线性代数-第二章-矩阵及其运算

汇报人：文小库

2024-01-26

CONTENTS

- 矩阵基本概念与性质
- 矩阵乘法与逆矩阵
- 行列式及其性质
- 矩阵秩与初等变换
- 特征值与特征向量
- 线性方程组求解与矩阵应用

01

矩阵基本概念与性质

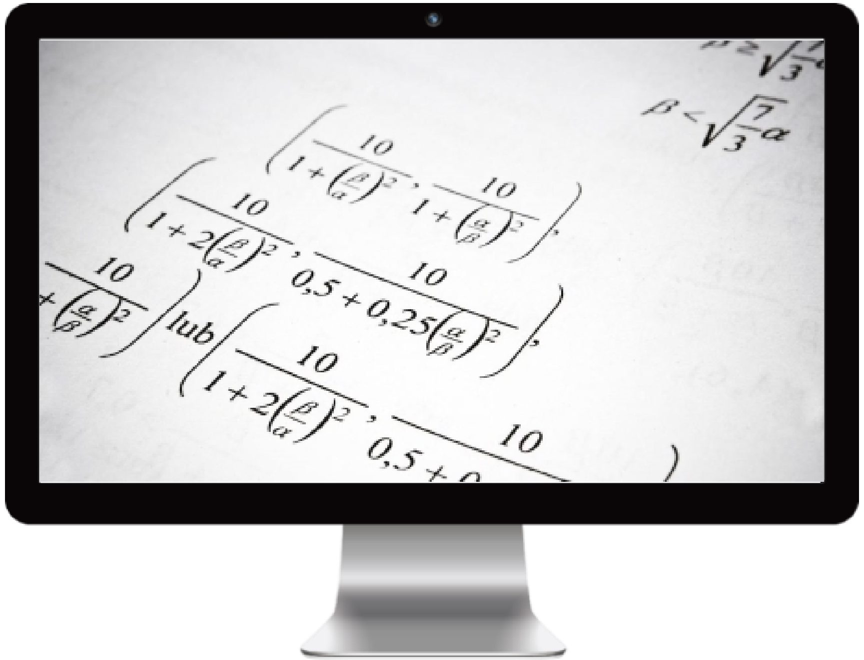
矩阵定义及表示方法

矩阵是一个由数值组成的矩形阵列，通常用大写字母表示，如A、B等。

矩阵的维度由行数和列数确定，通常表示为m×n矩阵，其中m为行数，n为列数。

矩阵中的元素用小写字母加下标表示，如aij表示第i行第j列的元素。

矩阵相等与加减法运算规则



- 两个矩阵相等当且仅当它们具有相同的维度，且对应位置的元素相等。
- 矩阵的加减法运算要求两个矩阵具有相同的维度，对应位置的元素进行加减运算。
- 矩阵的加法满足交换律和结合律，即A+B=B+A，(A+B)+C=A+(B+C)。

矩阵数乘与转置性质

01

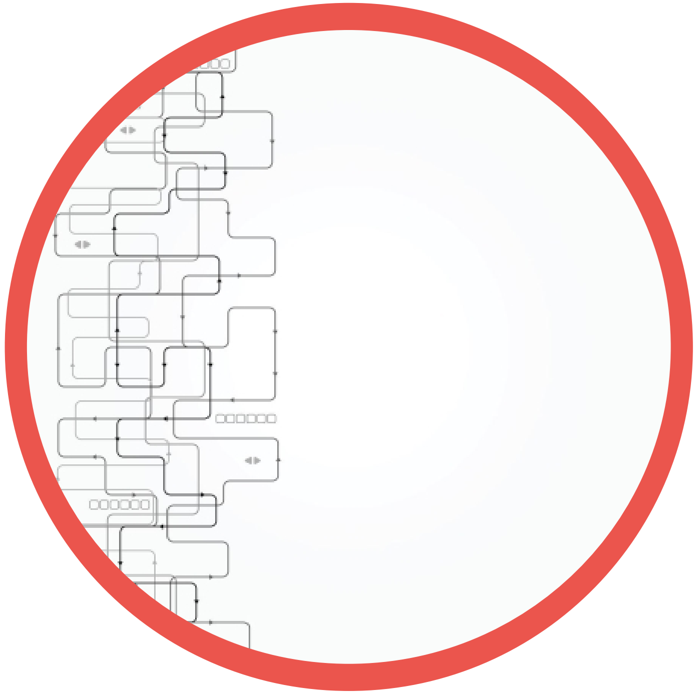
数乘是指一个数与矩阵中的每个元素相乘，结果仍是一个与原矩阵同维度的矩阵。

02

矩阵的转置是将原矩阵的行和列互换得到的新矩阵，记为AT。

03

转置的性质包括：(AT)T=A，(A+B)T=AT+BT，(kA)T=kAT，其中k为常数。



特殊类型矩阵介绍

对角矩阵

除主对角线外，其他元素都为零的方阵。

上三角矩阵

主对角线以下元素全为零的方阵。

零矩阵

所有元素都为零的矩阵。

单位矩阵

主对角线上元素为1，其他元素为零的方阵，通常记为I。

下三角矩阵

主对角线以上元素全为零的方阵。

02

矩阵乘法与逆矩阵

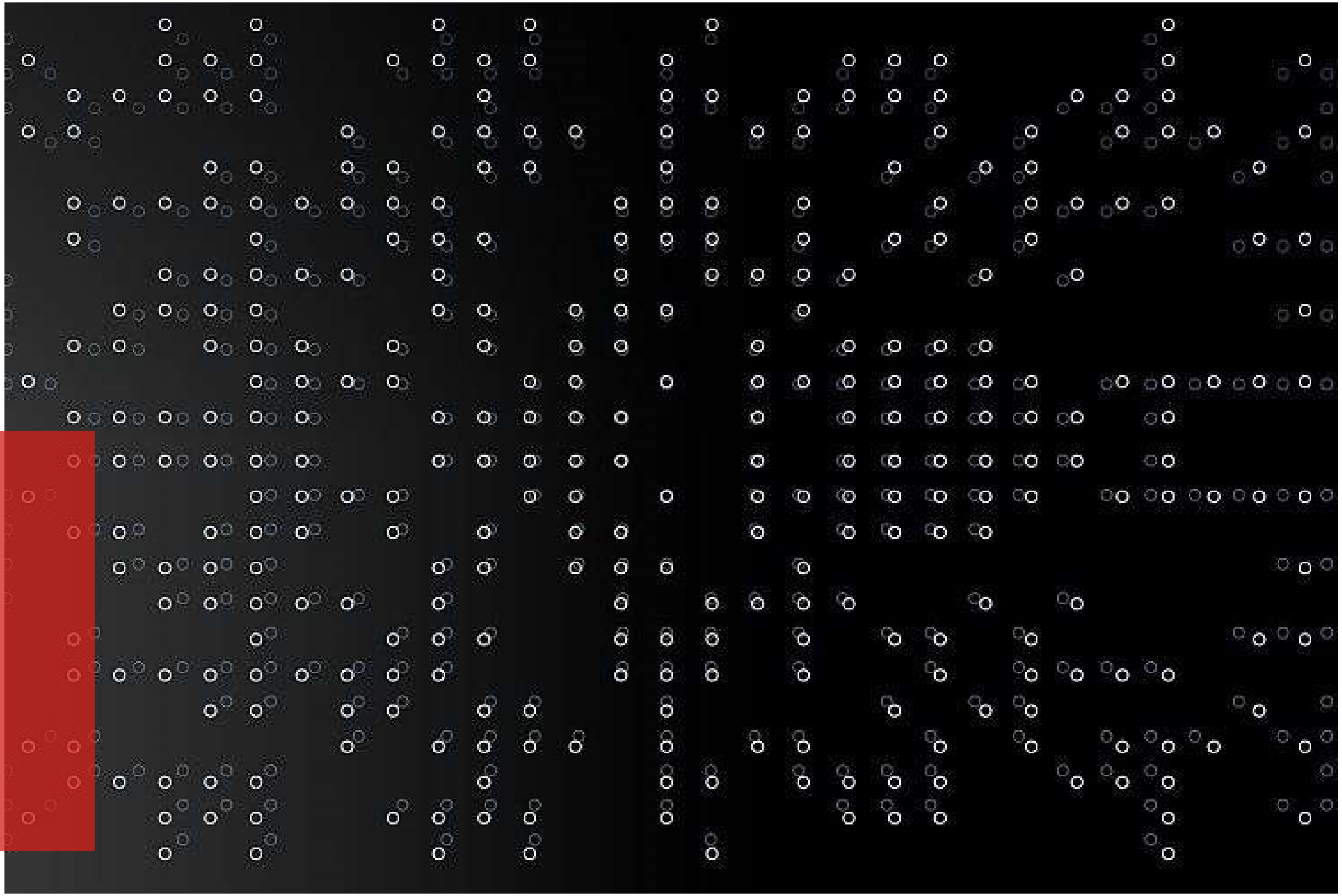
矩阵乘法定义及计算方法

矩阵乘法定义

设$A=(a_{ij})$是一个$m\times n$矩阵，$B=(b_{ij})$是一个$n\times p$矩阵，那么规定A与B的乘积是一个$m\times p$矩阵$C=(c_{ij})$，其中$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$。

计算方法

按照定义进行计算，注意结果矩阵的维度与原始矩阵的关系。



矩阵乘法满足的运算律

结合律

$(AB)C=A(BC)$。

分配律

$(A+B)C=AC+BC$，

$C(A+B)=CA+CB$。

数乘结合律

$k(AB)=(kA)B=A(kB)$，其中k为常数。

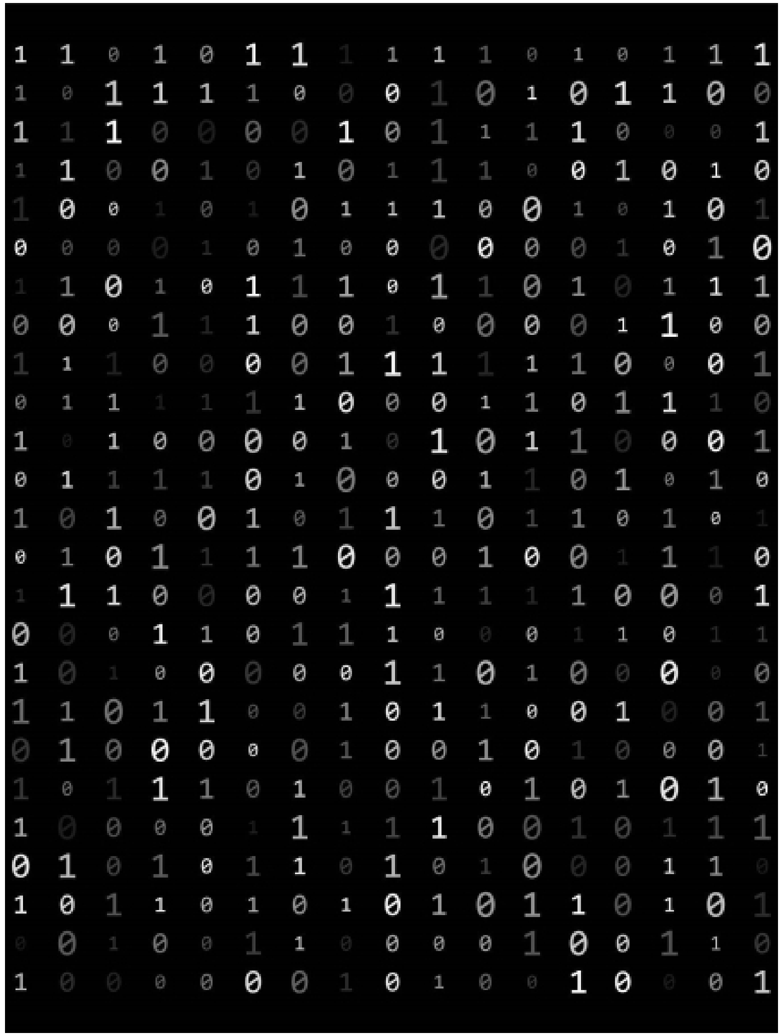
方阵与可逆方阵概念

方阵

行数与列数相等的矩阵称为方阵。

可逆方阵

对于n阶方阵A，如果存在一个n阶方阵B，使得$AB=BA=I$（I为单位矩阵），则称A是可逆的，或称A为非奇异的，并称B是A的一个逆矩阵。



逆矩阵求法及应用举例

求法

求逆矩阵的方法主要有两种，一种是利用伴随矩阵和行列式的性质，即$A^{-1}=frac{1}{|A|}adj(A)$；另一种是利用初等变换，即构造增广矩阵$(A|I)$，通过初等行变换将其化为$(I|B)$的形式，则$B=A^{-1}$。

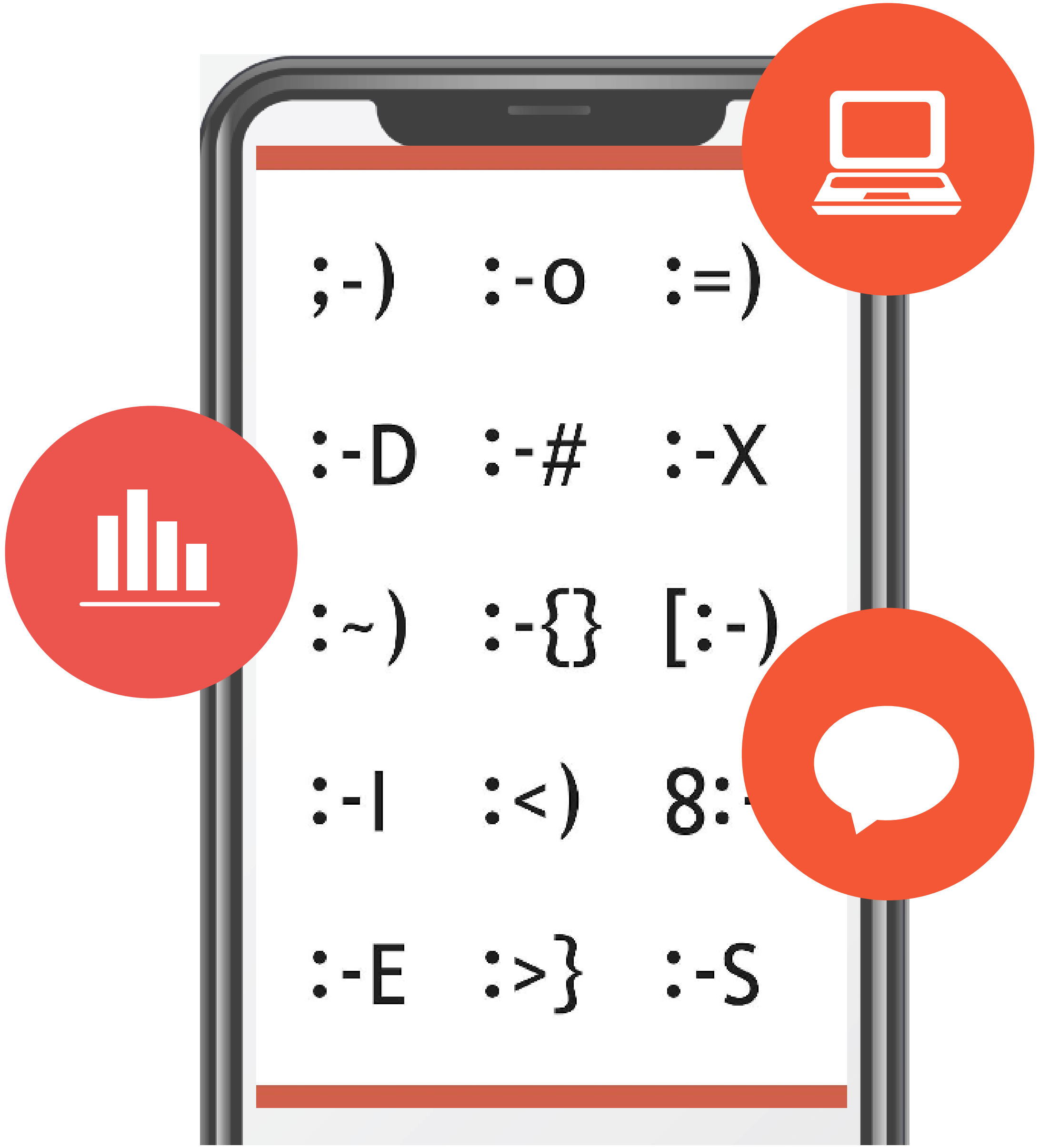
应用举例

逆矩阵在解线性方程组、计算矩阵的幂等方面有广泛应用。例如，对于线性方程组$AX=B$，如果矩阵A可逆，则方程组的解为$X=A^{-1}B$。

03

行列式及其性质

行列式定义及表示方法



行列式的定义

行列式是一个数，它是由n阶方阵的元素按照某种规则计算得到的。

行列式的表示方法

通常用大写字母D表示行列式，如D= |a11 a12 ... a1n|。

行列式的阶数

方阵的阶数就是行列式的阶数，n阶行列式就是由n×n个元素组成的方阵所确定的行列式。

行列式按行（列）展开法则

行列式按行展开

在n阶行列式中，任意取定一行（假设是第i行），把该行各元素与其对应的代数余子式乘积的和等于行列式的值。

行列式按列展开

在n阶行列式中，任意取定一列（假设是第j列），把该列各元素与其对应的代数余子式乘积的和等于行列式的值。

展开法则的应用

利用行列式的展开法则，可以简化行列式的计算过程，特别是对于一些具有特殊结构的行列式，可以通过展开法则直接求解。

行列式性质总结

行列式的性质1

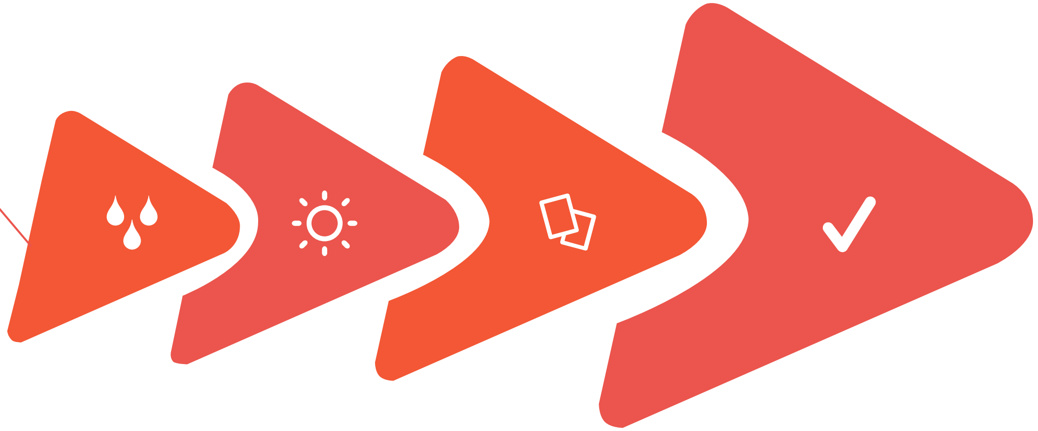
行列式与它的转置行列式相等。

行列式的性质2

互换行列式的两行（列），行列式变号。

行列式的性质3

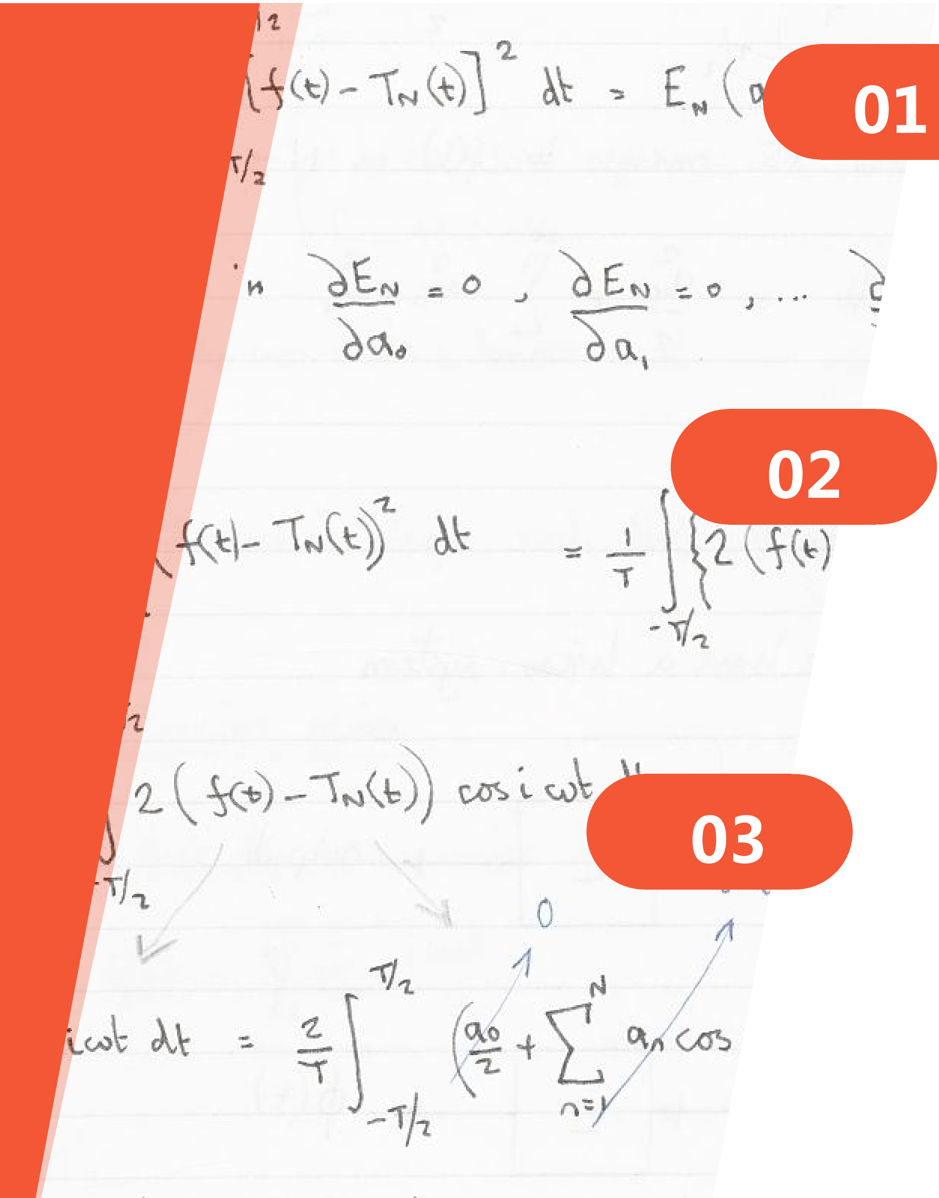
行列式的某一行（列）的所有的元素都乘以同一数k，等于用数k乘此行列式。



行列式的性质4

行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式等于零。

克拉默法则在解线性方程组中应用



01

克拉默法则的内容

如果线性方程组的系数矩阵的行列式D不等于零，则该线性方程组有唯一解，且解可以通过系数矩阵和常数项向量的行列式表示出来。

02

克拉默法则的应用步骤

首先计算系数矩阵的行列式D，然后分别计算每个未知数的系数矩阵的行列式Di（将D中第i列元素替换为常数项向量），最后利用公式xi=Di/D求解每个未知数的值。

03

克拉默法则的优缺点

克拉默法则的优点是直接给出了线性方程组的解的表达式，便于理解和应用；缺点是当系数矩阵的阶数较大时，计算量较大，且对于无解或无穷多解的情况无法直接判断。