 AB 延长线上一点,

连接 CD , 且 $\angle BDC = \angle A$.



(1) 求证: CD 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $\odot O$ 的半径为 2, $BC = 1$,

① 求 $\triangle ABD$ 的面积;

② 点 E 为 $\odot O$ 上一点, 连接 DE 交半径 OB 于点 F , 若 $EA = EF$, 求 $DF \cdot FE$ 的长.

19. 若函数 G 在 $m \leq x \leq n$ ($m < n$) 上的最大值记为 $y_{\max}$, 最小值记为 $y_{\min}$, 且满足

$y_{\max} - y_{\min} = 1$, 则称函数 G 是在 $m \leq x \leq n$ 上的“美好函数”.

(1) 函数① $y = x + 1$; ② $y = |2x|$; ③ $y = \frac{1}{2}x^2$, 其中函数_____是在 $1 \leq x \leq 2$ 上的“美好函数”;

(填序号)

(2) 已知函数 $G: y = ax^2 - 2ax - 3a$ ($a \neq 0$).

① 函数 G 是在 $1 \leq x \leq 2$ 上的“美好函数”, 求 a 的值;

② 当 $a = 1$ 时, 函数 G 是在 $t \leq x \leq t + 1$ 上的“美好函数”, 请直接写出 t 的值;

(3) 已知函数 $G: y = ax^2 - 2ax - 3a$ ($a > 0$), 若函数 G 是在 $m + 2 \leq x \leq 2m + 1$ (m 为整数) 上的

“美好函数”，且存在整数 k ，使得 $k = \frac{y_{\max}}{y_{\min}}$ ，求 a 的值.

参考答案:

1. A

【分析】根据一元一次方程的求解，结合对 a 分类讨论即可求解.

【详解】当 $a \neq 0$ 时，方程 $ax = 0$ 的解是 $x = 0$ ；故 (1) 错误，

由方程 $ax = a$ 可得 $a(x-1) = 0$ ，故 $a \neq 0$ 时，解是 $x = 1$ ；当 $a = 0$ 时，方程的解为一切实数，

故 (2) 错误，

当 $a = 0$ 时，方程 $ax = 1$ 无解，故 (3) 错误，

当 $a > 0$ 时，方程 $|a|x = a$ 为 $ax = a$ ，故解为 $x = 1$ ，

当 $a < 0$ 时，方程 $|a|x = a$ 为 $-ax = a$ ，故解为 $x = -1$ ，当 $a = 0$ 时，方程的解为一切实数，

故 (4) 错误，

故选：A

2. D

【分析】根据一元一次不等式组的求解可得 $a < 3$ ，进而根据分式方程可得 $y = \frac{3+a}{2}$ ，即可

根据非负整数解求解.

$$\text{【详解】} \begin{cases} 2x-1 \leq 3(x-2) \text{①} \\ \frac{x-a}{2} > 1 \text{②} \end{cases},$$

解不等式①得： $x \geq 5$ ，解不等式②得： $x > 2+a$ ，

$\because$ 不等式组的解集为 $x \geq 5$ ， $\therefore 2+a < 5$ ， $\therefore a < 3$ ，

$$\frac{y}{y-2} + \frac{2a}{2-y} = -3, \quad y-2a = -3(y-2),$$

$$\text{解得： } y = \frac{3+a}{2},$$

∵ 分式方程有非负整数解，

$$\therefore \frac{3+a}{2} \geq 0 \text{ 且 } \frac{3+a}{2} \neq 2,$$

$$\therefore a \geq -3 \text{ 且 } a \neq 1,$$

综上所述： $-3 \leq a < 3$ 且 $a \neq 1$ ，

∴ 符合条件的所有整数 a 的值为： $-3, -1$ ，

∴ 符合条件的所有整数 a 的值的和为： -4 ，

故选： D.

3. A

【分析】根据完全平方公式可得 $a^2 = b^2 + c^2$ ，即可求解.

【详解】由 $a^4 - b^4 - c^4 - 2b^2c^2 = 0$ 可得 $a^4 = b^4 + c^4 + 2b^2c^2 = (b^2 + c^2)^2$ ，

进而可得 $a^2 = b^2 + c^2$ ，

故三角形为直角三角形，

故选： A

4. D

【分析】由已知可得 $\angle B_3C_3O = \angle B_2C_2O = \angle B_1C_1O = 60^\circ$ ，然后利用特殊角的三角函数依次

求出各正方形边长，如图，过 A_3 延长正方形的边交 x 轴于 M ，过 A_3 作 $A_3N \perp x$ 轴于 N ，求

出 A_3N 即可.

【详解】因为 $B_1C_1 \parallel B_2C_2 \parallel B_3C_3$ ， $\angle B_1C_1O = 60^\circ$ ，

所以 $\angle B_3C_3O = \angle B_2C_2O = \angle B_1C_1O = 60^\circ$,

因为正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 1,

$$\text{所以 } OC_1 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}, C_1E_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$E_1E_2 = D_1E_1 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}, E_2C_2 = \frac{\frac{1}{2}}{\tan 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

$$C_2E_3 = B_2E_2 = \frac{1}{2}, E_3E_4 = \frac{1}{2} \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

$$E_4C_3 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{\tan 60^\circ} = \frac{1}{6},$$

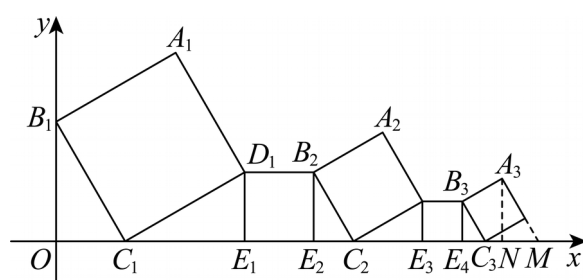
$$\text{所以 } B_3C_3 = 2E_4C_3 = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3},$$

如图, 过 A_3 延长正方形的边交 x 轴于 M , 过 A_3 作 $A_3N \perp x$ 轴于 N ,

$$\text{则 } A_3M = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \tan 30^\circ = \frac{3 + \sqrt{3}}{9},$$

$$\text{所以 } A_3N = A_3M \sin 60^\circ = \frac{3 + \sqrt{3}}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{6}.$$

故选: D



5. C

【分析】根据 P 点坐标可得 M ， N 坐标，进而可得 $F(1-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a})$ ， $E(a, 1-a)$ ，即可求解。

【详解】 $\because P$ 的坐标为 $(a, \frac{1}{2a})$ ，且 $PN \perp OB$ ， $PM \perp OA$ ，

$\therefore N$ 的坐标为 $(0, \frac{1}{2a})$ ， M 点的坐标为 $(a, 0)$ ，

$$\therefore BN = 1 - \frac{1}{2a},$$

在直角三角形 BNF 中， $\angle NBF = 45^\circ$ ($OB = OA = 1$ ，三角形 OAB 是等腰直角三角形)，

$$\therefore NF = BN = 1 - \frac{1}{2a},$$

$\therefore F$ 点的坐标为 $(1 - \frac{1}{2a}, \frac{1}{2a})$ ，

同理可得出 E 点的坐标为 $(a, 1-a)$ ，

$$\therefore AF^2 = (-\frac{1}{2a})^2 + (\frac{1}{2a})^2 = \frac{1}{2a^2}, \quad BE^2 = a^2 + (-a)^2 = 2a^2,$$

$$\therefore AF^2 \cdot BE^2 = \frac{1}{2a^2} \cdot 2a^2 = 1, \quad \text{即 } AF \cdot BE = 1.$$

故选：C

6. B

【分析】根据二次函数的性质以及图象可得 $b = -2a, c = -3a$ ，即可代入求解①，根据图象以及对称性即可求解②③④。

【详解】由题意可知：
$$\begin{cases} a > 0 & b = -2a, c = -3a \\ -\frac{b}{2a} = 1 \\ a + b + c = -4a \end{cases}, \text{ 故 } ,$$

对于①, $4a - 2b + c = 4a - 2(-2a) - 3a = 5a > 0$; 故①正确,

对于②, 由于对称轴为 $x = 1$, $x = 4, x = -2$ 对应的函数值均为 y_1 , 因此若 $y_2 > y_1$, 则 $x_2 > 4$ 或

$x_2 < -2$; 故②错误,

对于③, 若 $x_2 = 1$, 则 $y_2 = -4a < 0$; 因此③错误,

对于④, 设 $f(x) = a(x+1)(x-3)$, 则其图象关于 $x = 1$ 对称, 且 $x = -1$ 和 $x = 3$ 是函数与 x 轴交

点的横坐标, 故当 $f(x) = -1$ 时, 则 $-1 < x_1 < x_2 < 3$, ④正确

故选: B

7. D

【分析】根据根与系数的关系; 二次函数的图象; 抛物线与 x 轴的交点, 即可结合函数图象求解.

【详解】将方程 $x^2 + 3x - n = 0$ 和 $x^2 - 3x - n = 0$ 转化成函数 $y = x^2 + 3x - n$ 和

$$y = x^2 - 3x - n,$$

如图所示, $\therefore$ 两条抛物线都交于点 $(0, -n)$,

$$\therefore |x_1 - x_4| = 2|x_2 - x_3|,$$

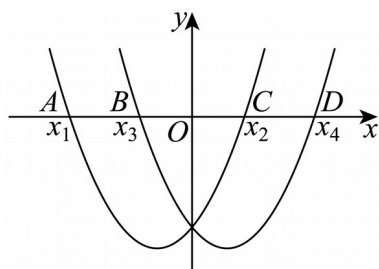
$$\therefore OB = OC = AB = CD,$$

$\therefore$ 两条抛物线的对称直线的 x 的值为 $-\frac{3}{2}$ 和 $\frac{3}{2}$,

$$\therefore OB = OC = AB = CD = \left| -\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \right| = 3,$$

$$\therefore x_2 = 3, \therefore C(3, 0),$$

将点 C 代入 $y = x^2 + 3x - n$ 得: $n = 18$.



故选: D.

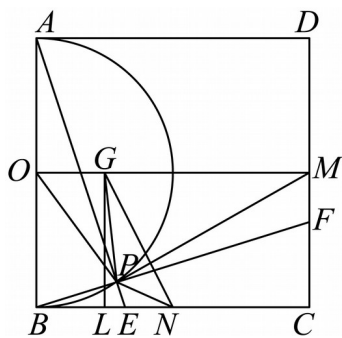
8. C

【分析】先利用正方形的性质判定 $\angle APB = 90^\circ$, 从而得出 P 的轨迹为圆, 取 AB 中点 O ,

连接 OM , 在线段 OM 上取 $OG = 1$, 结合相似三角形的判定得出 $\frac{1}{2}PM = PG$, 根据三角形

三边关系及勾股定理计算即可.

【详解】



如图所示, 易证 $\triangle ABE \cong \triangle BCF$, 则 $\angle FBC = \angle BAE$,

所以 $\angle FBC + \angle FBA = \angle BAE + \angle FBA = 90^\circ$, 则 $\angle APB = 90^\circ$,

即 P 点在以 AB 为直径的半圆上运动,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/796122024225010213>