

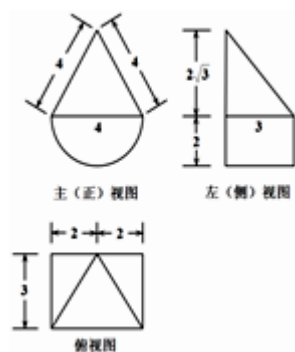
湖北省武汉市第 39 中学 2023 年高三 3 月高考一模数学试题

请考生注意：

1. 请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用 0.5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。
2. 答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 一个几何体的三视图如图所示，则这个几何体的体积为（ ）



- A. $\frac{32\sqrt{3}}{3} + 6\pi$ B. $8\sqrt{3} + 6\pi$
- C. $\frac{32\sqrt{3}}{3} + \frac{16\pi}{3}$ D. $8\sqrt{3} + \frac{16\pi}{3}$

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{x+1} + 2, & x \leq 0, \\ |\log_2 x|, & x > 0, \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $[f(x)]^2 - 2af(x) + 3a = 0$ 有六个不相等的实数根，则实数 a 的取值范围为（ ）

- A. $\left(3, \frac{16}{5}\right)$ B. $\left[3, \frac{16}{5}\right]$ C. $(3, 4)$ D. $(3, 4]$

3. 设非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, 满足 $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{a}| = 1$, 且 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 的夹角为 θ , 则“ $|\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{3}$ ”是“ $\theta = \frac{\pi}{3}$ ”的（ ）.

- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
- C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域都为 R , 且 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 则下列结论正确的是（ ）

- A. $f(x) \cdot g(x)$ 是偶函数 B. $|f(x)| \cdot g(x)$ 是奇函数
- C. $f(x) \cdot |g(x)|$ 是奇函数 D. $|f(x) \cdot g(x)|$ 是奇函数

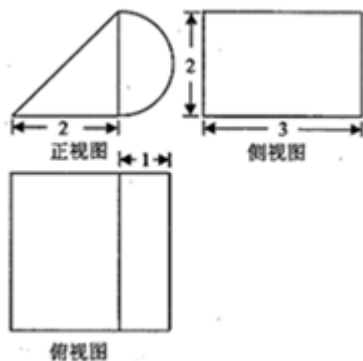
5. 若 $(1+2ai)i = 1-bi$, 其中 $a, b \in R$, 则 $|a+bi| =$ ().

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. 5

6. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid y = \sqrt{4-x}\}$, $B = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{Z}\}$, 则 $A \cap B =$ ()

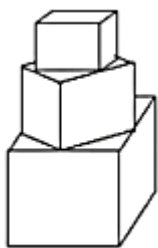
- A. $[0, 4]$ B. $\{0, 2, 4\}$ C. $\{2, 4\}$ D. $[2, 4]$

7. 某几何体的三视图如图所示(单位: cm), 则该几何体的体积等于 () cm^3



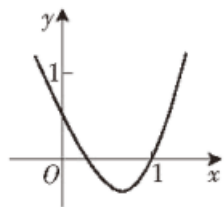
- A. $4 + \frac{2\pi}{3}$ B. $4 + \frac{3\pi}{2}$ C. $6 + \frac{2\pi}{3}$ D. $6 + \frac{3\pi}{2}$

8. 有一改形塔几何体由若干个正方体构成, 构成方式如图所示, 上层正方体下底面的四个顶点是下层正方体上底面各边的中点. 已知最底层正方体的棱长为 8, 如果改形塔的最上层正方体的边长小于 1, 那么该塔形中正方体的个数至少是 ()



- A. 8 B. 7 C. 6 D. 4

9. 如图是二次函数 $f(x) = x^2 - bx + a$ 的部分图象, 则函数 $g(x) = a \ln x + f'(x)$ 的零点所在的区间是 ()



- A. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ B. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ C. $(1, 2)$ D. $(2, 3)$

10. 根据散点图, 对两个具有非线性关系的相关变量 x, y 进行回归分析, 设 $u = \ln y$, $v = (x-4)^2$, 利用最小二乘法, 得到线性回归方程为 $\hat{u} = -0.5v + 2$, 则变量 y 的最大值的估计值是 ()

- A. e B. e^2 C. $\ln 2$ D. $2\ln 2$

11. 在区间 $[-1,1]$ 上随机取一个数 k ，使直线 $y = k(x+3)$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相交的概率为（ ）

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

12. 已知 $\triangle ABC$ 中， $|\overrightarrow{BC}| = 2, \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -2$. 点 P 为 BC 边上的动点，则 $\overrightarrow{PC} \cdot (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 的最小值为（ ）

- A. 2 B. $-\frac{3}{4}$ C. -2 D. $-\frac{25}{12}$

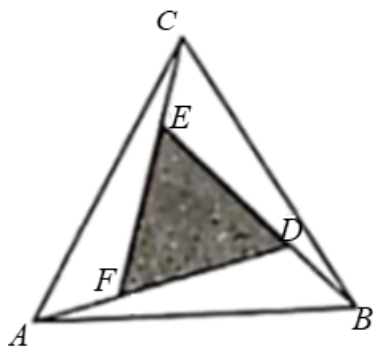
二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知 $A(0, a), B(3, a+4)$ ，若圆 $x^2 + y^2 = 9$ 上有且仅有四个不同的点 C ，使得 $\triangle ABC$ 的面积为5，则实数 a 的取值范围是_____.

14. 若函数 $f(x) = x^2 + \frac{ax^2}{2^x + 1}$ 为奇函数，则 $a =$ _____.

15. 等边 $\triangle ABC$ 的边长为2，则 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 方向上的投影为_____.

16. 如图 $VABC$ 是由3个全等的三角形与中间的一个小等边三角形拼成的大等边三角形，设 $DF = 2AF$ ， $AB = \sqrt{13}$ ，则 $VEDF$ 的面积为_____.



三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分) 已知函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ， $0 < x < \pi$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程；

(2) 当 $0 < m < \pi$ 时，证明： $f(x) < m \ln x + \frac{\pi}{x}$ 对任意 $x \in (0, \pi)$ 恒成立.

18. (12分) 在世界读书日期间，某地区调查组对居民阅读情况进行了调查，获得了一个容量为200的样本，其中城镇居民140人，农村居民60人.在这些居民中，经常阅读的城镇居民有100人，农村居民有30人.

(1) 填写下面列联表，并判断能否有99%的把握认为经常阅读与居民居住地有关？

	城镇居民	农村居民	合计
经常阅读	100	30	

不经常阅读			
合计			200

(2) 调查组从该样本的城镇居民中按分层抽样抽取 7 人，参加一次阅读交流活动，若活动主办方从这 7 位居民中随机选取 2 人作交流发言，求被选中的 2 位居民都是经常阅读居民的概率.

附： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a + b + c + d$.

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

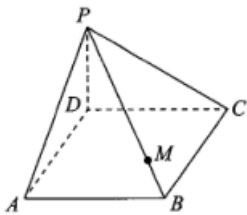
19. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \cos \varphi \\ y = |\sin \varphi| \end{cases}$ (φ 为参数). 在以坐标原点为极点， x

轴的正半轴为极轴的极坐标系中，直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) = 3$.

- (1) 求曲线 C 的普通方程及直线 l 的直角坐标方程；
- (2) 求曲线 C 上的点到直线 l 的距离的最大值与最小值.

20. (12 分) 如图，在正四棱锥 $P-ABCD$ 中， $AB = 2$ ， $\angle APC = \frac{\pi}{3}$ ， M 为 PB 上的四等分点，即

$$BM = \frac{1}{4}BP.$$



- (1) 证明：平面 $AMC \perp$ 平面 PBC ；
- (2) 求平面 PDC 与平面 AMC 所成锐二面角的余弦值.

21. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_1 = 1$ ， $a_2 = 3$ ，且 $a_{n+2} = (-1)^n (a_n - 1) + 2a_n + 1$ ， $n \in \mathbb{N}^*$.

- (I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；
- (II) 设 $b_n = \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}$ ， S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，求证： $S_n \leq \frac{2^n - n}{2^n + 1}$.

22. (10 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3} + t \\ y = -\sqrt{3}t \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴正半

轴为极轴, 建立极坐标系, 已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 4 \cos \theta$.

(1) 求直线 l 的普通方程与曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 设点 $M(0, 3)$, 直线 l 与曲线 C 交于不同的两点 A 、 B , 求 $\frac{1}{|MA|} + \frac{1}{|MB|}$ 的值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. B

【解析】

还原几何体可知原几何体为半个圆柱和一个四棱锥组成的组合体, 分别求解两个部分的体积, 加和得到结果.

【详解】

由三视图还原可知, 原几何体下半部分为半个圆柱, 上半部分为一个四棱锥

半个圆柱体积为: $V_1 = \frac{1}{2} \pi r^2 h = \frac{1}{2} \pi \times 2^2 \times 3 = 6\pi$

四棱锥体积为: $V_2 = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \times 4 \times 3 \times 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

原几何体体积为: $V = V_1 + V_2 = 8\sqrt{3} + 6\pi$

本题正确选项: B

【点睛】

本题考查三视图的还原、组合体体积的求解问题, 关键在于能够准确还原几何体, 从而分别求解各部分的体积.

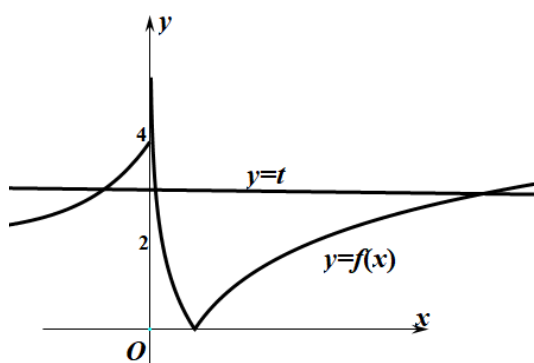
2. B

【解析】

令 $f(x) = t$, 则 $t^2 - 2at + 3a = 0$, 由图象分析可知 $t^2 - 2at + 3a = 0$ 在 $(2, 4]$ 上有两个不同的根, 再利用一元二次方程根的分布即可解决.

【详解】

令 $f(x)=t$ ，则 $t^2-2at+3a=0$ ，如图



$y=t$ 与 $y=f(x)$ 顶多只有 3 个不同交点，要使关于 x 的方程 $[f(x)]^2-2af(x)+3a=0$ 有

六个不相等的实数根，则 $t^2-2at+3a=0$ 有两个不同的根 $t_1, t_2 \in (2, 4]$ ，

设 $g(t)=t^2-2at+3a$ 由根的分布可知，

$$\begin{cases} \Delta = 4a^2 - 12a > 0 \\ a \in (2, 4) \\ g(2) > 0 \\ g(4) \geq 0 \end{cases}, \text{解得 } 3 < a \leq \frac{16}{5}.$$

故选：B.

【点睛】

本题考查复合方程根的个数问题，涉及到一元二次方程根的分布，考查学生转化与化归和数形结合的思想，是一道中档题.

3. C

【解析】

利用数量积的定义可得 θ ，即可判断出结论.

【详解】

解： $|\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{3}$ ， $\therefore \vec{b}^2 + \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} = 3$ ， $\therefore 2^2 + 1 - 2 \times 2 \times 1 \times \cos \theta = 3$ ，

解得 $\cos \theta = \frac{1}{2}$ ， $\theta \in [0, \pi]$ ，解得 $\theta = \frac{\pi}{3}$ ，

$\therefore |\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{3}$ 是 “ $\theta = \frac{\pi}{3}$ ” 的充分必要条件.

故选：C.

【点睛】

本题主要考查平面向量数量积的应用，考查推理能力与计算能力，属于基础题.

4. C

【解析】

根据函数奇偶性的性质即可得到结论.

【详解】

解: $Q f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数,

$$\therefore f(-x) = -f(x), \quad g(-x) = g(x),$$

$f(-x)g(-x) = -f(x)g(x)$, 故函数是奇函数, 故 A 错误,

$|f(-x)|g(-x) = |f(x)|g(x)$ 为偶函数, 故 B 错误,

$f(-x)g(g(-x)) = -f(x)g(g(x))$ 是奇函数, 故 C 正确.

$|f(-x)g(-x)| = |f(x)g(x)|$ 为偶函数, 故 D 错误,

故选: C .

【点睛】

本题主要考查函数奇偶性的判断, 根据函数奇偶性的定义是解决本题的关键.

5. C

【解析】

试题分析: 由已知, $-2a + i = 1 - bi$, 根据复数相等的充要条件, 有 $a = -\frac{1}{2}$, $b = -1$

$$\text{所以 } |a + bi| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \text{ 选 } C$$

考点: 复数的代数运算, 复数相等的充要条件, 复数的模

6. B

【解析】

计算 $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 再计算交集得到答案

【详解】

$$A = \{x \in N \mid y = \sqrt{4-x}\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}, B = \{x \mid x = 2n, n \in Z\} \text{ 表示偶数,}$$

故 $A \cap B = \{0, 2, 4\}$.

故选: B .

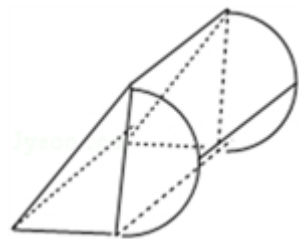
【点睛】

本题考查了集合的交集, 意在考查学生的计算能力.

7. D

【解析】

解：根据几何体的三视图知，该几何体是三棱柱与半圆柱体的组合体，



结合图中数据，计算它的体积为：

$$V = V_{\text{三棱柱}} + V_{\text{半圆柱}} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 1 + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 \times 1 = (6 + 1.5\pi) \text{ cm}^3.$$

故答案为 $6 + 1.5\pi$.

点睛：根据几何体的三视图知该几何体是三棱柱与半圆柱体的组合体，结合图中数据计算它的体积即可．

8. A

【解析】

则从下往上第二层正方体的棱长为： $\sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ ，从下往上第三层正方体的棱长为： $\sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4$ ，

从下往上第四层正方体的棱长为： $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ ，以此类推，能求出改形塔的最上层正方体的边长小于 1 时该塔形中正方体的个数的最小值的求法．

【详解】

最底层正方体的棱长为 8，

则从下往上第二层正方体的棱长为： $\sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ ，

从下往上第三层正方体的棱长为： $\sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4$ ，

从下往上第四层正方体的棱长为： $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ ，

从下往上第五层正方体的棱长为： $\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$ ，

从下往上第六层正方体的棱长为： $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ，

从下往上第七层正方体的棱长为： $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$ ，

从下往上第八层正方体的棱长为： $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

∴改形塔的最上层正方体的边长小于 1，那么该塔形中正方体的个数至少是 8．

故选：A．

【点睛】

本小题主要考查正方体有关计算，属于基础题.

9. B

【解析】

根据二次函数图象的对称轴得出 b 范围， y 轴截距，求出 a 的范围，判断 $g(x)$ 在区间端点函数值正负，即可求出结论.

【详解】

$\because f(x) = x^2 - bx + a$ ，结合函数的图象可知，

二次函数的对称轴为 $x = \frac{b}{2}$ ， $0 < f(0) = a < 1$ ，

$\frac{1}{2} < x = \frac{b}{2} < 1$ ， $\therefore f'(x) = 2x - b$ ，

所以 $g(x) = a \ln x + f'(x) = a \ln x + 2x - b$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

又因为 $g\left(\frac{1}{2}\right) = a \ln \frac{1}{2} + 1 - b < 0$ ， $g(1) = a \ln 1 + 2 - b > 0$ ，

所以函数 $g(x)$ 的零点所在的区间是 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

故选:B.

【点睛】

本题考查二次函数的图象及函数的零点，属于基础题.

10. B

【解析】

将 $u = \ln y$ ， $v = (x-4)^2$ 代入线性回归方程 $\hat{u} = -0.5v + 2$ ，利用指数函数和二次函数的性质可得最大估计值.

【详解】

解：将 $u = \ln y$ ， $v = (x-4)^2$ 代入线性回归方程 $\hat{u} = -0.5v + 2$ 得：

$\ln y = -0.5(x-4)^2 + 2$ ，即 $y = e^{-0.5(x-4)^2 + 2}$ ，

当 $x = 4$ 时， $-0.5(x-4)^2 + 2$ 取到最大值 2，

因为 $y = e^x$ 在 R 上单调递增，则 $y = e^{-0.5(x-4)^2 + 2}$ 取到最大值 e^2 .

故选：B.

【点睛】

本题考查了非线性相关的二次拟合问题，考查复合型指数函数的最值，是基础题.

11. C

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/796213114105010235>