测量误差与数据处理

物理试验基本程序和要求

1.实验课前预习

(1)预习与本实验相关的全部内容。

(2)写出预习报告（实验题目、目的、原理、主要计算公式、原理简图）,准备原始实验数据登记表格。

2.课堂实验操作

(1)上课需带实验讲义、笔、尺、计算器等。

(2)必须在了解仪器的工作原理、使用方法、注意事项的基础上，方可进行实验。

(3)仪器安装调试后经教师检验无误后方可进行实验操作。

(4)注意观察实验现象，仔细记录测量数据，将数据填入实验登记表格,数据须经指导老师检验及签字。

(5)实验后请将使用的仪器整理好，归回原处。经教师允许后方可离开实验室。

(6)课后按要求完毕实验报告,并在下次实验时交来。

第一章 目 录

§1 测量与误差

一、测量

1、测量的含义

- **测量就是**借助仪器将待测量与同类原则量进行比较，拟定待测量是该同类单位量的多少倍的过程称作测量。测量数据要写明数值的大小和计量单位。
- 倍数→ 读数+单位→数据
- 测量的要素：对象，单位，措施，精确度。

- 在人类的发展历史上，**不同步期，不同的国家，乃至不同的地域，同一种物理量有着许多不同的计量单位**。如长度单位就分别有码、英尺、市尺和米等。为了便于国际交流，国际计量大会于1960年拟定了国际单位制（SI），它要求了以米、公斤、秒、安培、开尔文、摩尔、坎德拉作为**基本单位**，其他物理量（如力、能量、电压、磁感应强度等）均作为这些基本单位的**导出单位**。

2. 测量的分类

按措施分类：

- 直接测量
- 间接测量

按条件分类：

- 等精度测量 √
- 非等精度测量

直接测量 $L = \boxed{3.15}\ \boxed{\text{cm}}$

数值　　单位

测量

间接测量 $\rho = \dfrac{m}{\pi r^2 h}$

$L = \cancel{3.15}$

二、误差

$\boxed{\text{任何测量成果都有误差！}}$

1、真值：待测量客观存在的值

(绝对)误差：$\delta x = x - x_0$

真值

测量值

相对误差：$E_x = \dfrac{\delta x}{x_0} \times 100\%$

- 相对误差常用百分比表达。它表达绝对误差在整个物理量中所占的比重，它是无单位的一种纯数，所以既能够评价量值不同的同类物理量的测量，也能够评价不同物理量的测量，从而判断它们之间优劣。假如待测量有理论值或公认值，也可用百分差来表达测量的好坏。即:

$$\text{百分差}E_0=\frac{|\text{测量值}-\text{公认值}|}{\text{公认值}}\times100\%$$

2、误差的分类

系统误差　　恒定性

可用特定措施来消除或减小

随机误差　　随机性

可经过屡次测量来减小

系统误差

保持不变或以可预知方式变化的误差分量

起源:①仪器固有缺陷;

②试验理论近似或措施不完善;

③试验环境、测量条件不合要求;

④操作者生理或心理原因。

3、测量的精密度、精确度、精确度

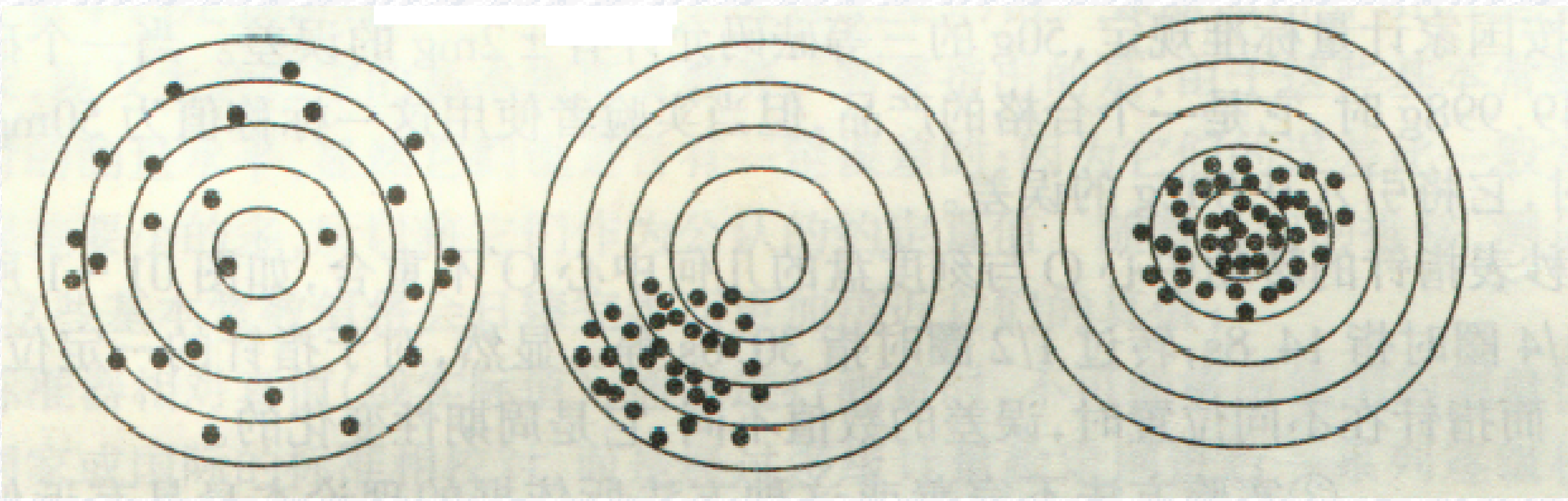
1）精密度。表达**反复测量所得数据的相互接近程度**（离散程度）。

2）精确度，表达**测量数据的平均值与真值的接近程度**。

。

3）精确度。是对**测量数据的精密度和精确度**的综合评估。

- 以打靶为例来比较阐明精密度、精确度、精确度三者之间的关系。图中靶心为射击目的，相当于**真值**，每次**测量**相当于一次射击。



（a）精确度高、精密度低　　（b）精密度高、精确度低　　（c）精密度、精确度均高

§2 随机误差的处理

一、随机误差的正态分布规律

大量的随机误差服从正态分布规律

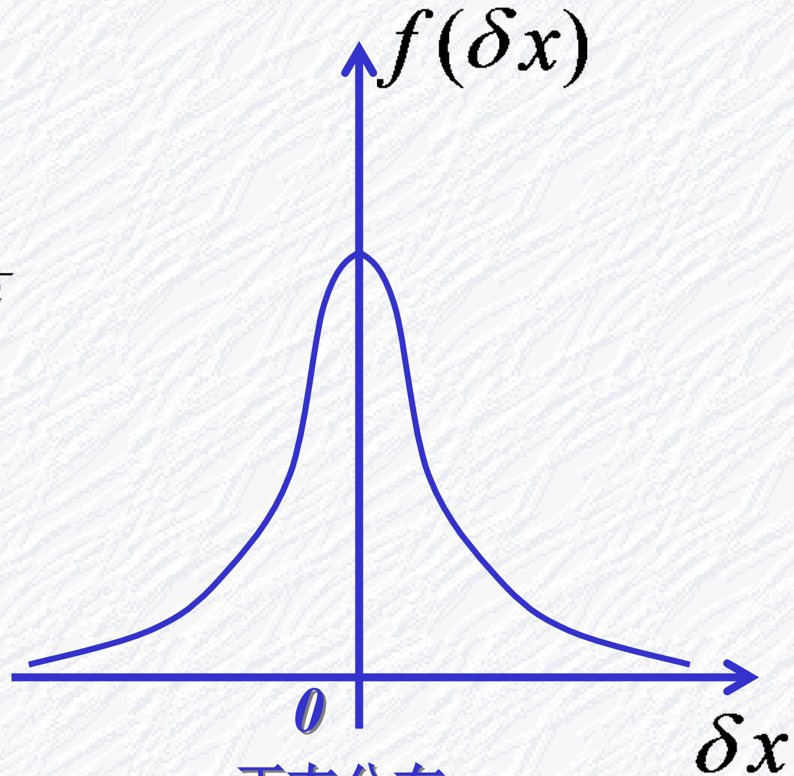
误差 $\delta x = x - x_0$

概率密度函数

$$f(\delta x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\delta x^2}{2\sigma^2}}$$

原则误差

$$\sigma = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\Sigma \delta x_i^2}{n}}$$



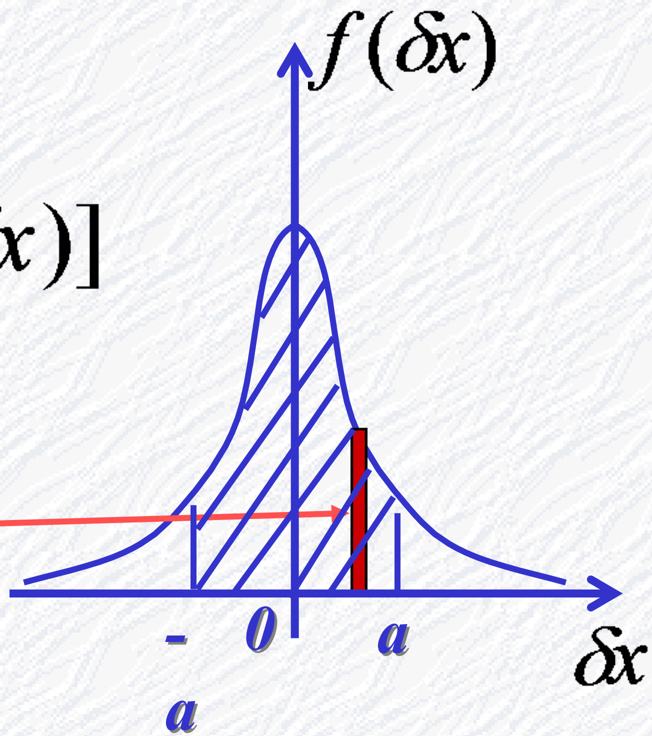
正态分布

$f(\delta x)$的物理意义:

随机误差介于 $[\delta x, \delta x + \mathrm{d}(\delta x)]$

小区间内的概率为:

$$f(\delta x)\,\mathrm{d}(\delta x)$$



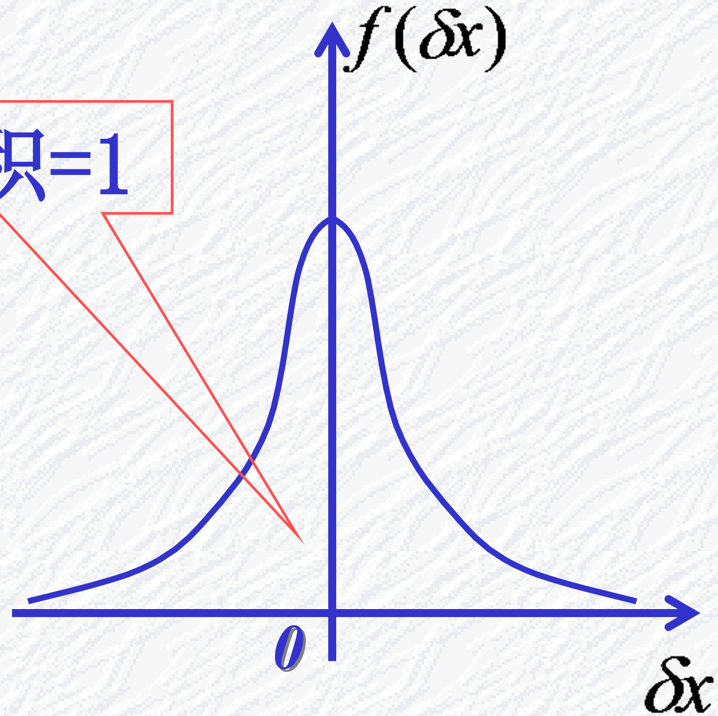
随机误差介于区间 (-*a*,*a*)内的概率为

$$P(-a < \delta x < a) = \int_{-a}^{a} f(\delta x)\,\mathrm{d}(\delta x)$$

(-*a*,*a*)为置信区间、P为置信概率

满足归一化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\delta x)\,\mathrm{d}(\delta x) = 1$$



能够证明：

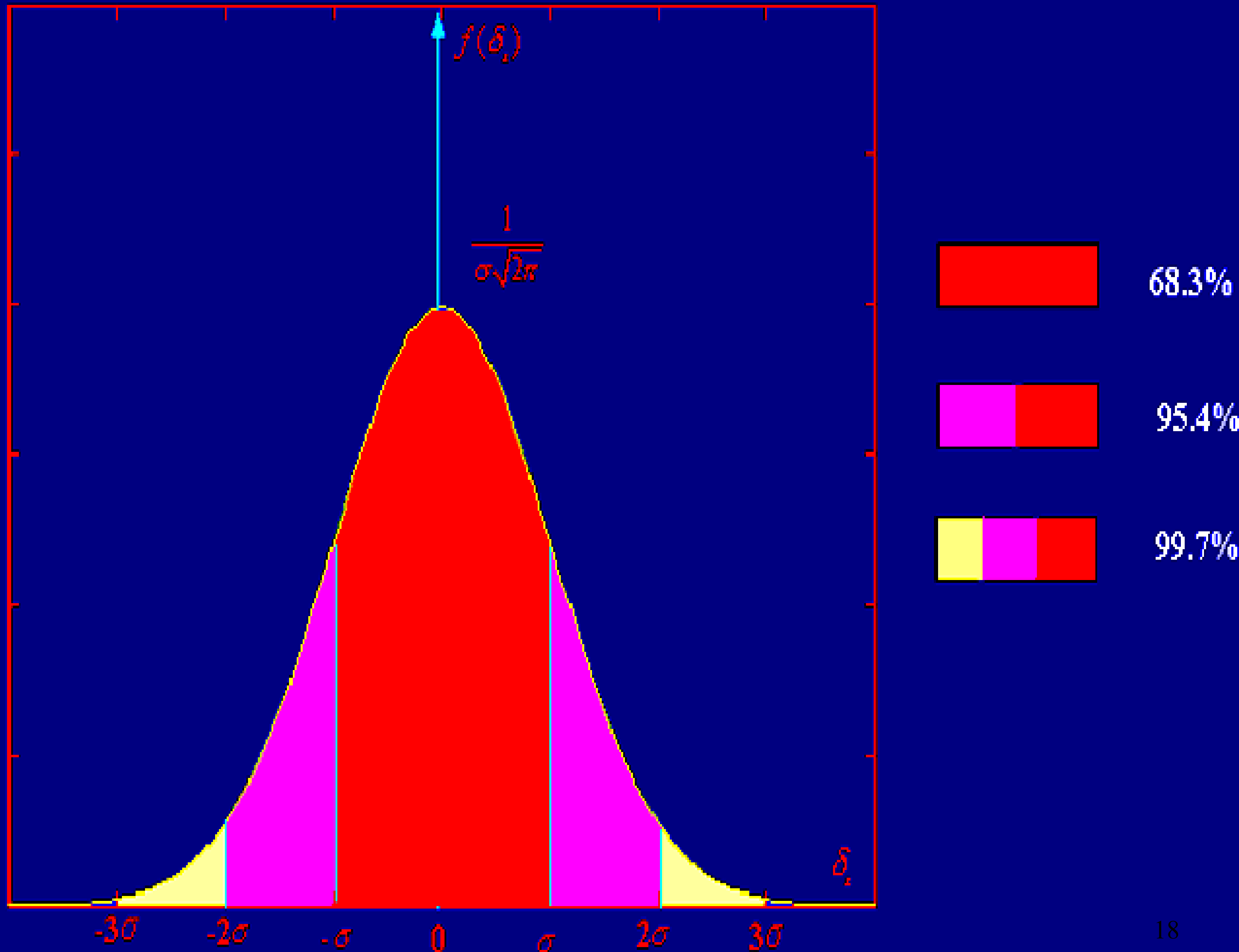
$$P(-\sigma < \delta x < \sigma) = \int_{-\sigma}^{\sigma} f(\delta x)\,\mathrm{d}(\delta x) = 0.683$$

$$P(-2\sigma < \delta x < 2\sigma) = 0.954$$

$$\boldsymbol{\delta = 3\sigma}$$

极限误差

$$P(-3\sigma < \delta x < 3\sigma) = 0.997$$



f(δ)
1/(σ√2π)
δ
-3σ
-2σ
-σ
0
σ
2σ
3σ
68.3%
95.4%
99.7%

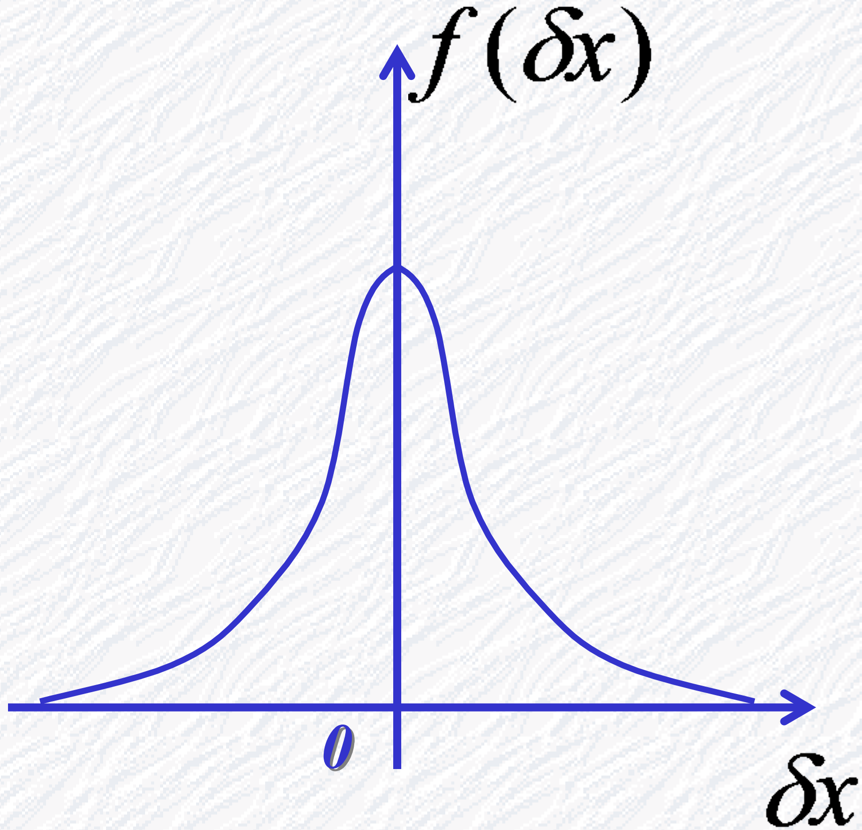
正态分布特征：

①单峰性

②对称性

③有界性

④抵偿性



即 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta x_i = 0$$

二、随机误差估算—原则偏差

误差：$\delta x_i = x_i - x_0$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma \delta x_i^2}{n}} \quad (n \to \infty)$$

原则误差

偏差：$\delta x_i = x_i - \bar{x}$

原则偏差：

$$S_x = \sqrt{\frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

2. 原则偏差的物理含义

S_x 的物理意义:　　$S_x = \sqrt{\dfrac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$

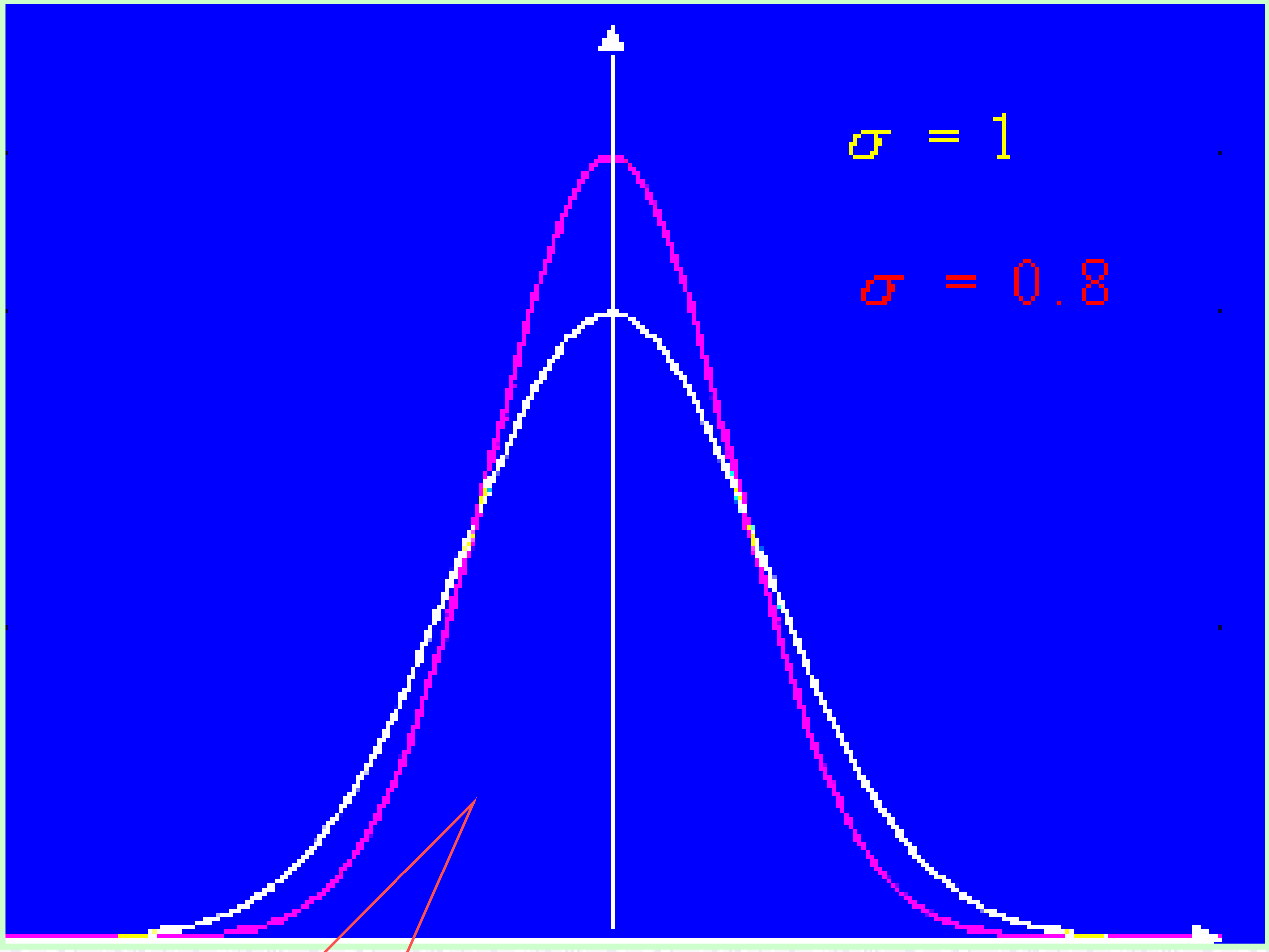
作任一次测量，随机误差落在区间$(-S_x, +S_x)$的概率为68.3%。

$$P(-2S_x < \delta x < 2S_x) = 0.954$$

$$P(-3S_x < \delta x < 3S_x) = 0.997$$

S_x 小，小误差占优，数据集中，反复性好。

S_x 大，数据分散，随机误差大，反复性差。



总面积=1

三、测量成果最佳值—算术平均值

屡次测量求平均值能够减小随机误差

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

<u>算术平均值</u>是真值的最佳估计值

§3 试验中错误数据的剔除

1. 拉依达判据

- 对于服从正态分布的随机误差，出目前±S区间内概率为68.3%，与此相仿，一样能够计算，在相同条件下对某一物理量进行屡次测量，其任意一次测量值的误差落在 -3S到+3S区域之间的可能性（概率）。其值为

$$P(-3S,3S)=\int_{-3S}^{3S} f(\Delta x)d\Delta x=99.7\%$$

- 假如用测量列的算术平均替代真值，则测量列中约有**99.7%**的数据应落在区间内，假如有数据出目前此区间之外，则我们能够以为它是错误数据，这时我们应把它 **舍去**，这么以原则偏差Sx的3倍为界去决定数据的取舍就成为一种**剔除坏数据的准则**，称为拉依达准则。但要注意的是**数据少于10个时此准则无效**。

2.肖维勒准则

- 对于服从正态分布的测量成果，其偏差出目前±3S附近的概率已经很小，假如测量次数不多，偏差超出±3S几乎不可能，因而，用拉依达判据剔除疏失误差时，往往有些疏失误差剔除不掉。另外，仅仅根据少许的测量值来计算S，这本身就存在不小的误差。所以当测量次数不多时，不宜用拉依达判据，但能够用肖维勒准则。按此判据给出一种数据个数n相联络的系数Gn，当已知数据个数n，算术平均值和测量列原则偏差S，则能够保存的测量值x_i的范围为

$$(\bar{x}-G_n \cdot s) \leq x_i \leq (\bar{x}+G_n \cdot s)$$

- Gn系数表

n	Gn	n	Gn	n	Gn
3	1.38	11	2.00	25	2.33
4	1.54	12	2.03	30	2.39
5	1.65	13	2.07	40	2.49
6	1.73	14	2.10	50	2.58
7	1.80	15	2.13	100	2.80
8	1.86	16	2.15		
9	1.92	18	2.20		
10	1.96	20	2.24		

§4 测量不拟定度及估算

一、不拟定度基本概念

$\boxed{\text{被测量的真值所处的量值范围作一评估}}$

测量成果：

测量值X和不拟定度Δ_x 单位 置信度

$$x = \boxed{9.515 \pm 0.005}\ \boxed{\text{mm}}\ \boxed{(P=0.68)}$$

真值以68%的概率落在

[9.510mm,9.520mm]区间内

二、不拟定度简化估算措施

A类分量Δ_A： 屡次测量用统计措施评估的分量

$$\Delta_A = \frac{t}{\sqrt{n}} S_x = \sqrt{\frac{t^2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

B类分量Δ_B：

用其他非统计措施评估的分量

只考虑仪器误差

测量值与真值之间可能产生的最大误差

$$\Delta_B = \Delta_{仪} / \sqrt{3} \quad (P = 68.3\%)$$

$$\Delta_B = \Delta_{仪} \quad (P > 95\%)$$

常用仪器误差见下表

仪器名称	量　程	分度值	仪器误差
钢直尺	0~300mm	1mm	±0.1mm
钢卷尺	0~1000mm	1mm	±0.5mm
游标卡尺	0~300mm	0.02, 0.05mm	分度值
螺旋测微计	0~100mm	0.01mm	±0.004mm
物理天平	1000g	100mg	±50mg
水银温度计	-30~300℃	1 ℃,0.2 ℃,0.1℃	分度值
读数显微镜		0.01mm	±0.004mm
数字式电表			• 最末一位的一种单位
指针式电表		0.1, 0.2, 0.5, 1.0 1.5, 2.5, 5.0	±量程×*a*%

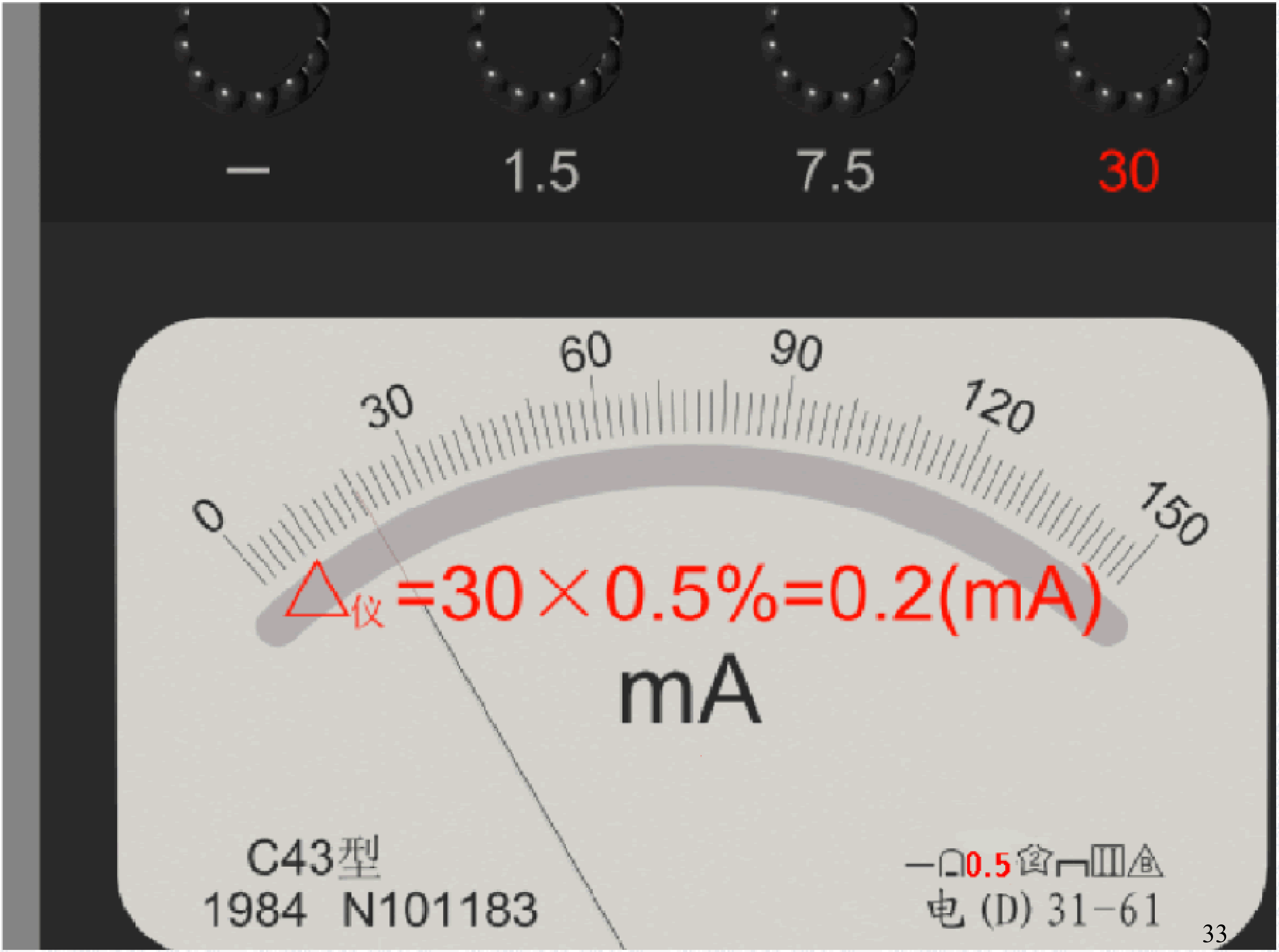
•仪器不拟定度的估计

①. 根据阐明书

②. 由仪器的精确度级别来计算

$$\Delta X_{yi} = \frac{\text{准确度等级} \times \text{量程}}{100}$$

举例:



–
1.5
7.5
30
0
30
60
90
120
150
△仪=30×0.5%=0.2(mA)
mA
C43型
1984 N101183
0.5
电 (D) 31-61

—
1.5
3
7.5
0
30
60
90
120
150
△仪=7.5×0.1%=0.008(V)
V
C43型
1982 N3426
0.1
电 (D) 31-61

②. 未给出仪器误差时估计：

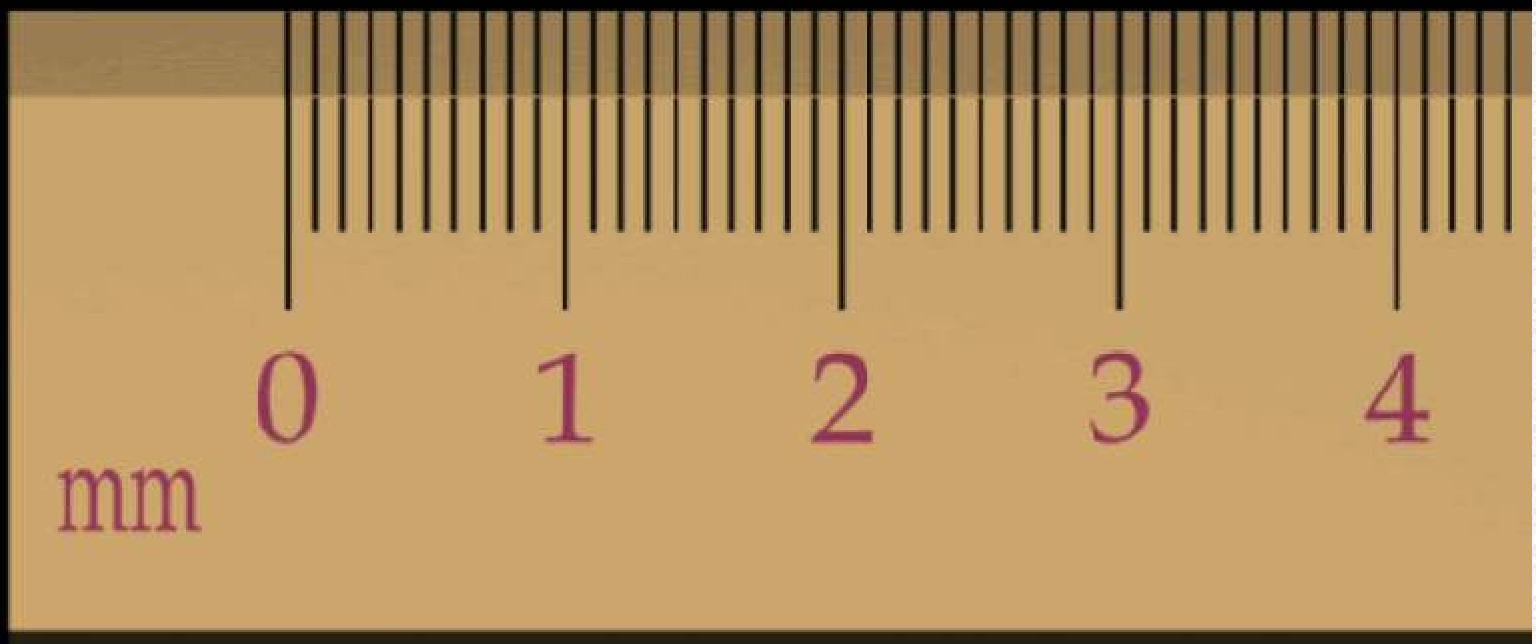
连续可读仪器：　　最小分度/2

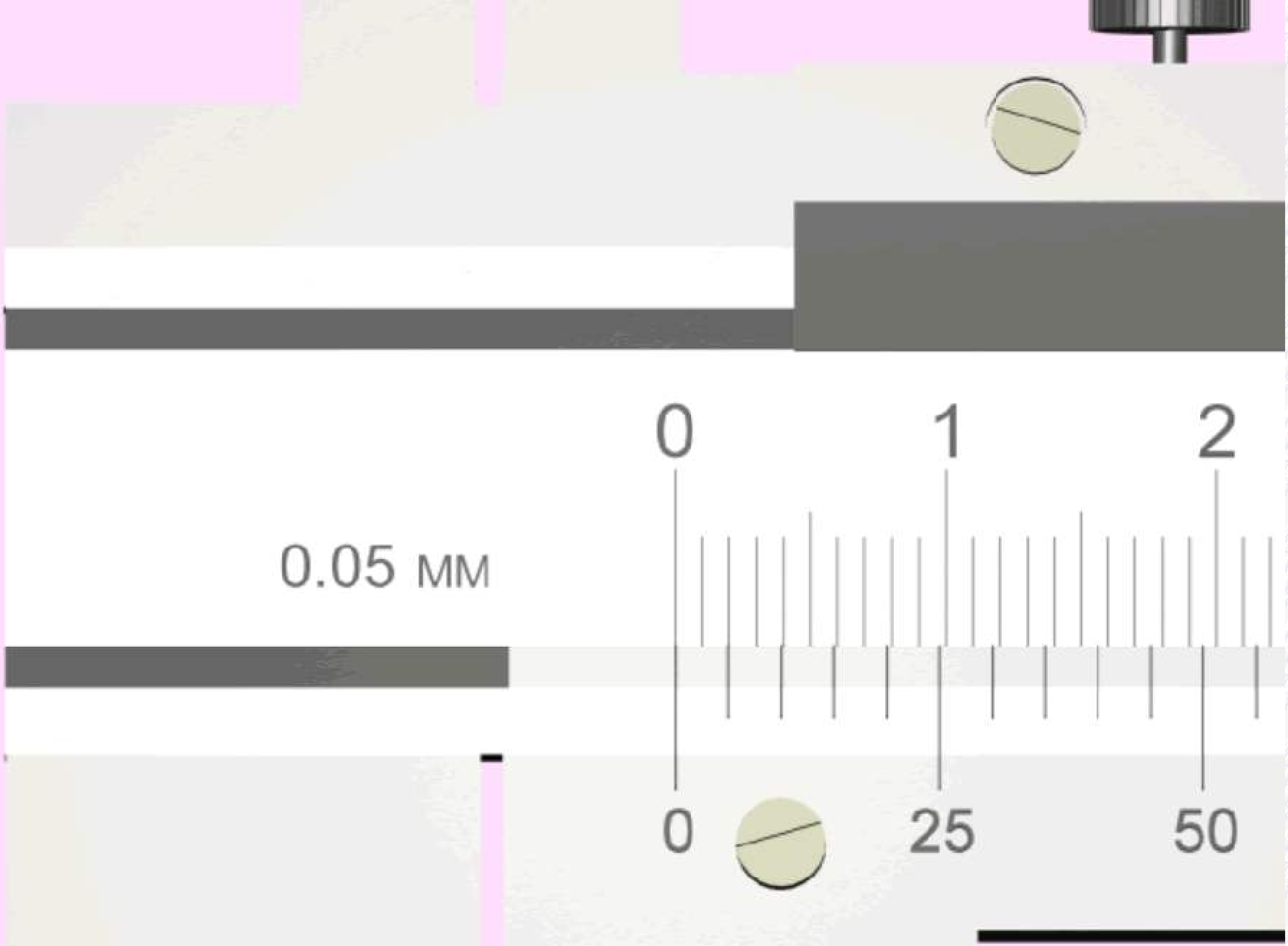
非连续可读仪器：　　最小分度

数字式的仪器：　　取末位±1

举例：

最小分度：1mm




0.05 мм
0
1
2
0
25
50

最小分度：0.01秒


SET
LAP
RESET
START
STOP
SOLAR
MONTH
DATE
DAY
0.00 00
HOUR
MIN
SEC
MIN
SEC
1/100
Jinue
STOPWATCH

三、总不拟定度的合成

总不拟定度： 由A类分量和B类分量按“方、和、根”措施合成

$$\Delta = \sqrt{\Delta_A^2 + \Delta_B^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{t}{\sqrt{n}} S_x\right)^2 + \left(\Delta_{仪}\right)^2}$$

四、测量成果体现式：

单次 $x=\bar{x}\pm\Delta_B$(单位)　　$P=?$

屡次 $x=\bar{x}\pm\Delta_x$(单位)　　$P=?$

五、间接测量量的不拟定度

1、间接测量量的最佳值

直接测量量 x, y, z, L 的

最佳值为 $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \mathrm{L}$

间接测量量的最佳值为：

$$\overline{N} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \mathrm{L})$$