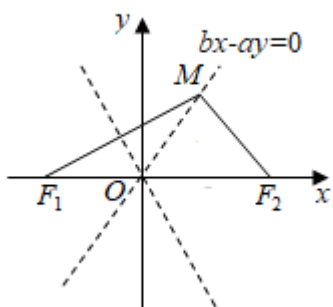


一、选择题

1. 设 O 为坐标原点, F_1, F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点, 若在椭圆上存在点 P 满足 $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{3}$, 且 $|OP| = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, 则该椭圆的离心率为 ()
 A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左焦点为 F , 直线 $x - 2y + \sqrt{5} = 0$ 过点 F 且与双曲线 C 在第一象限的交点为 P , O 为坐标原点, $|OP| = |OF|$, 则双曲线的离心率为 ()
 A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$
3. 过椭圆 $T: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 上的焦点 F 作两条相互垂直的直线 l_1, l_2 , l_1 交椭圆于 A, B 两点, l_2 交椭圆于 C, D 两点, 则 $|AB| + |CD|$ 的取值范围是 ()
 A. $\left[\frac{8\sqrt{3}}{3}, 3\sqrt{3}\right]$ B. $\left[\frac{8\sqrt{2}}{3}, 3\sqrt{3}\right]$ C. $\left[\frac{8\sqrt{2}}{3}, 3\sqrt{2}\right]$ D. $\left[\frac{8\sqrt{3}}{3}, 3\sqrt{2}\right]$
4. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左焦点为 F , 上顶点为 A , 右顶点为 B , 若 $\triangle FAB$ 为直角三角形, 则椭圆 C 的离心率为 ()
 A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
5. 已知 F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的左、右焦点, P 为双曲线右支上异于顶点的任意一点, 若 $\triangle PF_1F_2$ 内切圆圆心为 I , 则圆心 I 到圆 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 上任意一点的距离最小值为 ()
 A. 2 B. $\sqrt{5}-1$ C. 1 D. $\sqrt{5}-2$
6. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点为 F_1, F_2 , 过 F_2 作一条渐近线的垂线, 垂足为 M , 若 $|MF_1| = \sqrt{6}|OM|$, 则 E 的离心率为 ()



- A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{2}$

7. 已知 F_1 、 F_2 分别是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点，点 P 在双曲线右支上且不与顶点重合，过 F_2 作 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线的垂线，垂足为 A ， O 为坐标原点，若 $|OA| = \sqrt{3}b$ ，则该双曲线的离心率为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. 2 D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

8. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上一点 A 关于原点的对称点为点 B ， F 为其右焦点，若 $AF \perp BF$ ，设 $\angle ABF = \alpha$ ，且 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right)$ ，则该椭圆的离心率 e 的取值范围是（ ）

- A. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ B. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ C. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ D. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3}\right)$

9. 已知双曲线C: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 的直线交双曲线左支于 P , 交渐近线 $y = \frac{b}{a}x$ 于点 Q , 点 Q 在第一象限, 且 $F_1Q \perp F_2Q$, 若 $|PQ| = 2|PF_1|$, 则双曲线的离心率为 ()

- A. $\frac{1+\sqrt{10}}{2}$ B. $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{5}+1$ D. $\sqrt{3}+1$

10. 设双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 若点 P 在双曲线上, 且 $\triangle F_1PF_2$ 为锐角三角形, 则 $|PF_1| + |PF_2|$ 的取值范围是 ()

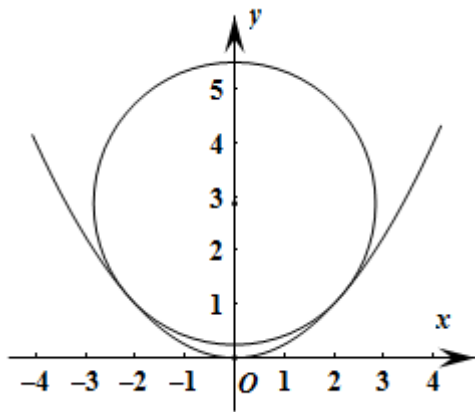
- A. $(4\sqrt{2}, 6)$ B. $(6, 8)$ C. $(4\sqrt{2}, 8)$ D. $(6, 10)$

11. 斜率为 $\frac{1}{4}$ 的直线 l 与椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 相交于 A, B 两点, 且 l 过 C

的左焦点，线段 AB 的中点为 $M(-2,1)$ ， C 的右焦点为 F ，则 $\triangle AFB$ 的周长为 ()

- A. $\frac{48\sqrt{7}}{7}$ B. $\frac{24\sqrt{7}}{7}$ C. $\frac{48\sqrt{14}}{7}$ D. $\frac{24\sqrt{14}}{7}$

12. 在抛物线型内壁光滑的容器内放一个球，其通过中心轴的纵剖面图如图所示，圆心在 y 轴上，抛物线顶点在坐标原点，已知抛物线方程是 $x^2 = 4y$ ，圆的半径为 r ，若圆的大小变化时，圆上的点无法触及抛物线的顶点 O ，则圆的半径 r 的取值范围是 ()



- A. $(2, +\infty)$ B. $(1, +\infty)$ C. $[2, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

二、填空题

13. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 右焦点 $F(c, 0)$ 关于直线 $y = 2x$ 的对称点 Q 在双曲线上，则双曲线的离心率是_____.

14. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左焦点为 F ，椭圆外一点 $P(0, t) (t > 1)$ ，直线 PF 交椭圆于 A 、 B 两点，过 P 作椭圆 C 的切线，切点为 E ，若 $3|PE|^2 = 4|PA| \cdot |PB|$ ，则 $t =$ _____.

15. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线与直线 $x = -1$ 所围成的三角形的面积为 4，则双曲线 C 的离心率为_____.

16. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F ， $A(-a, 0)$ ， $B(0, b)$ ， $C(0, -b)$ 分别为其三个顶点. 直线 CF 与 AB 交于点 D ，若椭圆的离心率 $e = \frac{1}{3}$ ，则 $\tan \angle BDC =$ _____.

17. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 $4\sqrt{6}$ ，直线 l 与椭圆 C 交于 A 、 B 两点，且 $OA \perp OB$ ，过 O 作 $OD \perp AB$ 交 AB 于点 D ，点 D 的坐标为 $(2, 1)$ ，则椭圆 C 的方程为_____.

18. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 点 F 为 E 的左焦点, 点 P 为 E 上位于第一象限内的点, P 关于原点的对称点为 Q , 且满足 $|PF| = 3|FQ|$, 若 $|OP| = b$, 则 E 的离心率为_____.

19. 对抛物线 $C: x^2 = 4y$, 有下列命题:

- ① 设直线 $l: y = kx + 1$, 则直线 l 被抛物线 C 所截得的最短弦长为 4;
 - ② 已知直线 $l: y = kx + 1$ 交抛物线 C 于 A, B 两点, 则以 AB 为直径的圆一定与抛物线的准线相切;
 - ③ 过点 $P(2, t) (t \in \mathbb{R})$ 与抛物线有且只有一个交点的直线有 1 条或 3 条;
 - ④ 若抛物线 C 的焦点为 F , 抛物线上一点 $Q(2, 1)$ 和抛物线内一点 $R(2, m) (m > 1)$, 过点 Q 作抛物线的切线 l_1 , 直线 l_2 过点 Q 且与 l_1 垂直, 则 l_2 平分 $\angle RQF$;
- 其中你认为正确命题的所有命题的序号是_____.

20. 已知下列几个命题:

- ① $\triangle ABC$ 的两个顶点为 $A(-4, 0), B(4, 0)$, 周长为 18, 则 C 点轨迹方程为 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$;
- ② “ $x > 1$ ” 是 “ $|x| > 0$ ” 的必要不充分条件;
- ③ 已知命题 $p: 3 \geq 3, q: 3 > 4$, 则 $p \vee q$ 为真, $p \wedge q$ 为假, $\neg p$ 为假;
- ④ 双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$ 的离心率为 $\frac{5}{4}$. 其中正确的命题的序号为_____.

三、解答题

21. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 $M(0, 2)$ 是椭圆的一个顶点, $\triangle F_1MF_2$ 是等腰直角三角形.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过点 M 分别作直线 MA, MB 交椭圆于 A, B 两点, 设两直线 MA, MB 的斜率分别为 k_1, k_2 , 且 $k_1 + k_2 = 8$, 探究: 直线 AB 是否过定点, 并说明理由.

22. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 过点 $A(2, 0)$ 的直线 l 交 C 于 M, N 两点, 当 MN 与 x 轴垂直时, $\triangle VMNF$ 的周长为 9.

(1) 求 C 的方程;

(2) 在 x 轴上是否存在点 P , 使得 $\angle OPM = \angle OPN$ 恒成立 (O 为坐标原点)? 若存在求出坐标, 若不存在说明理由.

23. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A, B , 离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 椭圆

E 上任意一点 M 到两个焦点 F_1, F_2 的距离之积的最大值为 4.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 已知点 P 为直线 $l: x=4$ 上的任意一点, 直线 PA 、 PB 与椭圆 E 分别交于两点 C 、 D (不同于 A 、 B 两点), 求证: 直线 CD 经过定点, 并求出该定点的坐标,

24. 已知点 M 是圆 $C: (x-2)^2 + y^2 = r^2 (r > 2)$ 与 x 轴负半轴的交点, 过点 M 作圆 C 的弦 MN , 并使弦 MN 的中点恰好落在 y 轴上.

(1) 求点 N 的轨迹方程;

(2) 设点 N 的轨迹为曲线 E , 延长 NO 交直线 $x=-2$ 于点 A , 延长 NC 交曲线 E 于点 B , 曲线 E 在点 B 处的切线交 y 轴于点 D , 求证: $AD \perp BD$.

25. 设命题 p : 方程 $\frac{x^2}{a-3} + \frac{y^2}{a+7} = 1$ 表示双曲线; 命题 q : 不等式 $a - \frac{1}{x} < 0$ 对 $0 < x \leq 1$ 恒成立.

(I) 若命题 $p \vee q$ 为真, 求实数 a 的取值范围;

(II) 若命题 $p \vee q$ 为真, 命题 $p \wedge q$ 为假, 求实数 a 的取值范围.

26. 在平面直角坐标系中, 动点 $P(x, y)$ ($y > 0$) 到定点 $M(0, 1)$ 的距离比到 x 轴的距离大 1.

(1) 求动点 P 的轨迹 C 的方程;

(2) 过点 M 的直线 l 交曲线 C 于 A , B 两点, 若 $|AB| = 8$, 求直线 l 的方程.

【参考答案】 ***试卷处理标记, 请不要删除

一、选择题

1. A

解析: A

【分析】

根据中线向量可得 $\vec{PO} = \frac{1}{2}(\vec{PF_1} + \vec{PF_2})$, 平方后结合椭圆的定义可得 $|\vec{PF_1}| \cdot |\vec{PF_2}| = a^2$, 在

焦点三角形中再利用余弦定理可得 $4c^2 = a^2$, 从而可求离心率.

【详解】

因为 O 为 F_1F_2 的中点, 故 $\vec{PO} = \frac{1}{2}(\vec{PF_1} + \vec{PF_2})$,

所以 $|\vec{PO}|^2 = \frac{1}{4}(\vec{PF_1}^2 + \vec{PF_2}^2 + 2\vec{PF_1} \cdot \vec{PF_2})$, 故 $\frac{3}{4}a^2 = \frac{1}{4}(\vec{PF_1}^2 + \vec{PF_2}^2 + 2|\vec{PF_1}| \cdot |\vec{PF_2}| \cdot \frac{1}{2})$

,

故 $3a^2 = \vec{PF_1}^2 + \vec{PF_2}^2 + |\vec{PF_1}| \cdot |\vec{PF_2}| = (|\vec{PF_1}| + |\vec{PF_2}|)^2 - |\vec{PF_1}| \cdot |\vec{PF_2}|$, 所以 $|\vec{PF_1}| \cdot |\vec{PF_2}| = a^2$

,

$$\text{又 } 4c^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2| \cdot \frac{1}{2},$$

$$\text{故 } 4c^2 = \left(|PF_1| + |PF_2|\right)^2 - 3|PF_1| \cdot |PF_2| = 4a^2 - 3a^2 = a^2, \text{ 故 } e = \frac{1}{2}.$$

故选: A.

【点睛】

方法点睛: 与焦点三角形有关的计算问题, 注意利用椭圆的定义来转化, 还要注意利用余弦定理和向量的有关方法来计算长度、角度等.

2. D

解析: D

【分析】

焦点三角形 PFF_1 满足 $|OP| = |OF|$, 可根据三角形一边的中线是该边的一半, 可判断该三角形是直角三角形. 算出该三角形的中位线 OH , 可得到 $|PF_1| = 2$, 根据双曲线定义和勾股定理计算出 a, c 求解.

【详解】

直线 $x - 2y + \sqrt{5} = 0$ 过点 F , 可得 $F(-\sqrt{5}, 0)$

设右焦点为 F_1 , PF 的中点为 H .

因为 O 是 FF_1 的中点, 且 $|OP| = |OF|$, 故三角形 PFF_1 为直角三角形.

$PF \perp PF_1$, 故 $OH \perp PF$

$$\text{由点到直线距离公式有 } OH = \frac{|\sqrt{5}|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = 1$$

$$\text{故 } |PF_1| = 2, \quad |PF| - |PF_1| = 2a, \quad |PF|^2 + |PF_1|^2 = |F_1F_2|^2 = (2\sqrt{5})^2$$

$$\text{故 } 2^2 + (2 + 2a)^2 = 20.$$

可得 $a = 1$

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{5}$$

故选: D

【点睛】

双曲线的离心率是双曲线最重要的几何性质, 求双曲线的离心率(或离心率的取值范围), 常见有两种方法:

① 求出 a, c , 代入公式 $e = \frac{c}{a}$;

② 只需要根据一个条件得到关于 a, b, c 的齐次式, 结合 $b^2 = c^2 - a^2$ 转化为 a, c 的齐次式, 然后等式(不等式)两边分别除以 a 或 a^2 转化为关于 e 的方程(不等式), 解方程(不等式)即可得 e (e 的取值范围).

3. C

解析: C

【分析】

当直线 l_1 、 l_2 有一条斜率不存在时, 可直接求得 $|AB| + |CD| = 3\sqrt{2}$, 当直线 l_1 、 l_2 的斜率都存在且不为0时, 不妨设直线 l_1 的斜率为 k , 则直线 l_2 的斜率为 $-\frac{1}{k}$, 则可得直线 l_1 的方程, 与椭圆联立, 根据韦达定理及弦长公式, 可求得 $|AB|$ 的表达式, 同理可求得 $|CD|$ 的表达式

, 令 $1+k^2=t$, 则可得 $|AB| + |CD| = \frac{6\sqrt{2}}{2+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}$, 令 $y = 2 + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}$, 根据二次函数的性质

, 结合 t 的范围, 即可求得 $|AB| + |CD|$ 的范围, 综合即可得答案.

【详解】

当直线 l_1 、 l_2 有一条斜率不存在时, 不妨设直线 l_1 斜率不存在, 则直线 l_2 斜率为0,

$$\text{此时 } |AB| = 2\sqrt{2}, \quad |CD| = \frac{2b^2}{a} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

$$\text{所以 } |AB| + |CD| = 3\sqrt{2},$$

当直线 l_1 、 l_2 的斜率都存在且不为0时, 不妨设直线 l_1 的斜率为 k , 则直线 l_2 的斜率为 $-\frac{1}{k}$,

不妨设直线 l_1 、 l_2 都过椭圆的右焦点 $F(1,0)$,

$$\text{所以直线 } l_1: y = k(x-1), \quad \text{直线 } l_2: y = -\frac{1}{k}(x-1),$$

$$\text{联立 } l_1 \text{ 与椭圆 } \begin{cases} y = k(x-1) \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 可得 } (1+2k^2)x^2 - 4k^2x + 2k^2 - 2 = 0,$$

$$\Delta = (-4k^2)^2 - 4(1+2k^2)(2k^2-2) = 8k^2 + 8 > 0,$$

$$x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{1+2k^2}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{2k^2-2}{1+2k^2},$$

$$\text{所以 } |AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2}$$

$$= \sqrt{1+k^2} \sqrt{\left(\frac{4k^2}{1+2k^2}\right)^2 - 4 \times \frac{2k^2-2}{1+2k^2}} = \frac{2\sqrt{2}(1+k^2)}{1+2k^2},$$

$$\text{同理 } |CD| = \frac{2\sqrt{2}(1+\left(-\frac{1}{k}\right)^2)}{1+2\left(-\frac{1}{k}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}(1+k^2)}{k^2+2},$$

$$\text{所以 } |AB| + |CD| = \frac{2\sqrt{2}(1+k^2)}{1+2k^2} + \frac{2\sqrt{2}(1+k^2)}{k^2+2},$$

令 $1+k^2=t$, 因为 $k \neq 0$, 所以 $t > 1$,

$$\text{所以 } |AB| + |CD| = \frac{2\sqrt{2}(1+k^2)}{1+2k^2} + \frac{2\sqrt{2}(1+k^2)}{k^2+2} = \frac{2\sqrt{2}t}{2t-1} + \frac{2\sqrt{2}t}{t+1} = \frac{6\sqrt{2}t^2}{(2t-1)(t+1)} =$$

$$\frac{6\sqrt{2}t^2}{2t^2+t-1} = \frac{6\sqrt{2}}{2+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}},$$

$$\text{令 } y = 2 + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} = -\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4},$$

因为 $t > 1$, 所以 $\frac{1}{t} \in (0, 1)$,

$$\text{所以 } y \in \left(2, \frac{9}{4}\right], \text{ 所以 } \frac{1}{y} \in \left[\frac{4}{9}, \frac{1}{2}\right),$$

$$\text{所以 } |AB| + |CD| = 6\sqrt{2} \times \frac{1}{y} \in \left[\frac{8\sqrt{2}}{3}, 3\sqrt{2}\right),$$

$$\text{综上 } |AB| + |CD| \text{ 的取值范围是 } \left[\frac{8\sqrt{2}}{3}, 3\sqrt{2}\right].$$

故选: C

【点睛】

解题的关键是设出直线的方程, 结合韦达定理及弦长公式, 求得 $|AB| + |CD|$ 的表达式, 再根据二次函数性质求解, 易错点为需求直线 l_1 、 l_2 中有一个不存在时, $|AB| + |CD|$ 的值, 考查计算求值的能力, 属中档题.

4. C

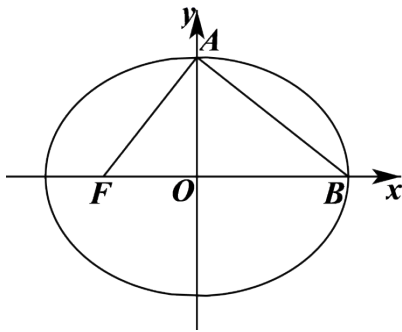
解析: C

【分析】

作出图形, 可知 $\angle FAB$ 是以 $\angle FAB$ 为直角的直角三角形, 可得出 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, 可得出 a 、 b 、 c 的齐次等式, 进而可求得椭圆 C 的离心率.

【详解】

如下图所示, 可知 $\angle AFB$ 、 $\angle ABF$ 均为锐角, 所以, $\angle FAB$ 是以 $\angle FAB$ 为直角的直角三角形,



由题意可知，点 $F(-c, 0)$ 、 $A(0, b)$ 、 $B(a, 0)$ ，则 $\overrightarrow{AF} = (-c, -b)$ ， $\overrightarrow{AB} = (a, -b)$ ，

$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AB} = -ac + b^2 = 0$ ，可得 $a^2 - c^2 - ac = 0$ ，即 $c^2 + ac - a^2 = 0$ ，

在等式 $c^2 + ac - a^2 = 0$ 的两边同时除以 a^2 可得 $e^2 + e - 1 = 0$ ， $0 < e < 1$ ，解得

$$e = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

故选：C.

【点睛】

方法点睛：求解椭圆或双曲线的离心率的方法如下：

(1) 定义法：通过已知条件列出方程组，求得 a 、 c 的值，根据离心率的定义求解离心率 e 的值；

(2) 齐次式法：由已知条件得出关于 a 、 c 的齐次方程，然后转化为关于 e 的方程求解；

(3) 特殊值法：通过取特殊位置或特殊值，求得离心率.

5. C

解析：C

【分析】

设 $\triangle PF_1F_2$ 内切圆与 $\triangle PF_1F_2$ 的三边 PF_1 、 PF_2 、 F_1F_2 的切点分别为 D 、 N 、 M ，根据圆的切线性质，可得 $OM = 2$ ，即可得答案.

【详解】

设 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆分别与 PF_1 、 PF_2 切于点 A 、 B ，与 F_1F_2 切于点 M ，则

$|PA| = |PB|$ ， $|F_1A| = |F_1M|$ ， $|F_2B| = |F_2M|$. 又点 P 在双曲线右支上，

$\therefore |PF_1| - |PF_2| = 2a$ ，即 $(|PA| + |F_1A|) - (|PB| + |F_2B|) = 2a$ ，

$\therefore |F_1M| - |F_2M| = 2a$ ①，

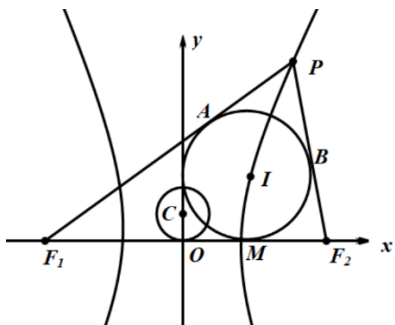
又 $|F_1M| + |F_2M| = 2c$ ②，

由①+②，解得 $|F_1M| = a + c$ ，

又 $|OF_1| = c$ ，则 $M(a, 0)$ ，

因为双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的 $a = 2$ ，

所以内切圆圆心 I 与在直线 $x = 2$ 上，设 $I(2, y_0)$ ，



【点睛】

方法点睛：离心率的求解在圆锥曲线的考查中是一个重点也是难点，一般求离心率有以下几种情况：①直接求出 a, c ，从而求出 e ；②构造 a, c 的齐次式，求出 e ；③采用离心率的定义以及圆锥曲线的定义来求解；④根据圆锥曲线的统一定义求解。

7. B

解析：B

【分析】

延长 F_2A 交 PF_1 于点 Q ，可得 $|QF_1| = 2|OA| = 2\sqrt{3}b$ ，结合双曲线的定义可得 a, b 的关系，从而求得离心率。

【详解】

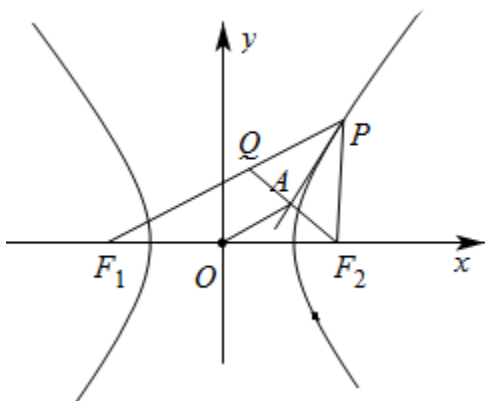
延长 F_2A 交 PF_1 于点 Q ， $\because PA$ 是 $\angle F_1PF_2$ 的平分线， $\therefore |AQ| = |AF_2|$ ， $|PQ| = |PF_2|$ ，

又 O 是 F_1F_2 中点，所以 $QF_1 \parallel AO$ ，且 $|QF_1| = 2|OA| = 2\sqrt{3}b$ ，

又 $|QF_1| = |PF_1| - |PQ| = |PF_1| - |PF_2| = 2a$ ， $\therefore 2a = 2\sqrt{3}b$ ，

$$a^2 = 3b^2 = 3(c^2 - a^2)，\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

故选：B.



【点睛】

关键点点睛：本题考查求双曲线的离心率，解题关键是找到关于 a, b, c 的关系，解题方法是延长 F_2A 交 PF_1 于点 Q ，利用等腰三角形的性质、平行线的性质得出 $|QF_1| = 2\sqrt{3}b$ ，然后由双曲线的定义得出关系式，从而求解。

8. B

解析：B

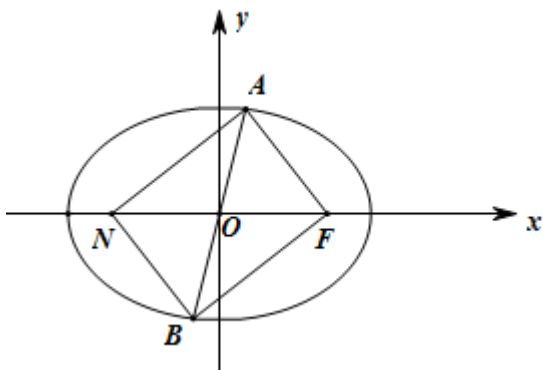
【分析】

由题意设椭圆的左焦点为 N ，连接 AN ， BN ，因为 $AF \perp BF$ ，所以四边形 $AFBN$ 为长方形，再根据椭圆的定义化简得 $2a = 2c \cos \alpha + 2c \sin \alpha$ ，得到离心率关于 α 的函数表达式，再利用辅助角公式和三角函数的单调性求得离心率的范围。

【详解】

由题意椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 上一点 A 关于原点的对称点为点 B , F 为其右焦点,

设左焦点为 N , 连接 AN, BN , 因为 $AF \perp BF$, 所以四边形 $AFBN$ 为长方形.



根据椭圆的定义: $|AF| + |AN| = 2a$, 由题 $\angle ABF = \alpha$, 则 $\angle ANF = \alpha$,

所以 $2a = 2c \cos \alpha + 2c \sin \alpha$,

利用
$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{1}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{1}{\sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)},$$

$$\because \alpha \in \left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right), \therefore \frac{\pi}{3} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{\sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} < \frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ 即椭圆离心率 } e \text{ 的取}$$

值范围是 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$,

故选 B.

【点睛】

本题主要考查了椭圆的离心率的取值范围问题, 其中解答中合理利用椭圆的定义和题设条件, 得到 $2a = 2c \cos \alpha + 2c \sin \alpha$, 再利用三角函数的性质求解是解答的关键, 着重考查了推理与运算能力, 属于中档试题.

9. A

解析: A

【分析】

由 $F_1Q \perp F_2Q$ 得出 $|OQ| = c$, 求出 Q 点坐标为 (a, b) , 利用 $|PQ| = 2|PF_1|$ 表示出 P 点坐标, 代入双曲线方程得关于 a, b, c 的等式, 变形后可求得 e .

【详解】

$$\because F_1Q \perp F_2Q, O \text{ 是 } F_1F_2 \text{ 中点}, \therefore |OQ| = c,$$

$$\text{设 } Q(x, y) \ (x > 0, y > 0), \text{ 则 } \begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{b}{a} \\ x^2 + y^2 = c^2 \end{cases}, \text{ 又 } a^2 + b^2 = c^2, \text{ 故解得 } \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}, \text{ 即}$$

$Q(a, b)$,

$$|PQ| = 2|PF_1|, \text{ 则 } \overrightarrow{QP} = 2\overrightarrow{PF_1}, (x_p - a, y_p - b) = 2(-c - x_p, -y_p), \text{ 解得 } \begin{cases} x_p = \frac{a-2c}{3} \\ y_p = \frac{b}{3} \end{cases}$$

,

又 P 在双曲线上, $\therefore \frac{(a-2c)^2}{9a^2} - \frac{b^2}{9b^2} = 1$, 解得 $e = \frac{\sqrt{10}+1}{2}$ ($\frac{1-\sqrt{10}}{2}$ 舍去).

故选: A.

【点睛】

关键点点睛: 本题考查求双曲线的离心率, 解题关键是找到关于 a, c 的齐次式, 本题利用 P 在双曲线上列式, 由 $F_1Q \perp F_2Q$ 得 $Q(a, b)$, 由 $|PQ| = 2|PF_1|$ 表示出 P 点坐标, 代入双曲线方程即可求解.

10. D

解析: D

【分析】

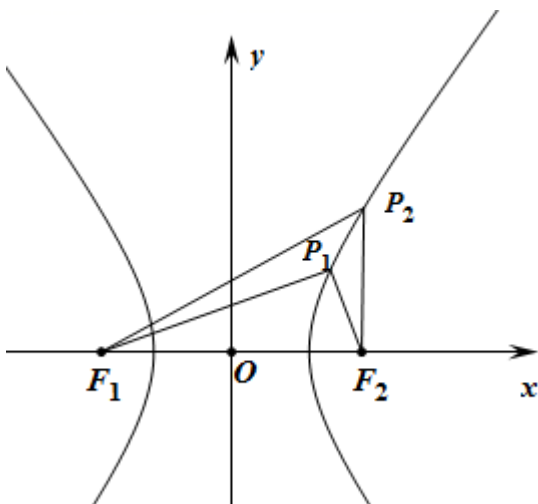
由题意画出图形, 不妨设 P 在第一象限, P 点在 P_1 与 P_2 之间运动, 求出 $\angle F_1P_1F_2$ 和

$\angle F_1F_2P_2$ 为直角时 $|PF_1| + |PF_2|$ 的值, 可得 $\triangle F_1PF_2$

为锐角三角形时 $|PF_1| + |PF_2|$ 的取值范围.

【详解】

$\triangle F_1PF_2$ 为锐角三角形, 不妨设 P 在第一象限, P 点在 P_1 与 P_2 之间运动, 如图,



当 P 在 P_1 处, $\angle F_1P_1F_2 = 90^\circ$, 又 $a=1, b=2, c=\sqrt{5}$

由 $|P_1F_1|^2 + |P_1F_2|^2 = |F_1F_2|^2 = 20$, $|P_1F_1| - |P_1F_2| = 2$,

可得 $|P_1F_1| \cdot |P_1F_2| = 8$,

此时 $|P_1F_1| + |P_1F_2| = 6$;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。
。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/797042134044006156>