专题01 双中点（线段）模型与双角平分线（角）模型

线段与角度是初中几何的入门知识，虽然难度不高，但重要性是不言而喻的。这类模型通常由问题出发，先由线段（角度）和差确定解题方向，然后辅以线段中点（角平分线）来解决。但是，对于有公共部分的线段双中点模型和双角平分线模型，可以写出的线段（角度）和差种类较多，这就增加了思考的难度。

目录导航

例题讲模型 2

模型1.线段的双中点模型 2

模型2.线段的多中点模型 7

模型3.双角平分线模型与角 n 等分线模型 11

习题练模型 20

例题讲模型

模型 1.线段的双中点模型

模型解读

线段双中点模型：两线段在同一直线上且有一个共同的端点，求这两条线段的中点距离的模型我们称之为线段的双中点模型。

模型证明

条件：点 M、N 分别为线段 AB、BC 的中点，**结论：** $MN=\frac{1}{2}AC$．

证明：①当点 *B* 在线段 *AC* 上，如图 1，

图 1

∵M、N 分别为 AB、BC 的中点，∴ $BM=\frac{1}{2}AB$（中点定义）；$BN=\frac{1}{2}BC$（中点定义）；

∵$MN=BM+BN$，∴ $MN=\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}(AB+BC)=\frac{1}{2}AC$；

②当点 B 在线段 AC 的延长线上，如图 2，

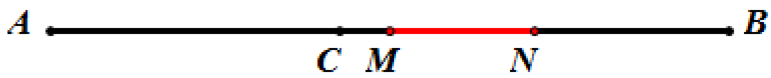


图 2

∵M、N 分别为 AB、BC 的中点，∴ $BM=\frac{1}{2}AB$（中点定义）；$BN=\frac{1}{2}BC$（中点定义）；

∵$MN=BM-BN$，∴ $MN=\frac{1}{2}AB-\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}(AB-BC)=\frac{1}{2}AC$；

③当点 B 在线段 CA 的延长线上

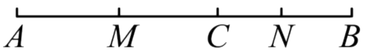
图 3

∵M、N 分别为 AB、BC 的中点，∴ $BM=\frac{1}{2}AB$（中点定义）；$BN=\frac{1}{2}BC$（中点定义）；

∵$MN=BN-BM$，∴ $MN=\frac{1}{2}BC-\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}(BC-BA)=\frac{1}{2}AC$；

模型运用

例 1．（23-24 七年级上·江苏扬州·期末）如图，点 C 在线段 AB 上，点 M、N 分别是 AC、BC 的中点．



(1)若 $AB=18\text{cm}, AM=5\text{cm}$，求 CN 的长；(2)若 $MN=6\text{cm}$，求 AB 的长；

【答案】(1) $CN=4\text{cm}$ (2) $AB=12\text{cm}$

【分析】本题考查了两点间的距离，关键是掌握线段中点的定义．

（1）因为点 M、N 分别是 AC、BC 的中点，所以 $AM=\frac{1}{2}AC$，$NC=\frac{1}{2}BC$，已知 $AB=18\text{cm}, AM=5\text{cm}$，可得 BC 的长，$NC=\frac{1}{2}BC$，可得 CN 的长；（2）因为点 M、N 分别是 AC、BC 的中点，所以 $CM=\frac{1}{2}AC$，$NC=\frac{1}{2}BC$，已知 $MN=6\text{cm}$，可得 AB 的长．

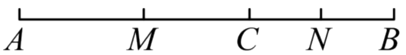
【详解】（1）解：∵点 M、N 分别是 AC、BC 的中点，$\therefore AM=\frac{1}{2}AC$，$NC=\frac{1}{2}BC$，

∵ $AM=5\text{cm}$，$\therefore AC=10\text{cm}$，∵ $AB=18\text{cm}$，$\therefore BC=8\text{cm}$，$\therefore CN=4\text{cm}$；

（2）解：∵点 M、N 分别是 AC、BC 的中点，$\therefore CM=\frac{1}{2}AC$，$NC=\frac{1}{2}BC$，

∵ $MN=CM+CN=6\text{cm}$，$\therefore AB=AC+BC=2(CM+CN)=12\text{cm}$．

例 2．（23-24 七年级上·江西赣州·期末）如图，点 C 在线段 AB 上，点 M，N 分别是线段 AC，BC 的中点．



(1)若 $AC=10\text{cm}$，$CB=6\text{cm}$，求线段 MN 的长；(2)若 $AC+CB=a\text{cm}$，求线段 MN 的长度．

【答案】(1) 8cm (2) $\frac{a}{2}\text{cm}$

【分析】（1）根据线段中点的性质，可得 MC、CN，再根据线段的和以及线段的差，可得答案；

（2）根据线段中点的性质，可得 MC、CN，再根据线段的和以及线段的差，可得答案．

本题考查了线段的长度问题，掌握线段中点的性质是解题的关键．

【详解】（1）∵点 M，N 分别是线段 AC，BC 的中点∴ $MC=\frac{1}{2}AC$，$CN=\frac{1}{2}BC$

∵ $AC=10\text{cm}$，$CB=6\text{cm}$，∴ $MC=5\text{cm}$，$CN=3\text{cm}$ ∴ $MN=MC+CN=5+3=8\text{cm}$

（2）∵点 M，N 分别是线段 AC，BC 的中点∴ $MC=\frac{1}{2}AC$，$CN=\frac{1}{2}BC$

∵ $AC+CB=a\text{cm}$，∴ $MN=MC+CN=\frac{1}{2}AC+\frac{1}{2}CB=\frac{a}{2}\text{cm}$．

例 3．（23-24 七年级·山东淄博·期末）已知点 C 是线段 AB 的中点，点 D 是线段 AC 的三等分点．若线段

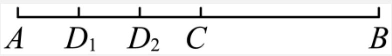
$AB=12\text{ cm}$，则线段 BD 的长为（　　）

A．10 cm　　B．8 cm　　C．8 cm 或 10 cm　　D．2 cm 或 4 cm

【答案】C

【分析】本题主要考查线段的和差，根据题意作图，分情况讨论，由线段之间的关系即可求解．

【详解】如图，∵点 C 是线段 AB 的中点，∴ $AC=BC=\frac{1}{2}AB=6\text{cm}$，

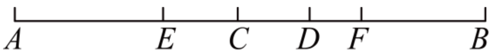


当 $AD=\frac{2}{3}AC=4\text{cm}$ 时，$CD=AC-AD=2\text{ cm}$，∴ $BD=BC+CD=6+2=8\text{cm}$；

当 $AD=\frac{1}{3}AC=2\text{cm}$ 时，$CD=AC-AD=4\text{ cm}$，∴ $BD=BC+CD=6+4=10\text{ cm}$；故选 C．

例 4．（23-24 七年级上·安徽黄山·期末）如图，C，D 是线段 AB 上两点（点 D 在点 C 右侧），E，F 分别是线段 AD,BC 的中点．下列结论：

①$EF=\frac{1}{2}AB$；②若 $AE=BF$，则 $AC=BD$；③$AB-CD=2EF$；④$AC-BD=EC-DF$．



其中正确的结论是（　）

A．①②　　B．②③　　C．②④　　D．③④

【答案】B

【分析】本题主要考查了线段的和差运算，解题的关键是掌握中点的定义，根据图形，分析线段之间的和差关系．结合图形，根据线段中点的定义与线段之间的和差关系逐一进行分析，即可进行解答．

【详解】解：∵E，F 分别是线段 AD,BC 的中点．，∴ $AE=\frac{1}{2}AD, BF=\frac{1}{2}BC$，

∴ $EF=AB-AE-BF=AB-\frac{1}{2}(AD+BC)=AB-\frac{1}{2}(AB+CD)=\frac{1}{2}AB-\frac{1}{2}CD$，故①不符合题意；

∵ $AE=BF$，∴ $\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC$，即 $AD=BC$，

∴ $AD-CD=BC-CD$，∴ $AC=BD$，故②符合题意；

∵ $EF=\frac{1}{2}AB-\frac{1}{2}CD$，∴ $AB-CD=2EF$，故③符合题意；

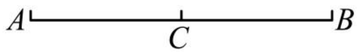
④∵ $AC=AE+CE=\frac{1}{2}AD+CE, BD=BF+DF=\frac{1}{2}BC+DF$，

∴ $AC-BD=\left(\frac{1}{2}AD+CE\right)-\left(\frac{1}{2}BC+DF\right)=\frac{1}{2}(AD-BC)+(CE-DF)$，

∴ $2(AC-BD)=(AD-BC)+2(CE-DF)$，∴ $2(AC-BD)=(AC-BD)+2(CE-DF)$

∴ $AC-BD=2(EC-DF)$，故④不符合题意；故选：B．

例 5．（23-24 七年级上·贵州遵义·期末）已知线段 $AB=24$，点 C 为线段 AB 的中点，点 D 为线段 AC 上的三等分点，则线段 BD 的长的最大值为（　）



A．16　　　B．18　　　C．15　　　D．20

【答案】D

【分析】本题考查线段和差．根据题意先求出 $AC=BC=12$，再根据题干分情况讨论点 D 所在位置，继而得到本题答案．

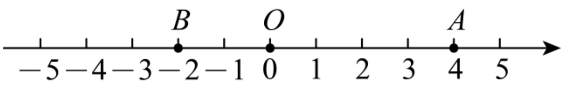
【详解】解：∵线段 $AB=24$，点 C 为线段 AB 的中点，∴ $AC=BC=12$，

∵点 D 为线段 AC 上的三等分点，∴①当点 D 靠近点 A 时：$AD=\frac{1}{3}AC=4$，此时 $BD=24-4=20$；

②当点 D 靠近点 C 时：$AD=\frac{2}{3}AC=8$，此时 $BD=24-8=16$；

∵ $20>16$，∴线段 BD 的长的最大值为：20，故选：D．

例 6．（23-24 七年级上·辽宁阜新·期末）点 A、B 在数轴上所表示的数如图所示，P 是数轴上一点：



(1)将点 B 在数轴上向左移动 2 个单位长度，再向右移动 7 个单位长度，得到点 P，求出 A、P 两点间的距离是多少个单位长度．

(2)若点 B 在数轴上移动了 m 个单位长度到点 P，且 A、P 两点间的距离是 4，求 m 的值．

(3)若点 M 为 AP 的中点，点 N 为 PB 的中点，点 P 在运动过程中，线段 MN 的长度是否发生变化？若发生变化，请你说明理由：若不变，请你画出图形，并求出线段 MN 的长度．

【答案】(1) A、P 两点间的距离是 1 个单位长度

(2) m 的值为 2 或 10 (3)线段 MN 的长度不发生变化，$MN=3$

【分析】本题考查了数轴上两点之间的距离、与线段中点有关的计算、线段的和差，采用数形结合与分类讨论的思想是解此题的关键．

（1）根据数轴上的点向右移动用加法，向左移动用减法求出 P 点表示的数为，即可得解；

（2）分两种情况：当 P 点在 A 点左边时；当 P 点在 A 点右边时；分别求解即可得出答案；（3）分三种情况：当 P 在 A、B 之间时；当 P 在 B 的左侧时；当 P 在 A 的右侧时；分别画出图形，计算即可得出答案．

【详解】（1）解：由数轴可得：B 点表示的数为 -2，A 点表示的数为 4，

∴ P 点表示的数为 $-2-2+7=3$，

∵ $4-3=1$，∴ A 、 P 两点间的距离是1个单位长度；

（2）解：∵ A 、 P 两点间的距离是 4，∴当 P 点在 A 点左边时， P 点表示的数为 $4-4=0$，

∵点 B 在数轴上移动了 m 个单位长度到点 P， B 点表示的数为 -2，∴此时 $m=0-(-2)=2$；

当 P 点在 A 点右边时， P 点表示的数为 $4+4=8$，

∵点 B 在数轴上移动了 m 个单位长度到点 P， B 点表示的数为 -2，

∴此时 $m=8-(-2)=10$；综上所述， m 的值为2或10；

（3）解：线段 MN 的长度不发生变化， $MN=3$，

由数轴可得： B 点表示的数为 -2， A 点表示的数为 4，∴ $AB=4-(-2)=6$，

∵点 M 为 AP 的中点，点 N 为 PB 的中点，∴ $AM=PM=\frac{1}{2}AP$， $PN=BN=\frac{1}{2}PB$，

如图，当 P 在 A 、 B 之间时，此时 $MN=PM+PN=\frac{1}{2}AP+\frac{1}{2}PB=\frac{1}{2}(AP+PB)=\frac{1}{2}AB=3$；

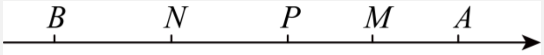


图1

如图，当 P 在 B 的左侧时，此时 $MN=PM-PN=\frac{1}{2}AP-\frac{1}{2}BP=\frac{1}{2}(AP-BP)=\frac{1}{2}AB=3$；

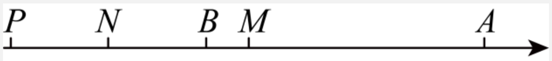


图2

如图，当 P 在 A 的右侧时，此时 $MN=PN-PM=\frac{1}{2}BP-\frac{1}{2}PA=\frac{1}{2}(BP-PA)=\frac{1}{2}AB=3$；

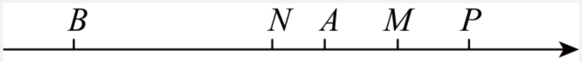


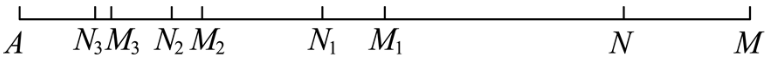
图3

综上所述，点 P 在运动过程中，线段 MN 的长度不会发生变化， $MN=3$．

模型 2.线段的多中点模型

模型解读

条件：如图，点 M 在线段 AN 的延长线上，且线段 $MN=2a$，第 1 次操作：分别取线段 AM 和 AN 的中点 M_1、N_1；第 2 次操作：分别取线段 AM_1 和 AN_1 的中点 M_2，N_2；第 3 次操作：分别取线段 AM_2 和 AN_2 的中点 M_3，N_3；…连续这样操作 n 次，**结论：** $M_nN_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot a$．



模型证明

证明：∵ M_1、N_1 是 AM 和 AN 的中点，∴ $AM_1=\frac{1}{2}AM$，$AN_1=\frac{1}{2}AN$，

∴ $M_1N_1=\frac{1}{2}AM-\frac{1}{2}AN=\frac{1}{2}MN=a$，∵ M_2、N_2 是 AM_1 和 AN_1 的中点，

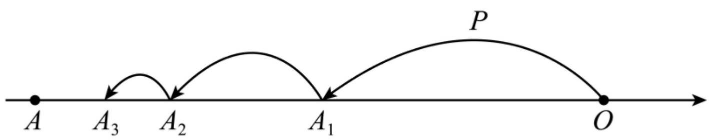
∴ $AM_2=\frac{1}{2}AM_1$，$AN_2=\frac{1}{2}AN_1$，∴ $M_2N_2=\frac{1}{2}AM_1-\frac{1}{2}AN_1=\frac{1}{2}M_1N_1=\frac{1}{2}a$，

∵ M_3，N_3 是 AM_2 和 AN_2 的中点，∴ $AM_3=\frac{1}{2}AM_2$，$AN_3=\frac{1}{2}AN_2$，

∴ $M_3N_3=\frac{1}{2}AM_2-\frac{1}{2}AN_2=\frac{1}{2}M_2N_2=\frac{1}{4}a=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot a$，……发现规律：$M_nN_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot a$，

模型运用

例 1．（23-24 七年级上·贵州六盘水·期末）如图，数轴上的点 O 为原点，点 A 表示的数为 -3，动点 P 从点 O 出发，按以下规律跳动：第 1 次从点 O 跳动到 OA 的中点 A_1 处，第 2 次从点 A_1 跳动到 A_1A 的中点 A_2 处，第 3 次从点 A_2 跳动到 A_2A 的中点 A_3 处，…，第 n 次从点 A_{n-1} 跳动到 $A_{n-1}A$ 的中点 A_n 处，按照这样的规律继续跳动到点 A_4，A_5，A_6，…，A_{2024} 处，那么点 A_{2024} 所表示的数为_____．



【答案】$-3+\frac{3}{2^{2024}}$

【分析】本题考查了线段中点的定义，两点间的距离，探究图形的规律，找到图形变化中线段 AA_n 的变化规律是解题的关键

根据题意，得第一次跳动到 OA 的中点 A_1 处，即在离 A 点的长度为 $\frac{1}{2}\times 3$，第二次从 A_1 点跳动到 A_2

处，即在离A点的长度为$\left(\frac{1}{2}\right)^2\times3$，则跳动 n 次后，即跳到了离A点的长度为$\left(\frac{1}{2}\right)^n\times3$，再根据线段的和差关系可得线段$OA_n$的长度，最后确定点$A_{2024}$的表示的数即可.

【详解】解：由题可知：$OA=3$，此第一次跳动到OA的中点A_1处时，$AA_1=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2}\times3$，

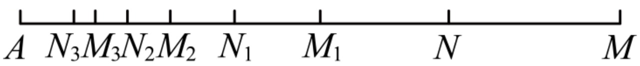
同理，第二次从A_1点跳动到A_2处，$AA_2=\frac{1}{2}\times AA_1=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times3$，

同理，第三次从A_2点跳动到A_3处，$AA_3=\frac{1}{2}\times A_1A_2=\left(\frac{1}{2}\right)^3\times3$　同理，跳动n次后，$AA_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\times3$，

故线段OA_n的长度为：$OA_n=OA-AA_n=3-\left(\frac{1}{2}\right)^n\times3=3-\frac{3}{2^n}$，当$n=2024$时，$OA_{2024}=3-\frac{3}{2^{2024}}$，

∵点A_{2024}在负半轴，∴点A_{2024}表示的数是$-(3-\frac{3}{2^{2024}})=-3+\frac{3}{2^{2024}}$，故答案为：$-3+\frac{3}{2^{2024}}$.

例2．（23-24七年级上·河南濮阳·期末）已知：如图，点M在线段AN的延长线上，且线段$MN=16$，第一次操作：分别取线段AM和AN的中点M_1，N_1；　第二次操作：分别取线段AM_1和AN_1的中点M_2，N_2；第三次操作：分别取线段AM_2和AN_2的中点M_3，N_3，连续这样操作4次，则$M_4N_4=$_________.



【答案】1

【分析】本题主要考查了两点间的距离，熟练掌握两点的距离计算的方法进行计算及根据题意找出问题的规律进行求解是解决本题的关键．根据题意可得$AM-AN=MN$，根据线段的差可得$M_1N_1=\frac{1}{2}MN$，$M_2N_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2MN$，$M_3N_3=\left(\frac{1}{2}\right)^3MN$的长度表示，根据规律进行推理即可得出$M_nN_n$，即可得出答案.

【详解】解：根据题意可得，∵$MN=16$，∴$AM-AN=MN=16$，

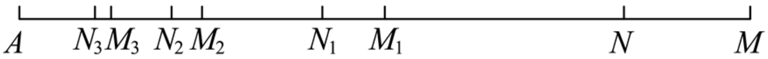
∵线段　AM　和　AN的中点　M_1，N_1，∴$M_1N_1=\frac{AM}{2}-\frac{AN}{2}=\frac{AM-AN}{2}=\frac{1}{2}MN$，

同理：$M_2N_2=\frac{AM_1}{2}-\frac{AN_1}{2}=\frac{1}{2}M_1N_1=\left(\frac{1}{2}\right)^2MN$，∴$M_3N_3=\left(\frac{1}{2}\right)^3MN$，……

依次类推，　$M_nN_n=\left(\frac{1}{2}\right)^nMN$，∴$M_4N_4=\left(\frac{1}{2}\right)^4\times16=1$，故答案为：4.

例3．（23-24七年级上·湖南张家界·期末）如图，点M在线段AN的延长线上，且线段$MN=2$

，第一次操作：分别取线段 AM 和 AN 的中点 M_1、N_1；第二次操作：分别取线段 AM_1 和 AN_1 的中点 M_2，N_2；第三次操作：分别取线段 AM_2 和 AN_2 的中点 M_3，N_3；…连续这样操作 2024 次，则每次的两个中点所形成的所有线段之和 $M_1N_1+M_2N_2+\cdots+M_{2024}N_{2024}=$______.



【答案】$2-\frac{1}{2^{2023}}$

【分析】本题考查了线段规律性问题，准确根据题意找出规律是解决本题的关键，比较有难度．根据线段中点定义先求出 M_1N_1 的长度，再由 M_1N_1 的长度求出 M_2N_2 的长度，从而找到 M_nN_n 的规律，即可求出结果．

【详解】解：∵ M_1、N_1 是 AM 和 AN 的中点，∴ $AM_1=\frac{1}{2}AM$，$AN_1=\frac{1}{2}AN$，

∴ $M_1N_1=\frac{1}{2}AM-\frac{1}{2}AN=\frac{1}{2}MN=1$，∵ M_2、N_2 是 AM_1 和 AN_1 的中点，

∴ $AM_2=\frac{1}{2}AM_1$，$AN_2=\frac{1}{2}AN_1$，∴ $M_2N_2=\frac{1}{2}AM_1-\frac{1}{2}AN_1=\frac{1}{2}M_1N_1=\frac{1}{2}$，

∵ M_3，N_3 是 AM_2 和 AN_2 的中点，∴ $AM_3=\frac{1}{2}AM_2$，$AN_3=\frac{1}{2}AN_2$，

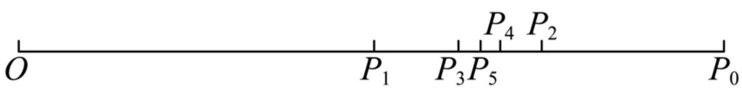
∴ $M_3N_3=\frac{1}{2}AM_2-\frac{1}{2}AN_2=\frac{1}{2}M_2N_2=\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$，……发现规律：$M_nN_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，

∴ $M_1N_1+M_2N_2+\cdots+M_{2024}N_{2024}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{2023}$

∴ $2\left(M_1N_1+M_2N_2+\cdots+M_{2024}N_{2024}\right)=2+1+\frac{1}{2}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{2022}$

两式相减，得 $M_1N_1+M_2N_2+\cdots+M_{2024}N_{2024}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{2023}=2-\frac{1}{2^{2023}}$，故答案为：$2-\frac{1}{2^{2023}}$．

例 4．（23-24 七年级上·广东·期中）学习了线段的中点之后，小明利用数学软件 *GeoGebra* 做了 n 次取线段中点实验：如图，设线段 $OP_0=1$，第 1 次，取 OP_0 的中点 P_1；第 2 次，取 P_0P_1 的中点 P_2；第 3 次，取 P_1P_2 的中点 P_3，第 4 次，取 P_2P_3 的中点 P_4；…



(1)请完成下列表格数据．

次数	$P_{i-1}P_i$	线段 OP_i 的长

第 1 次	$P_0P_1=\frac{1}{2}$	$OP_1=OP_0-P_0P_1=1-\frac{1}{2}$
第 2 次	$P_1P_2=\frac{1}{2^2}$	$OP_2=OP_1+P_1P_2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}$
第 3 次	$P_2P_3=\frac{1}{2^3}$	$OP_3=OP_2-P_2P_3=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}$
第 4 次	$P_3P_4=\frac{1}{2^4}$	$OP_4=OP_3+P_3P_4=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}$
第 5 次	①______	②________
…	…	…

(2)小明对线段OP_4的表达式进行了如下化简：

因为$OP_4=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}$，所以$2OP_4=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}\right)=2-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}$，

两式相加，得$3OP_4=2+\frac{1}{2^4}$，所以$OP_4=\frac{2}{3}+\frac{1}{3\times2^4}$.

请你参考小明的化简方法，化简OP_5的表达式.

(3)类比猜想：$P_{n-1}P_n=$_____，$OP_n=$_____，随着取中点次数n的不断增大，OP_n的长最终接近的值是____.

【答案】(1)①$P_4P_5=\frac{1}{2^5}$；②$OP_5=OP_4-P_4P_5=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}$ (2) $OP_5=\frac{2}{3}-\frac{1}{3\times2^5}$ (3) $\frac{1}{2^n},\frac{2}{3}+\frac{(-1)^n}{3\times2^n},\frac{2}{3}$

【分析】本题考查规律型：数字的变化类，找到规律并会表现出来是解题关键.

（1）根据表中的规律可求出P_4P_5，根据$OP_5=OP_4-P_4P_5$可得出答案；

（2）参照小明对线段OP_4的表达式的化简可得OP_5的表达式；（3）根据类比猜想可得答案.

【详解】（1）解：$P_4P_5=\frac{1}{2^5}$，$OP_5=OP_4-P_4P_5=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}$；

故答案为：$P_4P_5=\frac{1}{2^5}$，$OP_5=OP_4-P_4P_5=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}$；

（2）因为$OP_5=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}$，所以$2OP_5=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}\right)=2-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}$.

两式相加，得$3OP_5=2-\frac{1}{2^5}$．所以$OP_5=\frac{2}{3}-\frac{1}{3\times2^5}$；

（3）$P_{n-1}P_n=\frac{1}{2^n},OP_n=\frac{2}{3}+\frac{(-1)^n}{3\times2^n}$，随着取中点次数$n$的不断增大$OP_n$的长最终接近的值是$\frac{2}{3}$.

故答案为：$\frac{1}{2^n},\frac{2}{3}+\frac{(-1)^n}{3\times2^n},\frac{2}{3}$.

模型 3.双角平分线模型与角 *n* 等分线模型

模型解读

双角平分线模型：共顶点的三条射线组成的三个角中（两角共一边），已知任意两个角的平分线，求角平分线夹角。下面是最完整的角平分线模型结论的推导过程，推导过程是需要掌握的，也并不难推，同学们自己尝试着推导一遍，再去记结论，印象会更加深刻。

模型证明

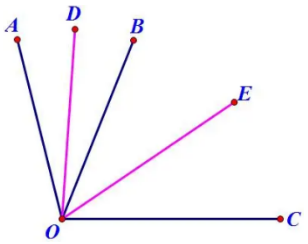


图 1

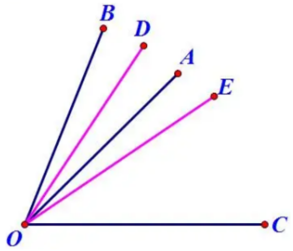


图 2

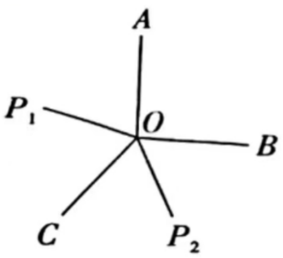


图 3

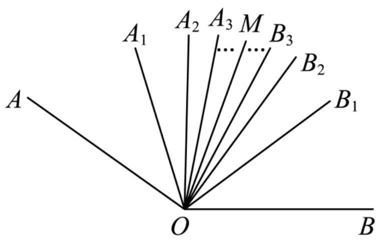


图 4

1）双角平分线模型（两个角无公共部分）

条件：如图 1，已知：OD、OE 分别平分$\angle AOB$、$\angle BOC$；**结论：** $\angle DOE=\frac{1}{2}\angle AOC$。

证明：$\because OD$、OE 分别平分$\angle AOB$、$\angle BOC$，$\therefore \angle DOB=\frac{1}{2}\angle AOB$， $\angle BOE=\frac{1}{2}\angle BOC$，

$\therefore \angle DOB+\angle BOE=\frac{1}{2}\angle AOB+\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\angle AOC$， $\therefore \angle DOE=\frac{1}{2}\angle AOC$。

2）双角平分线模型（两个角有公共部分）

条件：如图 1，已知：OD、OE 分别平分$\angle AOB$、$\angle BOC$；**结论：** $\angle DOE=\frac{1}{2}\angle AOC$。

证明：$\because OD$、OE 分别平分$\angle AOB$、$\angle BOC$，$\therefore \angle DOB=\frac{1}{2}\angle AOB$， $\angle BOE=\frac{1}{2}\angle BOC$，

$\therefore \angle BOE-\angle DOB=\frac{1}{2}\angle BOC-\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\angle AOC$， $\therefore \angle DOE=\frac{1}{2}\angle AOC$。

3）拓展模型：双角平分线模型（三个角围成一个周角）

条件：如图 3，已知$\angle AOB+\angle BOC+\angle AOC=360°$，$OP_1$ 平分$\angle AOC$、OP_2 平分$\angle BOC$；

结论： $\angle P_1OP_2=180^{\circ}-\frac{1}{2}\angle AOB$。

证明：$\because OP_1$ 平分$\angle AOC$、OP_2 平分$\angle BOC$，$\therefore \angle P_1OC=\frac{1}{2}\angle AOC$， $\angle P_2OC=\frac{1}{2}\angle BOC$，

$\because \angle AOB+\angle BOC+\angle AOC=360°$，$\therefore \angle BOC+\angle AOC=360°-\angle AOB$，

$\therefore \angle P_1OP_2=\angle P_1OC-\angle P_2OC=\frac{1}{2}\angle AOC+\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\left(\angle AOC+\angle BOC\right)=180°-\frac{1}{2}\angle AOB$。

4）角 *n* 等分线模型

条件：如图 4，$\angle AOB=\alpha, OA_1$、OB_1 分别是 $\angle AOM$ 和 $\angle MOB$ 的平分线，OA_2、OB_2 分别是 $\angle A_1OM$ 和 $\angle MOB_1$ 的平分线，OA_3、OB_3 分别是 $\angle A_2OM$ 和 $\angle MOB_2$ 的平分线…，OA_n, OB_n 分别是 $\angle A_{n-1}OM$ 和 $\angle MOB_{n-1}$ 的平分线；**结论：** $\angle A_nOB_n=\dfrac{\alpha}{2^n}$.

证明： Q$\angle AOB=\alpha$，OA_1、OB_1 分别是 $\angle AOM$ 和 $\angle MOB$ 的平分线，

$\therefore \angle A_1OM=\dfrac{1}{2}\angle AOM, \angle B_1OM=\dfrac{1}{2}\angle BOM$，$\therefore \angle A_1OB_1=\dfrac{1}{2}(\angle AOM+\angle BOM)=\dfrac{1}{2}\angle AOB=\dfrac{1}{2}\alpha$，

QOA_2、OB_2 分别是 $\angle A_1OM$ 和 $\angle MOB_1$ 的平分线，$\therefore \angle A_2OM=\dfrac{1}{2}\angle A_1OM, \angle B_2OM=\dfrac{1}{2}\angle B_1OM$，

$\therefore \angle A_2OB_2=\dfrac{1}{2}(\angle A_1OM+\angle B_1OM)=\dfrac{1}{2}\angle A_1OB_1=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\angle AOB=\dfrac{\alpha}{2^2}$，

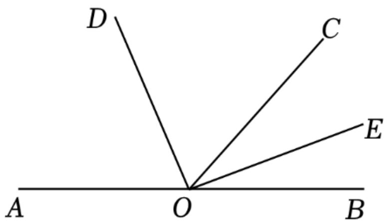
QOA_3、OB_3 分别是 $\angle A_2OM$ 和 $\angle MOB_2$ 的平分线，$\therefore \angle A_3OM=\dfrac{1}{2}\angle A_2OM, \angle B_3OM=\dfrac{1}{2}\angle B_2OM$，

$\therefore \angle A_3OB_3=\dfrac{1}{2}(\angle A_2OM+\angle B_2OM)=\dfrac{1}{2}\angle A_2OB_2=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\angle A_1OB_1=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\angle AOB=\dfrac{\alpha}{2^3}$，…，

由此规律得：$\angle A_nOB_n=\dfrac{\alpha}{2^n}$。

模型运用

例 1．（2023·河南周口·校联考一模）如图，点 O 为直线 AB 上一点，OE 平分 $\angle BOC$，OD 平分 $\angle AOC$，若 $\angle BOE=28°$，则 $\angle AOD$ 的度数为（　　）



A．$58°$　　B．$60°$　　C．$62°$　　D．$70°$

【答案】C

【分析】先根据 OE 平分 $\angle BOC$，OD 平分 $\angle AOC$，求出 $\angle EOD=90°$，再根据 $\angle COE=\angle BOE=28°$，求出 $\angle DOC=90°-28°=62°$，即可得出答案．

【详解】解：∵点 O 为直线 AB 上一点，OE 平分 $\angle BOC$，OD 平分 $\angle AOC$，

∴ $\angle COD=\angle AOD=\dfrac{1}{2}\angle AOC$，$\angle COE=\angle BOE=\dfrac{1}{2}\angle BOC$，

∵ $\angle EOD=\angle COD+\angle COE=\dfrac{1}{2}\left(\angle AOC+\angle BOC\right)=\dfrac{1}{2}\times180°=90°$，∴ $\angle EOD=90°$，

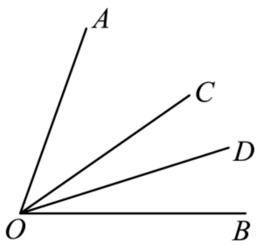
∵ $\angle BOE = 28^\circ$，∴ $\angle COE = 28^\circ$，∴ $\angle DOC = 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ$，

∴ $\angle AOD = \angle DOC = 62^\circ$，故 C 正确．故选：C．

【点睛】本题主要考查了角平分线的定义，解题的关键是理解角平分线的定义，求出 $\angle EOD = 90^\circ$．

例 2．（2023 春·辽宁辽阳·七年级统考期末）如图，射线 OC 平分 $\angle AOB$，射线 OD 平分 $\angle BOC$，则下列等式中成立的有（　）

①$\angle COD = \angle AOD - \angle BOC$；②$\angle COD = \angle AOD - \angle BOD$；③$2\angle COD = 2\angle AOD - \angle AOB$；④$\angle COD = \frac{1}{3}\angle AOB$．



A．①②　　　　B．①③　　　　C．②③　　　　D．②④

【答案】B

【分析】利用角平分线的性质计算角之间的数量关系即可．

【详解】解：$\because OC$ 平分 $\angle AOB$，OD 平分 $\angle BOC$，$\therefore \angle AOC = \angle BOC, \angle COD = \angle BOD$

$\because \angle COD = \angle AOD - \angle AOC, \angle AOC = \angle BOC$ $\therefore \angle COD = \angle AOD - \angle BOC$　故①正确；

$\because \angle BOD \neq \angle BOC$ $\therefore \angle COD \neq \angle AOD - \angle BOD$ 故②错误；

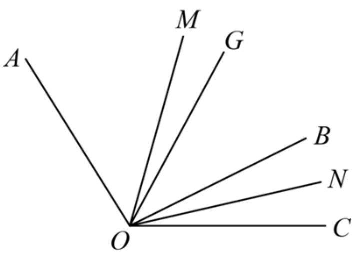
$\because \angle AOD = \angle AOC + \angle COD$ $\therefore 2\angle AOD = 2(\angle AOC + \angle COD) = \angle AOB + 2\angle COD$

$\therefore 2\angle AOD - \angle AOB = \angle AOB + 2\angle COD - \angle AOB = 2\angle COD$　$\therefore 2\angle COD = 2\angle AOD - \angle AOB$ 故③正确；

$\because \angle COD = \frac{1}{2}\angle BOC, \angle BOC = \frac{1}{2}\angle AOB$ $\therefore \angle COD = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{4}\angle AOB$ 故④错误；故选 B．

【点睛】本题主要考查角平分线的性质，熟练掌握角平分线的性质以及熟练运用角的和差表示角的关系是解决本题的关键．

例 3．（2023 春·黑龙江·七年级校考阶段练习）如图，射线 OG 是 $\angle AOC$ 的角平分线，射线 OM 是 $\angle AOB$ 的角半分线，射线 ON 是 $\angle BOC$ 的角平分线，则下列结论成立的有（　）个．



①$\angle MON=\angle COG$；②$\angle MOG=\frac{1}{2}(\angle AOG-\angle BOG)$；③$\angle GON=\frac{1}{2}(\angle COG+\angle BOG)$；④$\angle MON=\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle BOG)$；

A．0 个　　B．1 个　　C．2 个　　D．3 个

【答案】D

【分析】根据角平分线的定义以及角的和与差，计算即可求解．

【详解】解：由题意得：$\angle AOG=\angle COG=\frac{1}{2}\angle AOC$，$\angle AOM=\angle MOB=\frac{1}{2}\angle AOB$，

$\angle BON=\angle NOC=\frac{1}{2}\angle COB$，

①$\angle MON=\angle MOB+\angle BON=\frac{1}{2}\angle AOB+\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}(\angle AOB+\angle BOC)=\frac{1}{2}\angle AOC=\angle COG$，故①正确；

②$\angle MOG=\angle AOG-\angle AOM=\angle AOG-\angle BOM=\angle AOG-(\angle BOG+\angle MOG)=\angle AOG-\angle BOG-\angle MOG$，

即$\angle MOG=\frac{1}{2}(\angle AOG-\angle BOG)$，故②正确；

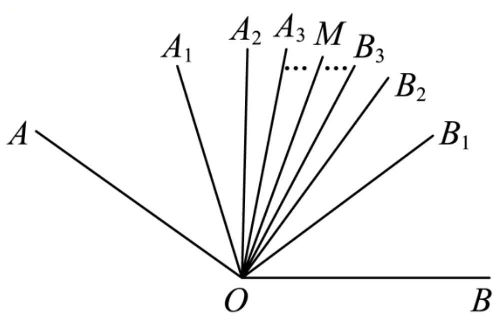
③$\angle GON=\angle COG-\angle CON=\angle COG-\angle BON=\angle COG-(\angle GON-\angle BOG)=\angle COG-\angle GON+\angle BOG$，

即$\angle MOG=\frac{1}{2}(\angle AOG-\angle BOG)$，故③正确；④由①得$\angle MON=\frac{1}{2}\angle AOC\neq\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle BOG)$，故④错误；

综上，①②③正确，共 3 个；故选：D．

【点睛】本题考查了角平分线的定义，解题的关键是利用了角平分线的定义和图中各角之间的和差关系．

例 4．（2023·河南·七年级校联考期末）如图，$\angle AOB=\alpha, OA_1$、OB_1分别是$\angle AOM$和$\angle MOB$的平分线，OA_2、OB_2分别是$\angle A_1OM$和$\angle MOB_1$的平分线，OA_3、OB_3分别是$\angle A_2OM$和$\angle MOB_2$的平分线，…，OA_n, OB_n分别是$\angle A_{n-1}OM$和$\angle MOB_{n-1}$的平分线，则$\angle A_nOB_n$的度数是________．



【答案】$\frac{a}{2^n}$

【分析】由角平分线性质推理得$\angle A_1OB_1=\frac{1}{2}\alpha$，$\angle A_2OB_2=\frac{\alpha}{2^2}$，$\angle A_3OB_3=\frac{\alpha}{2^3}$，据此规律可解答．

【详解】解：$\because \angle AOB=\alpha$，$OA_1$、$OB_1$分别是$\angle AOM$和$\angle MOB$的平分线，

$\therefore \angle A_1OM=\frac{1}{2}\angle AOM, \angle B_1OM=\frac{1}{2}\angle BOM$，$\therefore \angle A_1OB_1=\frac{1}{2}(\angle AOM+\angle BOM)=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\alpha$，

$\because OA_2$、OB_2分别是$\angle A_1OM$和$\angle MOB_1$的平分线，$\therefore \angle A_2OM=\frac{1}{2}\angle A_1OM, \angle B_2OM=\frac{1}{2}\angle B_1OM$，

$\therefore \angle A_2OB_2=\frac{1}{2}(\angle A_1OM+\angle B_1OM)=\frac{1}{2}\angle A_1OB_1=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{4}\alpha=\frac{\alpha}{2^2}$，

$\because OA_3$、OB_3分别是$\angle A_2OM$和$\angle MOB_2$的平分线，$\therefore \angle A_3OM=\frac{1}{2}\angle A_2OM, \angle B_3OM=\frac{1}{2}\angle B_2OM$，

$\therefore \angle A_3OB_3=\frac{1}{2}(\angle A_2OM+\angle B_2OM)=\frac{1}{2}\angle A_2OB_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\angle A_1OB_1=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{8}\alpha=\frac{\alpha}{2^3}$，…，

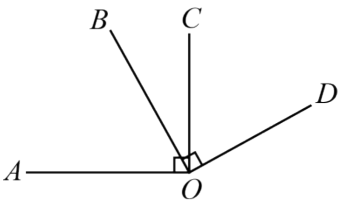
由此规律得：$\angle A_nOB_n=\frac{\alpha}{2^n}$．故答案为：$\frac{a}{2^n}$．

【点睛】本题考查角平分线的性质、图形规律等知识，是基础考点，掌握相关知识是解题关键．

例5．（2022秋·山西太原·七年级统考期末）图，$\angle AOC=\angle BOD=90°$，$OB$在$\angle AOC$的内部，$OC$在$\angle BOD$的内部，$OE$是$\angle AOB$的一条三等分线．请从$A$，$B$两题中任选一题作答．

A．当$\angle BOC=30°$时，$\angle EOD$的度数为________．

B．当$\angle BOC=\alpha°$时，$\angle EOD$的度数为________（用含α的代数式表示）．

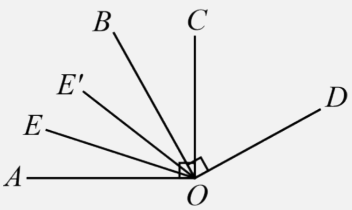


【答案】　110°或130°　　$\left(120-\frac{\alpha}{3}\right)°$或$\left(150-\frac{2\alpha}{3}\right)°$

【分析】A、根据角的和差得到$\angle AOB=90°-30°=60°$，根据OE是$\angle AOB$的一条三等分线，分类讨论，当$\angle AOE=\frac{1}{3}\angle AOB=20°$，②当$\angle BOE'=\frac{1}{3}\angle AOB=20°$，根据角的和差即可得到结论；

B、根据角的和差得到$\angle AOB$，根据OE是$\angle AOB$的一条三等分线，分类讨论，当$\angle AOE=\frac{1}{3}\angle AOB$，②当$\angle BOE'=\frac{1}{3}\angle AOB$，根据角的和差即可得到结论．

【详解】解：A、如图，$\because \angle AOC=90°$，$\angle BOC=30°$，$\therefore \angle AOB=90°-30°=60°$，



∵OE 是∠AOB 的一条三等分线，∴①当∠AOE=$\frac{1}{3}$∠AOB=20°，∴∠BOE=40°，

∵∠BOD=90°，∴∠EOD=∠BOD+∠BOE=130°，

②当∠BOE'=$\frac{1}{3}$∠AOB=20°，∴∠DOE'=90°+20°=110°，

综上所述，∠EOD 的度数为 130°或 110°，故答案为：130°或 110°；

B、∵∠AOC=90°，∠BOC=α°，∴∠AOB=90°-α°，

∵OE 是∠AOB 的一条三等分线，∴①当∠AOE=$\frac{1}{3}$∠AOB=30°-$\frac{1}{3}\alpha$°，∴∠BOE=90°-α-（30-$\frac{1}{3}\alpha$）°=60°-$\frac{2}{3}$$\alpha$°，

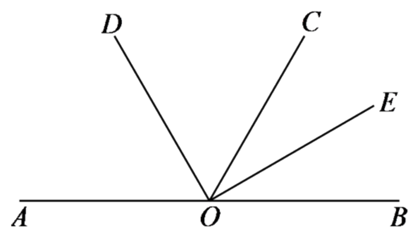
∵∠BOD=90°，∴∠EOD=∠BOD+∠BOE=150°-$\frac{2}{3}\alpha$°，

②当∠BOE'=$\frac{1}{3}$∠AOB=30°-$\frac{1}{3}\alpha$°，∴∠DOE'=90°+30°-$\frac{1}{3}\alpha$°=120°-$\frac{1}{3}\alpha$°，

综上所述，∠EOD 的度数为 150°-$\frac{2}{3}\alpha$°或 120°-$\frac{1}{3}\alpha$°，故答案为：150°-$\frac{2}{3}\alpha$°或 120°-$\frac{1}{3}\alpha$°；

【点睛】本题考查了余角和补角的定义，角的倍分，熟练掌握余角和补角的性质是解题的关键.

例 6.（2023 秋·辽宁沈阳·七年级统考期末）如图，点 A，O，B 在同一条直线上，OD，OE 分别平分 $\angle AOC$ 和 $\angle BOC$. (1)求 $\angle DOE$ 的度数；(2)如果 $\angle COD = 60°$. ①求 $\angle AOE$ 的度数；②若 $\angle AOF = 20°$，直接写出 $\angle FOD$ 的度数.



【答案】(1) 90°；(2)①150°；②40°或80°.

【分析】（1）由角平分线定义可知 $\angle DOC = \frac{1}{2}\angle AOC$，$\angle COE = \frac{1}{2}\angle BOC$，再根据 $\angle DOE = \angle DOC + \angle COE$ 和 $\angle AOC + \angle BOC = 180°$ 可得结果；（2）①利用角之间的和差关系求解即可；②分当 OF 在 OA 上方时，当 OF 在 OA 下方时，利用角之间的和差关系求解即可.

【详解】（1）解：∵OD，OE 分别平分∠AOC 和∠BOC，∴$\angle DOC = \frac{1}{2}\angle AOC$，$\angle COE = \frac{1}{2}\angle BOC$，

则 $\angle DOE = \angle DOC + \angle COE = \frac{1}{2}\angle AOC + \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}(\angle AOC + \angle BOC)$，

∵ $\angle AOC + \angle BOC = 180°$，∴ $\angle DOE = \frac{1}{2}(\angle AOC + \angle BOC) = 90°$；

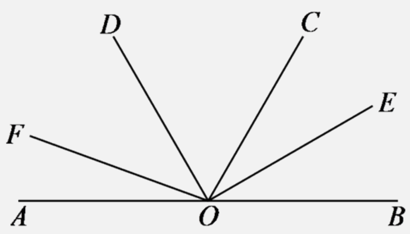
（2）①∵ $\angle COD=60^{\circ}$， $\angle DOE=90^{\circ}$， ∴ $\angle COE=\angle DOE-\angle COD=30^{\circ}$，

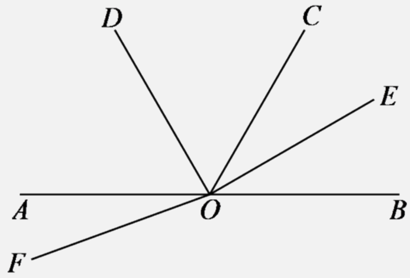
由（1）可知， $\angle DOC=\frac{1}{2}\angle AOC$， 则 $\angle AOC=2\angle DOC=120^{\circ}$，

∴ $\angle AOE=\angle AOC+\angle COE=120^{\circ}+30^{\circ}=150^{\circ}$，

②由①可知， $\angle AOC=120^{\circ}$， ∵ OD 平分 $\angle AOC$， ∴ $\angle AOD=\frac{1}{2}\angle AOC=60^{\circ}$，

当 OF 在 OA 上方时， $\angle FOD=\angle AOD-\angle AOF=60^{\circ}-20^{\circ}=40^{\circ}$；



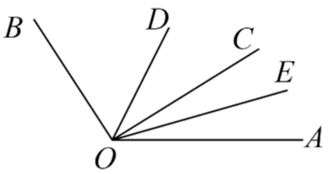


当 OF 在 OA 下方时， $\angle FOD=\angle AOD+\angle AOF=60^{\circ}+20^{\circ}=80^{\circ}$；综上， $\angle FOD$ 为 40° 或 80° .

【点睛】本题考查角平分线的定义，利用角的和差关系求解的度数，解决问题的关键在于结合图形，找角之间的和差关系.

例 7.（2023 秋·江苏无锡·七年级校考期末）解答题：(1)如图，若 $\angle AOB=120^{\circ}$， $\angle AOC=40^{\circ}$， OD 、 OE 分别平分 $\angle AOB$ 、 $\angle AOC$， 求 $\angle DOE$ 的度数；

(2)若 $\angle AOB$， $\angle AOC$ 是平面内两个角， $\angle AOB=m^{\circ}$， $\angle AOC=n^{\circ}$ $\left(n<m<180^{\circ}\right)$， OD 、 OE 分别平分 $\angle AOB$ 、 $\angle AOC$， 求 $\angle DOE$ 的度数.（用含 m 、 n 的代数式表示）



【答案】(1) 40° (2)所以当射线 OC 在 $\angle AOB$ 的内部时， $\angle DOE=\frac{1}{2}(m-n)^{\circ}$；当射线 OC 在 $\angle AOB$ 的外部时， $\angle DOE=\frac{1}{2}(n+m)^{\circ}$.

【分析】（1）根据角平分线定义求出 $\angle AOD$ 和 $\angle AOE$ 度数，即可得出答案（2）由于无法确定射线 OC 的位置，所以需要分类讨论：若射线 OC 在 $\angle AOB$ 的内部时，根据角平分线定义得出 $\angle AOD=\frac{1}{2}\angle AOB$， $\angle AOE=\frac{1}{2}\angle AOC$， 求出 $\angle DOE=\angle AOD-\angle AOE$； 若射线 OC 在 $\angle AOB$ 的外部时，根据角平分线定义得出 $\angle AOD=\frac{1}{2}\angle AOB$， $\angle AOE=\frac{1}{2}\angle AOC$， 求出 $\angle DOE=\angle DOA+\angle AOE$， 代入求出即可.