期末专题08 圆锥曲线大题综合（椭圆、双曲线、抛物线）（附加）

（精选30题）

1．（22-23高二下·河北邢台·期末）椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两焦点为$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，且椭圆过点$M(2\sqrt{3},-\sqrt{3})$.

(1)求椭圆的方程；

(2)O是坐标原点，A,B是椭圆上两点，$OAMB$是平行四边形，求以AB为直径的圆的方程.

【答案】(1)$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

(2)$\left(x-\sqrt{3}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{39}{4}$

【分析】（1）根据椭圆的定义及焦点坐标求得椭圆的方程；

（2）根据点差法求出直线AB的方程，与椭圆方程联立求出弦长$|AB|$得到圆的直径，以OM的中点Q为圆心，得出圆的方程.

【详解】（1）$2a=|MF_1|+|MF_2|=\sqrt{\left(2\sqrt{3}+2\right)^2+3}+\sqrt{\left(2\sqrt{3}-2\right)^2+3}$

$=\sqrt{19+8\sqrt{3}}+\sqrt{19-8\sqrt{3}}=4-\sqrt{3}+4+\sqrt{3}=8$，

则$a^2=16$，又$c^2=4$，所以$b^2=12$，故椭圆的方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

（2）OM的中点为$Q\left(\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则$\frac{x_1^2}{16}+\frac{y_1^2}{12}=1$，$\frac{x_2^2}{16}+\frac{y_2^2}{12}=1$，

两式相减整理得$\frac{3}{4}+\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=0$，其中$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k_{AB}$，

$y_1+y_2=2y_Q=-\sqrt{3}$，$x_1+x_2=2x_Q=2\sqrt{3}$，

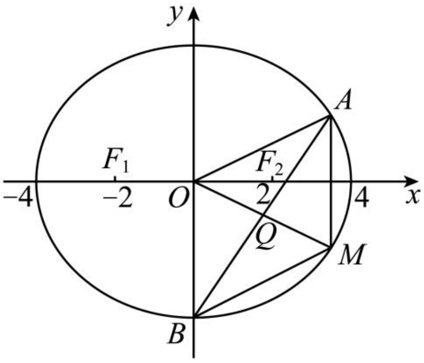
故$\frac{3}{4}+k_{AB}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=0$，则$k_{AB}=\frac{3}{2}$.

故AB的方程为$y+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}\left(x-\sqrt{3}\right)$，即$y=\frac{3}{2}x-2\sqrt{3}$，

代入椭圆方程整理得$12x^2-24\sqrt{3}x=0$

得$x_1=0$，$x_2=2\sqrt{3}$，所以$|AB|=\sqrt{1+\frac{9}{4}}|x_1-x_2|=\sqrt{39}$，

故所求圆的方程为$\left(x-\sqrt{3}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{39}{4}$.



2．（22-23 高二下·湖南·期末）已知平面上动点E到点$A(1,0)$与到圆$B:x^2+y^2+2x-15=0$的圆心B的距离之和等于该圆的半径.

(1)求点E的轨迹方程；

(2)已知M,N两点的坐标分别为$(-2,0),(2,0)$，过点A的直线与（1）中点E的轨迹交于C,D两点（C,D与M,N不重合）.证明：直线MC与ND的交点的横坐标是定值.

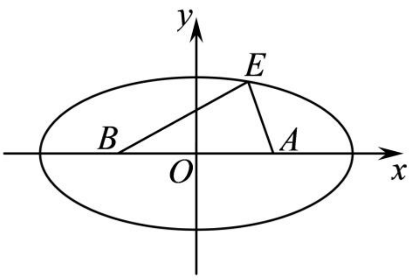
【答案】(1)$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

(2)证明见解析

【分析】（1）根据椭圆的定义求标准方程；

（2）利用韦达定理以及直线的点斜式方程和直线的交点坐标的求解方法证明.

【详解】（1）



依题意，$B(-1,0)$，圆B的半径为4.

于是$|EA|+|EB|=4$，且$|AB|=2<4$，故点E的轨迹为椭圆.

$\because 2a=4,2c=2,\therefore b^2=a^2-c^2=3$.

所以点 E 的轨迹方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（2）依题意直线 CD 的斜率不为 0，

设直线 CD 的方程为：$x=my+1,C\left(x_1,y_1\right),D\left(x_2,y_2\right)$

代入椭圆方程 $3x^2+4y^2=12$ 得：$\left(4+3m^2\right)y^2+6my-9=0$.

所以 $y_1+y_2=-\frac{6m}{4+3m^2}$ ①，$y_1y_2=\frac{-9}{4+3m^2}$ ②

又直线 MC 的方程为：$y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，

直线 ND 的方程为：$y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$

联立上述两直线方程得：$\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，

即 $\frac{x+2}{x-2}=\frac{y_2\left(x_1+2\right)}{y_1\left(x_2-2\right)}=\frac{y_2\left(my_1+3\right)}{y_1\left(my_2-1\right)}=\frac{my_1y_2+3y_2}{my_1y_2-y_1}$，

将①②代入上式得：$\frac{x+2}{x-2}=\frac{my_1y_2+3y_2}{my_1y_2-y_1}=\frac{\frac{-9m}{4+3m^2}+3y_2}{\frac{-9m}{4+3m^2}+\frac{6m}{4+3m^2}+y_2}=3$，

即 $\frac{x+2}{x-2}=3$，解得 $x=4$.

所以直线 MC 与 ND 的交点的横坐标是定值 4.

3．（22-23 高二下·湖北·期末）已知抛物线 $C:x^2=2py\left(p>0\right)$，点 $P\left(m,4\right)\left(m<0\right)$ 在抛物线 C 上，且点 P 到抛物线 C 的焦点的距离为 $\frac{17}{4}$.

(1)求 p；

(2)设圆 $M:x^2+\left(y-2\right)^2=1$，点 Q 是圆 M 上的动点，过点 P 作圆 M 的两条切线，分别交抛物线 C 于 A,B 两点，求 $\triangle ABQ$ 的面积S的最大值.

【答案】(1) $p=\frac{1}{2}$

(2) $\frac{10\sqrt{7}}{9}$

【分析】（1）根据抛物线的定义，即可求解.

（2）根据已知直线方程，和抛物线联立方程，结合韦达定理，求出点 A,B 的坐标，从而求出直线 AB 的方程，根据弦长公式，求得 $|AB|$，结合圆上一点到直线的距离的最大值为 $d+r$，从而求出 $\triangle ABQ$ 的面积 S 的最大值.

【详解】（1）由题知准线方程为 $y=-\frac{p}{2}$，则 $4+\frac{p}{2}=\frac{17}{4}$，得 $p=\frac{1}{2}$.

（2）抛物线的方程为 $x^2=y$，把点 P 代入到抛物线方程，$m^2=4$，又 $m<0$，

所以 $m=-2$，则点 P 的坐标为 $(-2,4)$，

依题知过点 P 的直线斜率必存在，

设过点 P 的直线方程为 $y-4=k(x+2)$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M:x^2+(y-2)^2=1$ 的圆心为 $M(0,2)$，半径 $r=1$，

则圆心到该直线的距离为 $\frac{|-2+2k+4|}{\sqrt{1+k^2}}$，

由直线与圆相切，所以 $\frac{|-2+2k+4|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解得 $k_1=\frac{-4+\sqrt{7}}{3}$，$k_2=\frac{-4-\sqrt{7}}{3}$，

联立 $\begin{cases}x^2=y\\ y-4=k(x+2)\end{cases}$，消 y 得，$x^2-kx-2k-4=0$，则 $x_P+x_1=k$，又 $x_P=-2$，

不妨设 $x_1=k_1+2=\frac{-4+\sqrt{7}}{3}+2=\frac{2+\sqrt{7}}{3}$，同理 $x_2=k_2+2=\frac{-4-\sqrt{7}}{3}+2=\frac{2-\sqrt{7}}{3}$，

故 $A\left(\frac{2+\sqrt{7}}{3},\frac{11+4\sqrt{7}}{9}\right)$，$B\left(\frac{2-\sqrt{7}}{3},\frac{11-4\sqrt{7}}{9}\right)$，得 $k_{AB}=\frac{\frac{11+4\sqrt{7}}{9}-\frac{11-4\sqrt{7}}{9}}{\frac{2+\sqrt{7}}{3}-\frac{2-\sqrt{7}}{3}}=\frac{4}{3}$，

所以直线 AB：$y-\frac{11+4\sqrt{7}}{9}=\frac{4}{3}\left(x-\frac{2+\sqrt{7}}{3}\right)$，即 $4x-3y+1=0$，

$|AB|=\sqrt{1+\frac{16}{9}}|x_1-x_2|=\frac{5}{3}\times\left|\frac{2+\sqrt{7}}{3}-\frac{2-\sqrt{7}}{3}\right|=\frac{10\sqrt{7}}{9}$（定值），

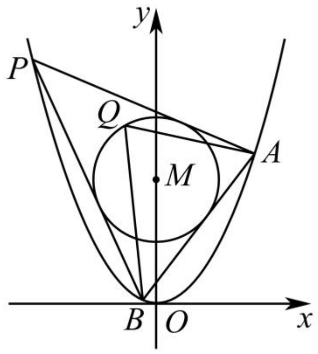
要使 $\triangle ABQ$ 的面积 S 最大，则 $\triangle ABQ$ 中 AB 边上的高最大即可，

又因为圆心 M 到直线的距离为 $d=\frac{|-6+1|}{5}=1$，

则圆上一点到直线的距离的最大值为 $d+r=1+1=2$，

即 $\triangle ABQ$ 中 AB 边上的高的最大值为 2，

所以 $S_{\max}=\frac{1}{2}\times\frac{10\sqrt{7}}{9}\times 2=\frac{10\sqrt{7}}{9}$.



4．（22-23高二下·湖南长沙·期末）已知抛物线 $x^2=2py$，点 $P(2,8)$ 在抛物线上，直线 $y=kx+2$ 交 C 于 A，B 两点，M 是线段 AB 的中点，过 M 作 x 轴的垂线交 C 于点 N.

(1)求点 P 到抛物线焦点的距离；

(2)是否存在实数 k 使 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$，若存在，求 k 的值；若不存在，说明理由.

【答案】(1) $\frac{65}{8}$

(2)存在；$k=\pm 2$

【分析】（1）点 $P(2,8)$ 代入抛物线中求得抛物线方程，从而找到点 P 到抛物线焦点的距离.

（2）可利用直角三角形的性质，斜边中线的长度等于斜边的一半，转换为圆锥曲线的弦长问题；

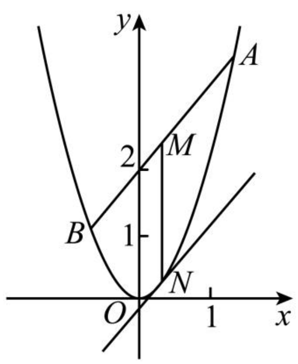
【详解】（1）将点 $P(2,8)$ 代入抛物线方程，则 $p=\frac{1}{4}$，$x^2=\frac{1}{2}y$，

抛物线焦点 $F\left(0,\frac{1}{8}\right)$，

则点 P 到抛物线焦点的距离等于点 P 到抛物线准线的距离 $|PF|=8+\frac{1}{8}=\frac{65}{8}$.

（2）存在，证明如下：

如图，设 $A\left(x_1,2x_1^2\right)$，$B\left(x_2,2x_2^2\right)$.



把 $y=kx+2$ 代入 $y=2x^2$ 得 $2x^2-kx-2=0$， $\Delta=k^2+16>0$，

由根与系数的关系得 $x_1+x_2=\frac{k}{2}$， $x_1x_2=-1$.

$\therefore x_N=x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{k}{4}$， $\therefore N$ 点的坐标为 $\left(\frac{k}{4},\frac{k^2}{8}\right)$.

假设存在实数 k，使 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$，则 $NA\perp NB$.

又 $\because M$ 是 AB 的中点， $\therefore|MN|=\frac{1}{2}|AB|$.

由（1）知，

$$y_M=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\frac{1}{2}(kx_1+2+kx_2+2)=\frac{1}{2}\left[k(x_1+x_2)+4\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{k^2}{2}+4\right)=\frac{k^2}{4}+2.$$

$\because MN\perp x$ 轴， $\therefore|MN|=|y_M-y_N|=\frac{k^2}{4}+2-\frac{k^2}{8}=\frac{k^2+16}{8}$，

又 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$$=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2-4\times(-1)}=\frac{1}{2}\sqrt{k^2+1}\sqrt{k^2+16}.$$

$\therefore\frac{k^2+16}{8}=\frac{1}{4}\sqrt{k^2+1}\sqrt{k^2+16}\Rightarrow\sqrt{k^2+16}=2\sqrt{k^2+1}$，

两边同时平方得： $k^2+16=4(k^2+1)$，

解得 $k=\pm2$，即存在 $k=\pm2$，使 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$.

5.（22-23 高二下·黑龙江哈尔滨·期末）已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$.四个点

$P_1(3,1),P_2(2,3),P_3(-2,-3),P_4\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ 中恰有三点在双曲线 C 上.

(1)求双曲线 C 的方程；

(2)若直线 $l:y=kx+m$ 与双曲线 C 交于 M,N 两点，且 $OM\perp ON$，求原点 O 到直线 l 的距离.

【答案】(1) $x^2-\frac{y^2}{3}=1$

(2) $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

【分析】（1）由双曲线性质可知， P_2,P_3 关于原点对称，可得 P_2,P_3 一定在双曲线上，根据双曲线在第一象限图象判断点 P_1 不在双曲线上，即 P_2,P_3,P_4 在双曲线上，进而可得答案.

（2）联立直线与双曲线方程消去 y，由 $x_1x_2+y_1y_2=0$，结合韦达定理可得 $2m^2=3k^2+3$，再利用点到直线距离公式，化简即可得答案.

【详解】（1）由双曲线性质可知，P_2,P_3 关于原点对称，

所以 P_2,P_3 一定在双曲线上，根据双曲线在第一象限图象

而 $P_1(3,1)$ 和 $P_2(2,3)$ 坐标的数中，$3>2$，但 $1<3$，

所以点 P_1 不在双曲线上，即 P_2,P_3、P_4 在双曲线上.

$$\begin{cases}\dfrac{4}{a^2}-\dfrac{9}{b^2}=1\\ \dfrac{9}{4a^2}-\dfrac{15}{4b^2}=1\end{cases}$$

解得 $a=1,b=\sqrt{3}$

$\therefore$ 双曲线 C 的方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$

（2）直线 MN 的方程为 $y=kx+m$，设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y=kx+m\\3x^2-y^2=3\end{cases}$ 消去 y 得 $(3-k^2)x^2-2kmx-m^2-3=0,$

所以 $3-k^2\neq0,\Delta=12(m^2-k^2+3)>0,x_1+x_2=\dfrac{2km}{3-k^2},x_1\cdot x_2=\dfrac{-m^2-3}{3-k^2}$.

由 $OM\perp ON$，可得 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，即 $x_1x_2+y_1y_2=0$

所以 $x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=0$，

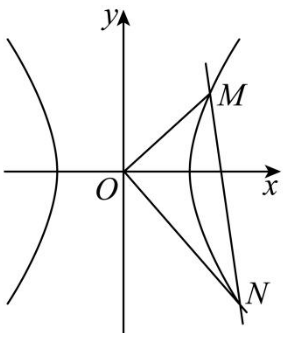
可化为 $(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=0$

即 $(1+k^2)\cdot\dfrac{-m^2-3}{3-k^2}+km\cdot\dfrac{2km}{3-k^2}+m^2=0$

则 $-m^2-3-k^2m^2-3k^2+2k^2m^2+3m^2-k^2m^2=0$

即 $2m^2=3k^2+3$

$\therefore O$ 到 l 的距离 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{\dfrac{m^2}{k^2+1}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.



6．（22-23高二下·安徽合肥·期末）已知双曲线E：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为$F(\sqrt{5},0)$，过$F$且斜率为1的直线与$E$的渐近线分别交于A，$B$两点（A在第一象限），$O$为坐标原点，$\frac{|OA|}{|OB|}=3$．

(1)求E的方程；

(2)过点$(4,0)$且倾斜角不为0的直线与E交于C，D两点，与E的两条渐近线分别交于P，Q两点，证明：$|CP|=|DQ|$．

【答案】(1)$\frac{x^2}{4}-y^2=1$

(2)证明见解析

【分析】

（1）由已知得l_{AB}：$y=x-\sqrt{5}$，与渐近线方程联立解得y_A，y_B，结合已知条件得$a=2b$，进而求得a,b，得到E的方程；

（2）要证明$|CP|=|DQ|$，只需证明CD的中点与PQ的中点重合．设直线CD：$x=my+4$，与双曲线方程联立，结合韦达定理求出CD的中点为M的坐标，由直线CD与渐近线方程联立，求出P,Q的坐标，进而得PQ的中点为N的坐标，即可得出结论．

【详解】（1）

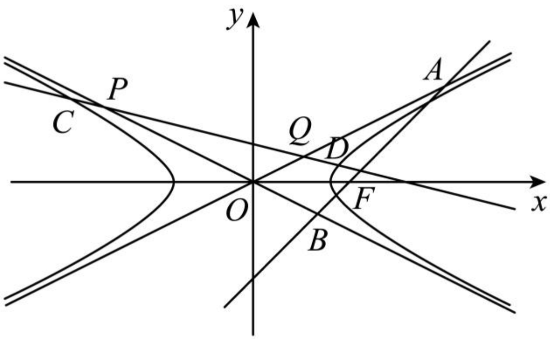
由已知得l_{AB}：$y=x-\sqrt{5}$，

联立$\begin{cases}y=x-\sqrt{5},\\ y=\frac{b}{a}x,\end{cases}$解得$y_A=\frac{\sqrt{5}b}{a-b}$，同理可得$y_B=-\frac{\sqrt{5}b}{a+b}$．

$\because\frac{|OA|}{|OB|}=3$，$\therefore\frac{\sqrt{5}b}{a-b}=\frac{3\sqrt{5}b}{a+b}$，整理得$a=2b$．

又$a^2+b^2=5$，$\therefore a^2=4$，$b^2=1$，

$\therefore E$的方程为$\frac{x^2}{4}-y^2=1$．



（2）

要证明$|CP|=|DQ|$，只需证明CD的中点与PQ的中点重合.

设CD的中点为M，直线CD：$x=my+4$，

联立$\begin{cases}x=my+4,\\x^2-4y^2-4=0,\end{cases}$得$\left(m^2-4\right)y^2+8my+12=0$，

设$C\left(x_1,y_1\right)$，$D\left(x_2,y_2\right)$，则$y_1+y_2=\dfrac{8m}{4-m^2}$，

$y_M=\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{4m}{4-m^2}$，$x_M=m\left(\dfrac{4m}{4-m^2}\right)+4=\dfrac{16}{4-m^2}$，即$M\left(\dfrac{16}{4-m^2},\dfrac{4m}{4-m^2}\right)$，

双曲线E：$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$的渐近线方程为$y=\pm\dfrac{1}{2}x$，

由$\begin{cases}x=my+4,\\y=-\dfrac{1}{2}x,\end{cases}$得$\begin{cases}x=\dfrac{8}{2+m},\\y=-\dfrac{4}{2+m},\end{cases}$可得$P\left(\dfrac{8}{2+m},-\dfrac{4}{2+m}\right)$，

由$\begin{cases}x=my+4,\\y=\dfrac{1}{2}x,\end{cases}$得$\begin{cases}x=\dfrac{8}{2-m},\\y=\dfrac{4}{2-m},\end{cases}$可得$Q\left(\dfrac{8}{2-m},\dfrac{4}{2-m}\right)$，

$\therefore$ PQ的中点为$N\left(\dfrac{16}{4-m^2},\dfrac{4m}{4-m^2}\right)$，

$\therefore$点M与点N重合，$\therefore|CP|=|DQ|$.

7.（22-23高二下·湖北武汉·期末）平面内与两定点$A_1\left(-a,0\right)$，$A_2\left(a,0\right)\left(a>0\right)$连线的斜率之积等于非零常数$m$的点的轨迹，加上$A_1$，$A_2$两点所成的曲线记为曲线$C$.

(1)求曲线C的方程，并讨论C的形状与m值的关系；

(2)若$m=-1$时，对应的曲线为C_1；对给定的$m\in\left(-1,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$，对应的曲线为$C_2$.设$F_1$，$F_2$是$C_2$的两个焦点，试问：在$C_1$上是否存在点$N$，使得$\triangle F_1NF_2$的面积$S=|m|a^2$，并证明你的结论.

【答案】(1) $mx^2-y^2=ma^2$；答案见解析

(2)存在；证明见解析

【分析】（1）设动点为M，其坐标为(x,y)，根据题意可得$\frac{y}{x-a}\cdot\frac{y}{x+a}=m$，整理可得曲线$C$的方程为$mx^2-y^2=ma^2$，再把方程化为标准方程即可判断曲线的类型；

（2）对于给定的$m\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$，$C_1$上存在点$N\left(x_0,y_0\right)\left(y_0\neq 0\right)$，使得$\triangle F_1NF_2$的面积$S=|m|a^2$的充要条件为$\begin{cases}{x_0}^2+{y_0}^2=a^2\\ \frac{1}{2}\times 2a\sqrt{1+m}\,|y_0|=|m|a^2\end{cases}$，从而求得$\frac{1-\sqrt{5}}{2}\leq m<0$或$0<m\leq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，进而解决问题.

【详解】（1）设动点为M，其坐标为(x,y)，

当$x\neq\pm a$时，由条件可得$k_{MA_1}\cdot k_{MA_2}=\frac{y}{x-a}\cdot\frac{y}{x+a}=m$，

即$mx^2-y^2=ma^2(x\neq\pm a)$，

又$A_1(-a,0),A_2(a,0)$的坐标满足$mx^2-y^2=ma^2$.

所以曲线C的方程为$mx^2-y^2=ma^2$.

当$m<-1$时，曲线C的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{-ma^2}=1,C$是焦点在$y$轴上的椭圆；

当$m=-1$时，曲线C的方程为$x^2+y^2=a^2,C$是圆心在原点的圆；

当$-1<m<0$时，曲线C的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{-ma^2}=1,C$是焦点在$x$轴上的椭圆；

当$m>0$时，曲线C的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{ma^2}=1,C$是焦点在$x$轴上的双曲线.

（2）在C_1上存在点N，使得$\triangle F_1NF_2$的面积$S=|m|a^2$，证明如下：

由（1）知，当$m=-1$时，曲线C_1的方程为$x^2+y^2=a^2$，

当$m\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$时，$C_2$的焦点分别为$F_1(-a\sqrt{1+m},0),F_2\left(a\sqrt{1+m},0\right)$，

对于给定的$m\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$，$C_1$上存在点$N\left(x_0,y_0\right)\left(y_0\neq 0\right)$，使得$\triangle F_1NF_2$的面积$S=|m|a^2$的充要条件为

$$\begin{cases}{x_0}^2+{y_0}^2=a^2(1)\\ \frac{1}{2}\times 2a\sqrt{1+m}\,|y_0|=|m|a^2(2)\end{cases}$$

由(1)得$0<|y_0|\leq a$，由(2)得$|y_0|=\frac{|m|a}{\sqrt{1+m}}$，

所以$0<\frac{|m|a}{\sqrt{1+m}}\le a$，解得$\frac{1-\sqrt{5}}{2}\le m<0$或$0<m\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，满足$m\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$，

所以存在点N使得$S=|m|a^2$.

【点睛】关键点睛：

第二问的关键是确定对于给定的$m\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$，$C_1$上存在点$N(x_0,y_0)(y_0\ne0)$，使得$\triangle F_1NF_2$的面积$S=|m|a^2$的充要条件为$\begin{cases}{x_0}^2+{y_0}^2=a^2\\ \frac{1}{2}\times2a\sqrt{1+m}\,|y_0|=|m|a^2\end{cases}$，从而求得$\frac{1-\sqrt{5}}{2}\le m<0$或$0<m\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，进而解决问题.

8.（22-23高二下·广东茂名·期末）已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{5}}{2}$,$C$的右焦点$F$到其渐近线的距离为1.

(1)求该双曲线C的方程；

(2)过点$S(4,0)$的动直线l（存在斜率）与双曲线C的右支交于A、B两点，x轴上是否存在一个异于点S的定点T，使得$|SA|\cdot|TB|=|SB|\cdot|TA|$成立．若存在，请写出点$T$的坐标，若不存在请说明理由.

【答案】(1)$\frac{x^2}{4}-y^2=1$

(2)存在定点$T(1,0)$

【分析】

（1）根据条件列出关于a,b,c的方程组求解即可；

（2）假设存在定点T满足已知条件，故设$T(m,0)$，结合正弦定理得$\angle ATS=\angle BTS$，则$k_{AT}+k_{BT}=0$，当直线的斜率为0时，显然不符合题意；当直线l的斜率不为0时，设直线l的方程为$x=ny+4,n\ne0$，与双曲线联立，由直线l与双曲线C的右支交于A,B两点，求得n^2范围，然后结合韦达定理及$k_{AT}+k_{BT}=0$求解即可.

【详解】（1）$\because$双曲线C的渐近线为$y=\pm\frac{b}{a}x$，点$F(c,0)$到渐近线的距离为1，

$\therefore\begin{cases}\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}}=1\\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}\\ a^2+b^2=c^2\end{cases}$，解得$a=2,b=1$，

$\therefore$ 双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$.

（2）假设存在定点 T 满足已知条件，故设 $T(m,0)$，

$\because |SA|\cdot|TB|=|SB|\cdot|TA|$， $\therefore \frac{|SA|}{|TA|}=\frac{|SB|}{|TB|}$，

在 $\triangle ATS$ 和 $\triangle BTS$ 中，由正弦定理得

$\frac{|SA|}{\sin\angle ATS}=\frac{|TA|}{\sin\angle AST}$，及 $\frac{|SB|}{\sin\angle BTS}=\frac{|TB|}{\sin\angle BST}$，

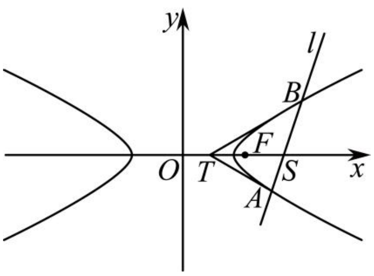
$\therefore \frac{|SA|}{|TA|}=\frac{\sin\angle ATS}{\sin\angle AST}$，及 $\frac{|SB|}{|TB|}=\frac{\sin\angle BTS}{\sin\angle BST}$，

$\because \angle AST=\pi-\angle BST,\sin\angle AST=\sin\angle BST$，

又 $\because \frac{|SA|}{|TA|}=\frac{|SB|}{|TB|},\therefore \sin\angle ATS=\sin\angle BTS$，

$\therefore \angle ATS=\angle BTS$，

$\therefore$ 直线 AT 与直线 BT 的倾斜角互补， $k_{AT}+k_{BT}=0$，



当直线 l 的斜率为 0 时，显然不符合题意；

当直线 l 的斜率不为 0 时，设直线 l 的方程为 $x=ny+4,n\neq 0$， $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases} x=ny+4 \\ \frac{x^2}{4}-y^2=1 \end{cases}$，得 $(n^2-4)y^2+8ny+12=0$，

所以 $y_1+y_2=-\frac{8n}{n^2-4},y_1y_2=\frac{12}{n^2-4}$，

又因为直线 l 与双曲线 C 的右支交于 A,B 两点，

$\therefore \begin{cases} x_1x_2>0 \\ x_1+x_2>0 \\ \Delta>0 \\ n^2-4\neq 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} (ny_1+4)(ny_2+4)>0 \\ n(y_1+y_2)+8>0 \\ 16(n^2+12)>0 \\ n^2\neq 4 \end{cases}$， $\begin{cases} n^2y_1y_2+4n(y_1+y_2)+16>0 \\ n(y_1+y_2)+8>0 \\ 16(n^2+12)>0 \\ n^2\neq 4 \end{cases}$，

则$\begin{cases}\dfrac{-4\left(n^2+16\right)}{n^2-4}>0\\ \dfrac{-32}{n^2-4}>0\\ 16\left(n^2+12\right)>0\\ n^2\neq 4\end{cases}$，解得$0<n^2<4$，

$\because k_{AT}+k_{BT}=0, \therefore \dfrac{y_1}{x_1-m}+\dfrac{y_2}{x_2-m}=0$，

又$x_1=ny_1+4, x_2=ny_2+4$，

$\therefore \dfrac{y_1}{ny_1+4-m}+\dfrac{y_2}{ny_2+4-m}=0$，即$2ny_1y_2+(4-m)(y_1+y_2)=0$，

$\therefore 2n\cdot\dfrac{12}{n^2-4}+(4-m)\left(-\dfrac{8n}{n^2-4}\right)=0$，

即$8n(m-1)=0$，解得$m=1$，

$\therefore$存在定点$T(1,0)$，使得$|SA|\cdot|TB|=|SB|\cdot|TA|$成立.

9．（22-23 高二下·福建泉州·期末）已知O为坐标原点，点P到点$F(1,0)$的距离与它到直线$l: x=4$的距离之比等于$\frac{1}{2}$，记P的轨迹为Γ．点A,B在Γ上，F,A,B三点共线，M为线段AB的中点.

(1)证明：直线OM与直线AB的斜率之积为定值；

(2)直线OM与l相交于点N，试问以MN为直径的圆是否过定点，说明理由.

【答案】(1)证明见解析

(2)定点$F(1,0)$，理由见解析

【分析】（1） 先设$P(x,y)$，再根据距离比计算轨迹，最后计算斜率积即可；

（2）先设$T(m,0)$，再根据MN为直径的圆过定点$T(m,0)$，计算$\overrightarrow{MT}\cdot\overrightarrow{NT}=0$可得.

【详解】（1）设$P(x,y)$，则有$\dfrac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{|x-4|}=\dfrac{1}{2}$，

整理得$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$；

设$A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$，$M(x_0,y_0)$，则$x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，$y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}$，

由$\begin{cases}3x_1^2+4y_1^2=12\\ 3x_2^2+4y_2^2=12\end{cases}$，两式相减：$3(x_1-x_2)(x_1+x_2)+4(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0$，

整理得$3(x_1-x_2)\cdot 2x_0+4(y_1-y_2)\cdot 2y_0=0$，$3+4\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\dfrac{y_0}{x_0}=0$，$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\dfrac{y_0}{x_0}=-\dfrac{3}{4}$，

即直线OM与直线AB的斜率之积为定值$-\dfrac{3}{4}$.

（2）显然直线AB的斜率不为0，设直线AB方程为$x=ty+1$，

联立方程组$\begin{cases}x=ty+1\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$，消去$x$得：$\left(3t^2+4\right)y^2+6ty-9=0$，

所以$y_1+y_2=-\dfrac{6t}{3t^2+4}$，$y_M=\dfrac{y_1+y_2}{2}=-\dfrac{3t}{3t^2+4}$，$x_M=t\cdot\dfrac{-3t}{3t^2+4}+1=\dfrac{4}{3t^2+4}$，

$M\left(\dfrac{4}{3t^2+4},-\dfrac{3t}{3t^2+4}\right)$，直线$OM:y=-\dfrac{3t}{4}x$，从而点$N(4,-3t)$，

根据椭圆的对称性可知，若以MN为直径的圆过定点，则该定点在x轴上，可设为$T(m,0)$，

以MN为直径的圆过定点$T(m,0)$，则$\overrightarrow{MT}\cdot\overrightarrow{NT}=0$，

又$\overrightarrow{MT}=\left(m-\dfrac{4}{3t^2+4},\dfrac{3t}{3t^2+4}\right)$，$\overrightarrow{NT}=(m-4,3t)$，

从而$\left(m-\dfrac{4}{3t^2+4}\right)(m-4)+\dfrac{9t^2}{3t^2+4}=0$，

整理得$t^2(3m^2-12m+9)+4m^2-20m+16=0$，

故$\begin{cases}3m^2-12m+9=0\\4m^2-20m+16=0\end{cases}$，解方程组可得$m=1$，

即以MN为直径的圆过定点$F(1,0)$.

10.（22-23高二下·广西南宁·期末）在平面直角坐标系xOy中，已知点$G\left(\sqrt{2},0\right)$，直线L：$x=2\sqrt{2}$，动点H到点G的距离与直线L的距离之比为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(1)求动点H的轨迹E的方程；

(2)设曲线E与x轴交于A、B两点，过x轴上点$M(-4,0)$作一直线PQ与椭圆交于P，Q两点（异于A，B），若直线AP与BQ的交点为N，记直线MN与AP的斜率分别为k_1，k_2，求$\dfrac{k_1}{k_2}$.

【答案】(1)$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$；

(2)$\dfrac{1}{3}$.

【分析】（1）设$H(x,y)$，根据给定条件列出方程，再化简即可作答.

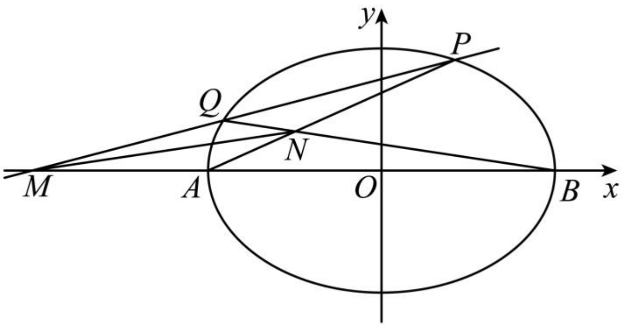
（2）设出直线PQ的方程，与轨迹E的方程联立，利用韦达定理、斜率坐标公式推理计算作答.

【详解】（1）设$H(x,y)$，依题意，$\frac{\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+y^2}}{|x-2\sqrt{2}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，整理得$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，

所以动点H的轨迹E是椭圆，其方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

（2）由（1）知，不妨令$A(-2,0),B(2,0)$，设$N(x,y),P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，

显然直线PQ不垂直于y轴，设直线PQ的方程：$x=my-4$，



由$\begin{cases}x=my-4\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$消去$x$并整理得$(m^2+2)y^2-8my+12=0$，有$\Delta=64m^2-48(m^2+2)>0$，即$m^2>6$，

于是$y_1+y_2=\frac{8m}{m^2+2},y_1y_2=\frac{12}{m^2+2}$，即有$my_1y_2=\frac{3}{2}(y_1+y_2)$，

由P,N,A和Q,N,B三点共线，得$\begin{cases}\frac{y_1}{x_1+2}=\frac{y}{x+2}\\ \frac{y_2}{x_2-2}=\frac{y}{x-2}\end{cases}$，即$\frac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}=\frac{x-2}{x+2}$，

而$x_1=my_1-4,x_2=my_2-4$，从而$\frac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}=\frac{y_1(my_2-6)}{y_2(my_1-2)}=\frac{\frac{3}{2}(y_1+y_2)-6y_1}{\frac{3}{2}(y_1+y_2)-2y_2}=-3$，

因此$\frac{x-2}{x+2}=-3$，解得$x=-1$，而$k_1=\frac{y}{x+4},k_2=\frac{y}{x+2}$，

所以$\frac{k_1}{k_2}=\frac{x+2}{x+4}=\frac{1}{3}$.

11.（22-23高二下·湖北恩施·期末）已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的长轴长为4，且短轴长是长轴长的一半.

(1)求C的方程；

(2)已知直线l_1：$y=x+1$与椭圆C相交于两点M，N，求线段MN的长度；

(3)经过点$P\left(1,\frac{1}{2}\right)$作直线$l_2$，交椭圆于A、$B$两点·如果$P$恰好是线段$AB$的中点，求直线$l_2$的方程.

【答案】(1)$\frac{x^2}{4}+y^2=1$

(2)$\frac{8\sqrt{2}}{5}$

(3)$y=-\frac{1}{2}x+1$

【分析】（1）由题意可得$2a$，$2b$的值，即求出a，b的值，可得椭圆的方程;

（2）联立直线l_1的方程与椭圆的方程，可得两根之和及两根之积，代入弦长公式，可得$|MN|$的大小;

（3）设A，B的坐标代入椭圆的方程，作差整理可得直线l_2的斜率，代入点斜式方程求出直线l_2的方程.

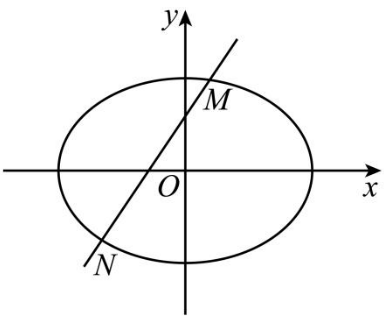
【详解】（1）由题意可得$\begin{cases}2a=4\\2b=\frac{1}{2}\cdot 2a\end{cases}$，可得$a=2$，$b=1$，

所以椭圆的C的方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$;

（2）设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases}x^2+4y^2=4\\y=x+1\end{cases}$，整理可得$5x^2+8x=0$，可得$x_1+x_2=-\frac{8}{5}$，$x_1x_2=0$，

所以$|MN|=\sqrt{1+1^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\,\frac{8}{5}=\frac{8\sqrt{2}}{5}$;



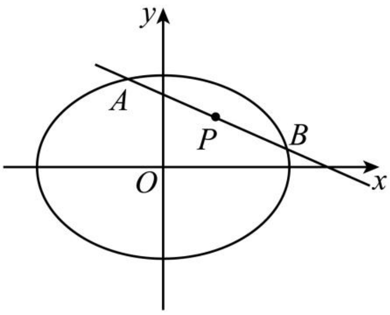
（3）设$A(x_3,y_3)$，$B(x_4,y_4)$，由题意可得$x_3+x_4=2$，$y_3+y_4=1$，

将A，B的坐标代入可得：$\begin{cases}\frac{x_3^2}{4}+y_3^2=1\\\frac{x_4^2}{4}+y_4^2=1\end{cases}$，

作差整理可得：$\frac{y_3-y_4}{x_3-x_4}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{x_3+x_4}{y_3+y_4}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1}=-\frac{1}{2}$,

即直线 AB 的斜率为 $-\frac{1}{2}$，

所以直线 l_2 的方程为 $y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(x-1)$，即 $y=-\frac{1}{2}x+1$.



12.（2023·山东济南·三模）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，圆 $M:x^2+y^2=1$ 与 x 轴的交点恰为 C 的焦点，且 C 上的点到焦点距离的最大值为 b^2.

(1)求 C 的标准方程；

(2)不过原点的动直线 l 与 C 交于 A,B 两点，平面上一点 D 满足 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AD}$，连接 BD 交 C 于点 E（点 E 在线段 BD 上且不与端点重合），若 $\frac{S_{\triangle EAB}}{S_{\triangle DAB}}=\frac{2}{5}$，试判断直线 l 与圆 M 的位置关系，并说明理由.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

(2)相离，理由见解析

【分析】（1）根据题意求得 $c=1$ 和 $a+c=b^2$，结合 $a^2=b^2+c^2$，求得 a,b 的值，即可求解；

（2）设直线 $l:y=kx+m(m\neq0)$，联立方程组得到 $x_1+x_2=-\frac{8km}{4k^2+3},x_1x_2=\frac{4m^2-12}{4k^2+3}$，且 $\Delta>0$，由 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AD}$ 和 $\frac{S_{\triangle EAB}}{S_{\triangle DAB}}=\frac{2}{5}$，求得 E 点坐标，代入椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，化简得到 $3x_1x_2=-4y_1y_2$，结合点 O 到直线 l 的距离 $d\geq\sqrt{\frac{3}{2}}>1=r$，得到直线 l 与圆 M 相离；当直线 l 的斜率不存在时，求得 $x_1=\pm\sqrt{2}$，得到直线 l 与圆 M 相离，即可求解.

【详解】（1）解：由题意，圆 $M:x^2+y^2=1$ 与 x 轴的交点为 $(\pm1,0)$，可得 $c=1$，

椭圆 C 上的点到焦点距离的最大值为 $a+c=b^2$，

又因为 $a^2=b^2+c^2$，可得 $a=2,b=\sqrt{3}$，所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（2）解：如图所示，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

当直线 l 的斜率存在时，设直线 $l:y=kx+m(m\neq0)$，

联立方程组$\begin{cases} y=kx+m \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，整理得$(4k^2+3)x^2+8kmx+4m^2-12=0$，

则$x_1+x_2=-\dfrac{8km}{4k^2+3}, x_1x_2=\dfrac{4m^2-12}{4k^2+3}$，且$\Delta=(8km)^2-4(4k^2+3)(4m^2-12)>0$，

可得$y_1y_2=(kx_1+m)(kx_1+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=\dfrac{3m^2-12k^2}{4k^2+3}$，

由$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AD}$可得点A为$OD$中点，可得$D(2x_1,2y_1)$，且有$\dfrac{S_{\triangle EAB}}{S_{\triangle DAB}}=\dfrac{2}{5}$，可得$\dfrac{|EB|}{|BD|}=\dfrac{2}{5}$，

所以$\overrightarrow{OE}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OD}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OB}=(\dfrac{4}{5}x_1+\dfrac{3}{5}x_2,\dfrac{4}{5}y_1+\dfrac{3}{5}y_2)$，

即E点坐标为$\left(\dfrac{4}{5}x_1+\dfrac{3}{5}x_2,\dfrac{4}{5}y_1+\dfrac{3}{5}y_2\right)$，

将点E代入椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，可得$\dfrac{1}{4}(\dfrac{4}{5}x_1+\dfrac{3}{5}x_2)^2+\dfrac{1}{3}(\dfrac{4}{5}y_1+\dfrac{3}{5}y_2)^2=1$，

整理得$\dfrac{16}{25}\cdot\left(\dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{y_1^2}{3}\right)+\dfrac{9}{25}\cdot\left(\dfrac{x_2^2}{4}+\dfrac{y_2^2}{3}\right)+\dfrac{24}{25}\cdot\left(\dfrac{x_1x_2}{4}+\dfrac{y_1y_2}{3}\right)=1$，

又由点A,B分别满足$\dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{y_1^2}{3}=1,\dfrac{x_2^2}{4}+\dfrac{y_2^2}{3}=1$，

代入上式可得$\dfrac{x_1x_2}{4}+\dfrac{y_1y_2}{3}=0$，即$3x_1x_2=-4y_1y_2$，

代入韦达定理，可得代入韦达定理可得$2m^2=4k^2+3$，满足$\Delta>0$，

点O到直线l的距离$d=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{\dfrac{m^2}{1+k^2}}=\sqrt{\dfrac{2k^2+\dfrac{3}{2}}{1+k^2}}=\sqrt{2-\dfrac{1}{2(k^2+1)}}$，

因为$k^2\geq 0$，可得$2(k^2+1)\geq 2$，所以$0<\dfrac{1}{2(k^2+1)}\leq\dfrac{1}{2}$，所以$\sqrt{\dfrac{3}{2}}\leq\sqrt{2-\dfrac{1}{2(k^2+1)}}<\sqrt{2}$，

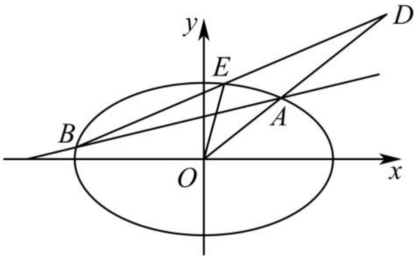
所以$d\geq\sqrt{\dfrac{3}{2}}>1=r$，所以直线$l$与圆$M$相离，

当直线l的斜率不存在时，此时有$x_1=x_2,y_1=-y_2$，

代入$3x_1x_2=-4y_1y_2$，可得$3x_1^2-4y_1^2=0$，又因为$\dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{y_1^2}{3}=1$，可得$x_1=\pm\sqrt{2}$，

所以直线l的方程为$x_1=\pm\sqrt{2}$，也满足直线l与圆M相离，

综上可得，直线l与圆M相离.

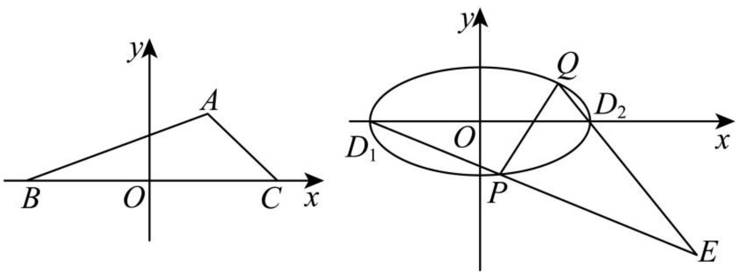


【点睛】方法技巧：圆锥曲线中的最值问题是高考中的热点问题，常涉及不等式、函数的值域问题，综合性比较强，解法灵活多样，但主要有两种方法：

（1）几何转化代数法：若题目的条件和结论能明显体现几何特征和意义，则考虑利用圆锥曲线的定义、图形、几何性质来解决；

（2）函数取值法：若题目的条件和结论的几何特征不明显，则可以建立目标函数，再求这个函数的最值（或值域），常用方法：（1）配方法；（2）基本不等式法；（3）单调性法；（4）三角换元法；（5）平面向量；（6）导数法等，要特别注意自变量的取值范围.

13．（22-23 高二下·江苏镇江·期末）如图，在 $\triangle ABC$ 中，$BC=2\sqrt{3}, AB+AC=4$，若以 BC 所在直线为 x 轴，以 BC 的中垂线为 y 轴，建立平面直角坐标系.设动顶点 $A(x,y)$.



(1)求顶点 A 的轨迹方程；

(2)记第（1）问中所求轨迹曲线为 M，设 $D_1(-2,0), D_2(2,0)$，过点 $(1,0)$ 作动直线 l 与曲线 M 交于 P,Q 两点（点 P 在 x 轴下方）.求证：直线 D_1P 与直线 D_2Q 的交点 E 在一条定直线上.

【答案】(1) $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\left(y\neq 0\right)$

(2)证明见详解

【分析】（1）根据椭圆的定义，求得椭圆的 a,b,c 的值，可得答案；

（2）根据联立直线 PQ 与椭圆 M 写出的韦达定理，表示出直线 QD_1, PD_2 的直线方程，联立整理方程，可得答案.

【详解】（1）由 $AB+AC=4$，则 A 的轨迹为以 B,C 为焦点的椭圆，且 $2a=4$， $a=2$；

由 $BC=2\sqrt{3}$， 则 $2c=2\sqrt{3}$， $c=\sqrt{3}$，即 $b=\sqrt{a^2-c^2}=1$，

故 A 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1(y\neq0)$.

（2）直线 l 方程可设为 $x=my+1$，

联立可得 $\begin{cases}x=my+1\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$， 消去 x 可得：$(m^2+4)y^2+2my-3=0$，

$\Delta=4m^2+12(m^2+4)>0$ 显然成立，

设 $Q(x_1,y_1),P(x_2,y_2)$， 则 $y_1+y_2=-\frac{2m}{m^2+4},y_1y_2=-\frac{3}{m^2+4}$， 即 $2my_1y_2=3(y_1+y_2)$，

设 $QD_2:y=\frac{y_1}{x_1-2}(x-2)$， $PD_1:y=\frac{y_2}{x_2+2}(x+2)$，

联立上述两方程，消去 y 可得 $\frac{y_1}{x_1-2}(x-2)=\frac{y_2}{x_2+2}(x+2)$，

$\frac{y_1}{x_1-2}x-\frac{y_2}{x_2+2}x=\frac{2y_1}{x_1-2}+\frac{2y_2}{x_2+2}$， $[y_1(x_2+2)-y_2(x_1-2)]x=2y_1(x_2+2)+2y_2(x_1-2)$，

$[y_1(my_2+3)-y_2(my_1-1)]x=2y_1(my_2+3)+2y_2(my_1-1)$， $(3y_1+y_2)x=4my_1y_2+6y_1-2y_2$，

由 $4my_1y_2=6(y_1+y_2)$， 则 $(3y_1+y_2)x=6(y_1+y_2)+6y_1-2y_2$，

$(3y_1+y_2)x=12y_1+4y_2,3y_1+y_2\neq0$， 解得 $x=4$；

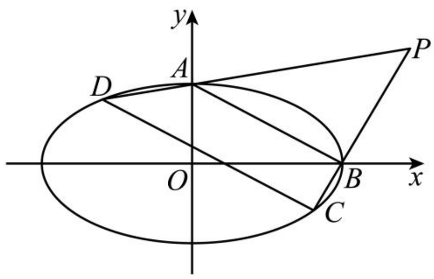
综上所述，动点 E 的轨迹方程为直线 $x=4$.

【点睛】方法点睛：过定点问题的两大类型及解法

（1）动直线 l 过定点问题. 解法：设动直线方程(斜率存在)为 $y=kx+t$，由题设条件将 t 用 k 表示为 $t=mk+n$，得 $y=k(x+m)+n$， 故动直线过定点 $(-m,n)$；

（2）动曲线 C 过定点问题．解法：引入参变量建立曲线 C 的方程，再根据其对参变量恒成立，令其系数等于零，得出定点.

14.（22-23 高二下·江西南昌·期末） 已知离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $(2,\sqrt{3})$，椭圆上有四个动点 A，B，C，D, $CD//AB$， AD 与 BC 交于 P 点.如图所示.



(1)求曲线 C 的方程；

(2)当 A,B 恰好分别为椭圆的上顶点和右顶点时，试探究：直线 AD 与 BC 的斜率之积是否为定值？若为定值，请求出该定值；否则，请说明理由；

(3)若点 P 的坐标为 $(8,6)$，求直线 AB 的斜率.

【答案】(1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$

(2)是定值，定值为 $\frac{1}{4}$

(3) $-\frac{1}{3}$

【分析】（1）根据离心率以及椭圆经过的点即可联立方程求解 a,b,c，

（2）联立直线与椭圆方程得韦达定理，进而根据斜率公式化简即可求解，

（3）根据向量共线满足的坐标运算，代入椭圆方程中，即可化简求解.

【详解】（1）由题意可知 $\begin{cases} e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{4}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1 \\ c^2+b^2=a^2 \end{cases} \Rightarrow a=4,b=2,c=2\sqrt{3}$，

所以曲线 C 方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$

（2）由题意知，$a=4$，$b=2$，所以 $A(0,2)$，$B(4,0)$，所以 $k_{AB}=-\frac{1}{2}$，

设直线 CD 的方程为 $y=-\frac{1}{2}x+t(t\neq 2)$，设 $D(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，

联立直线 CD 与椭圆的方程 $\begin{cases} \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1 \\ y=-\frac{1}{2}x+t \end{cases}$，整理得 $x^2-2tx+2t^2-8=0$，

由 $\Delta=4t^2-4(2t^2-8)>0$，解得 $-2\sqrt{2}<t<2\sqrt{2}$，且 $t\neq 2$，

则 $x_1+x_2=2t$， $x_1x_2=2t^2-8$，

所以 $k_{AD}k_{BC}=\frac{(y_1-2)y_2}{x_1(x_2-4)}=\frac{\left(-\frac{1}{2}x_1+t-2\right)\left(-\frac{1}{2}x_2+t\right)}{x_1x_2-4x_1}=\frac{\frac{1}{4}x_1x_2-\frac{1}{2}t(x_1+x_2)+t^2+x_2-2t}{x_1x_2-4x_1}$

$=\frac{\frac{t^2-4}{2}+x_2-2t}{x_1x_2-4x_1}=\frac{\frac{t^2-4}{2}+2t-x_1-2t}{x_1x_2-4x_1}=\frac{\frac{t^2-4}{2}-x_1}{2t^2-8-4x_1}=\frac{1}{4}$，

故直线 AD 与 BC 的斜率之积是定值，且定值为 $\frac{1}{4}$.

（3）设 $A(x_3,y_3)$， $B(x_4,y_4)$， $D(x,y)$，记 $\overrightarrow{PD}=\lambda\overrightarrow{DA}$（$\lambda\neq 0$），

得 $\begin{cases}x-8=\lambda x_3-\lambda x\\ y-6=\lambda y_3-\lambda y\end{cases}$，所以 $\begin{cases}x=\frac{\lambda x_3+8}{1+\lambda}\\ y=\frac{\lambda y_3+6}{1+\lambda}\end{cases}$.

又 A，D 均在椭圆上，所以 $\begin{cases}\frac{x_3^2}{16}+\frac{y_3^2}{4}=1\\ \frac{\left(\frac{\lambda x_3+8}{1+\lambda}\right)^2}{16}+\frac{\left(\frac{\lambda y_3+6}{1+\lambda}\right)^2}{4}=1\end{cases}$，化简得 $\lambda x_3+3\lambda y_3+12-2\lambda=0$，

因为 $CD\,//\,AB$，所以 $\overrightarrow{PC}=\lambda\overrightarrow{CB}$，同理可得 $\lambda x_4+3\lambda y_4+12-2\lambda=0$，

即直线 AB： $\lambda x+3\lambda y+12-2\lambda=0$，

所以 AB 的斜率为 $-\frac{1}{3}$.

【点睛】方法点睛：利用韦达定理法解决直线与圆锥曲线相交问题的基本步骤如下：

（1）设直线方程，设交点坐标为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$；

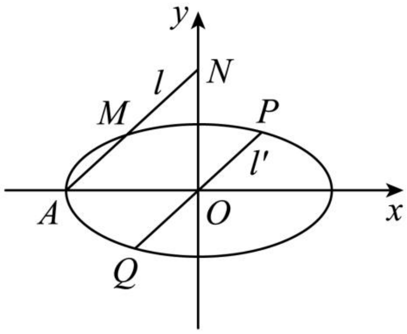
（2）联立直线与圆锥曲线的方程，得到关于 x（或 y）的一元二次方程，注意 Δ 的判断；

（3）列出韦达定理；

（4）将所求问题或题中的关系转化为 x_1+x_2、 x_1x_2（或 y_1+y_2、 y_1y_2）的形式；

（5）代入韦达定理求解.

15.（22-23 高二下·广西南宁·期末）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个端点为 $B(0,1)$，且离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，过椭圆左顶点 A 的直线 l 与椭圆 C 交于点 M，与 y 轴正半轴交于点 N，过原点 O 且与直线 l 平行的直线 l' 交椭圆于点 P， Q.



(1)求椭圆C的标准方程；

(2)求证：$\dfrac{|AM|\cdot|AN|}{|OP|\cdot|OQ|}$为定值.

【答案】(1)$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

(2)证明见解析

【分析】（1）根据离心率和过点列方程组求出a,b，得到椭圆的标准方程；

（2）应用弦长公式分别求出$|AM|,|AN|,|OP|$,计算化简可得定值.

【详解】（1）因为椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$B(0,-1)$，

所以$b^2=1$，

又椭圆的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则$e=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

所以$a=2$，

故椭圆方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

（2）设直线l的方程为$y=k(x+2)$，$N(0,2k)$

所以$|AN|=\sqrt{4+4k^2}=2\sqrt{1+k^2}$，

设$M(x_1,y_1)$，由$\begin{cases}y=k(x+2)\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，

得$(1+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-4=0$，

则$-2+x_1=\dfrac{-16k^2}{1+4k^2}$，$-2x_1=\dfrac{16k^2-4}{1+4k^2}$

所以$|AM|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(-2+x_1)^2-4(-2)x_1}=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(\frac{-16k^2}{1+4k^2}\right)^2-\frac{64k^2-16}{1+4k^2}}=\frac{4\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$，

设直线OP的方程为$y=kx$，

由$\begin{cases}y=kx\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，得$(1+4k^2)x^2-4=0$，

设$P(x_0,y_0)$，则$x_0^2=\frac{4}{1+4k^2}$，则$y_0^2=\frac{4k^2}{1+4k^2}$，

所以$|OP|^2=x_0^2+y_0^2=\frac{4+4k^2}{1+4k^2}$，

故$\frac{|AM|\cdot|AN|}{|OP|\cdot|OQ|}=\frac{|AM|\cdot|AM|}{|OP|^2}=\frac{\frac{4\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}\times2\sqrt{1+k^2}}{\frac{4+4k^2}{1+4k^2}}=2$，

因此$\frac{|AM|\cdot|AN|}{|OP|\cdot|OQ|}$为定值.

【点睛】关键点点睛：定值取得的关键是对弦长公式的应用及结合图形的对称性得出$|OP|=|OQ|$.

16.（22-23高二下·广东广州·期末）已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{1}{2}$，$A_1,A_2$分别为椭圆$C$的左右顶点，$F_1,F_2$分别为椭圆$C$的左右焦点，$B$是椭圆$C$的上顶点，且$\triangle BA_1F_1$的外接圆半径为$\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

(1)求椭圆C的方程；

(2)设与x轴不垂直的直线l交椭圆C于P,Q两点（P,Q在x轴的两侧），记直线A_1P,A_2P,A_2Q,A_1Q的斜率分别为k_1,k_2,k_3,k_4.

（i）求$k_1\cdot k_2$的值；

（ii）若$k_1+k_4=\frac{5}{3}(k_2+k_3)$，则求$\triangle F_2PQ$的面积的取值范围.

【答案】(1)$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

(2)（i）$-\frac{3}{4}$；（ii）$(0,\frac{9\sqrt{5}}{2})$

【分析】（1）根据已知求出a,c的关系，可推得$|A_1B|=\sqrt{7}c$，结合$\triangle BA_1F_1$的外接圆半径，利用正弦定理求得c，即可求得a,b，即得答案；

（2）设l的方程并联立椭圆方程，可得根与系数关系，（i）化简整理可得$k_1\cdot k_2$以及$k_3\cdot k_4$的值；（ii）利用

（i）的结论推出 $k_2k_3=-\frac{9}{20}$，结合根与系数的关系式化简可求得 m 的值，继而求得 $\triangle F_2PQ$ 的面积的表达式，结合函数的单调性即可求得答案.

【详解】（1）由于椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，故 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，

故 $|BF_1|=a=2c=2|OF_1|$，则 $\angle F_1BO=30^\circ,\angle BF_1O=60^\circ,\angle BF_1A_1=120^\circ$，

又 $b^2=a^2-c^2=3c^2$，则 $|A_1B|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4c^2+3c^2}=\sqrt{7}c$，

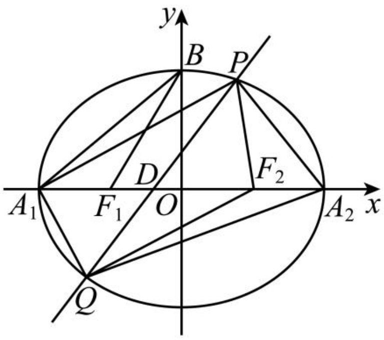
又 $\triangle BA_1F_1$ 的外接圆半径为 $\frac{2\sqrt{21}}{3}$，则 $\frac{|A_1B|}{\sin\angle BF_1A_1}=\frac{\sqrt{7}c}{\sin 120^\circ}=2\times\frac{2\sqrt{21}}{3}$，

解得 $c=2$，故 $a=4,b=2\sqrt{3}$，

故椭圆方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$；

（2）（i）设 l 与 x 轴的交点为 D，由于直线 l 交椭圆 C 于 P,Q 两点（P,Q 在 x 轴的两侧），

故直线 l 的斜率不为 0，



设 l 的方程为 $x=ty+m$，联立 $\begin{cases}x=ty+m\\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1\end{cases}$，

则 $\left(3t^2+4\right)y^2+6mty+3m^2-48=0$，需满足 $\Delta=48(12t^2-m^2+16)>0$，

设 $P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$，则 $y_1+y_2=\frac{-6mt}{3t^2+4},y_1y_2=\frac{3m^2-48}{3t^2+4}$，

又 $A_1\left(-4,0\right),A_2\left(4,0\right)$，故 $k_1\cdot k_2=k_{PA_1}\cdot k_{PA_2}=\frac{y_1}{x_1+4}\cdot\frac{y_1}{x_1-4}=\frac{y_1^2}{x_1^2-16}=\frac{y_1^2}{-\frac{4}{3}y_1^2}=-\frac{3}{4}$，

同理可得 $k_3\cdot k_4=k_{QA_1}\cdot k_{QA_2}=-\frac{3}{4}$；

（ii）因为 $k_1+k_4=\frac{5}{3}\left(k_2+k_3\right)$，

则 $-\frac{3}{4k_2}-\frac{3}{4k_3}=\frac{5}{3}\left(k_2+k_3\right)$ $-\frac{3}{4}\cdot\frac{k_2+k_3}{k_2k_3}=\frac{5}{3}(k_2+k_3)$，