

贵州省贵阳市 2023-2024 学年高二上学期期末考试数学试卷

注意事项:

1. 本试卷共 6 页, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟,
2. 〔答 案〕一律写在答题卡上, 写在试卷上的不给分
3. 考试过程中不得使用计算器.

一、选择题 (本大题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 每小题有四个选项, 其中只有一个选项正确, 请将你认为正确的选项填写在答题卷的相应位置上.)

1. 抛物线 $y^2 = 2x$ 的准线方程为 ()

- A. $x = -1$ B. $y = -1$ C. $x = -\frac{1}{2}$ D. $y = -\frac{1}{2}$

〔答 案〕 C

〔解 析〕 抛物线 $y^2 = 2x$ 的焦点在 x 轴的正半轴上, 准线方程为 $x = -\frac{1}{2}$.

故选: C

2. 设 $x, y \in \mathbb{R}$, 空间向量 $\vec{a} = (x, 1, 1), \vec{b} = (2, y, -2)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $x + y =$ ()

- A. -1 B. 1 C. -3 D. 3

〔答 案〕 C

〔解 析〕 由向量 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 可知, $\vec{a} = \lambda \vec{b}$,

$$\text{即 } \begin{cases} x = 2\lambda \\ 1 = \lambda y \\ 1 = -2\lambda \end{cases}, \text{ 解得 } \lambda = -\frac{1}{2}, \quad x = -1, \quad y = -2, \text{ 所以 } x + y = -3.$$

故选: C

3. 已知 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_2 = 7, a_7 = 2$, 则 $S_8 =$ ()

- A. 76 B. 72 C. 36 D. 32

〔答 案〕 C

〔解 析〕 $\{a_n\}$ 为等差数列, 则 $S_8 = \frac{8(a_1 + a_8)}{2} = \frac{8(a_2 + a_7)}{2} = \frac{8 \times 9}{2} = 36$.

故选: C

4. 圆 $C_1: (x-1)^2 + y^2 = 4$ 与圆 $C_2: (x-2)^2 + (y+2)^2 = 1$ 相交于 A, B 两点, 则线段 AB 的垂直平分线的方程为 ()

- A. $x - 2y - 5 = 0$ B. $2x + y - 2 = 0$
C. $x - 2y + 3 = 0$ D. $2x + y - 5 = 0$

高级中学名校试卷

【答案】B

【解析】线段 AB 的垂直平分线为圆心连线 C_1C_2 ,

由圆的方程可知, $C_1(1,0)$, $C_2(2,-2)$, $k_{AB} = \frac{-2-0}{2-1} = -2$,

所以直线 C_1C_2 的方程为 $y = -2(x-1)$, 化简为 $2x + y - 2 = 0$.

故选: B

5. 若 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 构成空间的一个基底, 则下列向量不共面的是 ()

A. $\vec{b} + \vec{c}, \vec{b}, \vec{b} - \vec{c}$

B. $\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - 2\vec{b}$,

C. $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{c}$

D. $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}, \vec{c}$

【答案】D

【解析】因为 $(\vec{b} + \vec{c}) + (\vec{b} - \vec{c}) = 2\vec{b}$, 所以 $\vec{b} + \vec{c}, \vec{b}, \vec{b} - \vec{c}$ 共面, 故 A 不正确;

因为 $2(\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} - 2\vec{b}) = 3\vec{a}$, 所以 $\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - 2\vec{b}$ 共面, 故 B 不正确;

因为 $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, 所以 $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{c}$ 共面, 故 C 不正确;

若 $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}, \vec{c}$ 共面, 则 $\vec{c} = \lambda(\vec{a} + \vec{b}) + \mu(\vec{a} - \vec{b}) = (\lambda + \mu)\vec{a} + (\lambda - \mu)\vec{b}$,

则 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为共面向量, 此时与 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 为空间的一组基底矛盾,

故 $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}, \vec{c}$ 不共面 故 D 正确. 故选: D

6. 点 $A(-1,1), B(2,3)$, 点 P 在 x 轴上, 则 $|PA| + |PB|$ 的最小值为 ()

A. $2\sqrt{7}$

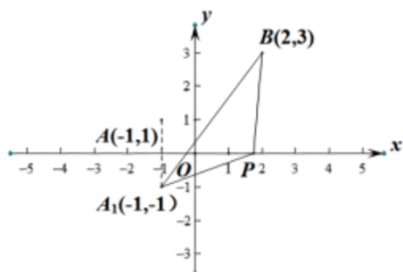
B. 5

C. 4

D. $\sqrt{13}$

【答案】B

【解析】如图所示,



$A(-1,1)$ 关于 x 轴的对称点为 $A_1(-1,-1)$,

则 $|PA| + |PB| = |PA_1| + |PB| \geq |BA_1|$,

当 B, P, A_1 三点共线时等号成立,

$$\text{又 } |BA_1| = \sqrt{(2+1)^2 + (3+1)^2} = 5,$$

故 $|PA| + |PB|$ 的最小值为 5. 故选: B.

7. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_3 = 3, S_3 = 9$, 则 $a_1 =$ ()

- A. 12 或 3 B. 1 或 $-\frac{1}{2}$ C. 12 D. $-\frac{1}{2}$

【答案】A

【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

$$\text{则 } a_3 = a_1 q^2 = 3, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = a_1(1 + q + q^2) = 9,$$

$$\text{则 } \frac{S_3}{a_3} = \frac{1+q+q^2}{q^2} = 3, \text{ 化为 } 2q^2 - q - 1 = 0, \text{ 解得 } q = 1 \text{ 或 } q = \frac{1}{2},$$

$$\text{则 } a_1 = 3 \text{ 或 } a_1 = 12,$$

故选: A.

8. 我们通常称离心率为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的椭圆为“黄金椭圆”, 称离心率为 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 的双曲线为“黄金双曲线”, 则下列说法正确的是 ()

- A. 正 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别是 AB, AC 的中点, 则以 B, C 为焦点, 且过 D, E 的椭圆是“黄金椭圆”
B. 已知 $ABCDEF$ 为正六边形, 则以 A, D 为焦点, 且过 B, C, E, F 的双曲线是“黄金双曲线”
C. “黄金椭圆”上存在一点, 该点与两焦点的连线互相垂直
D. “黄金双曲线”的实半轴长, 一个焦点到一条渐近线的距离, 半焦距能构成等比数列

【答案】D

【解析】对于 A, 以 BC 的中点为原点, 建立直角坐标系如图所示, 设 $\triangle ABC$ 的边长为 2,

以 B, C 为焦点, 且过 D, E 的椭圆方程设为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 所以 $|CD| = \sqrt{3}$, 椭

圆的离心率为 $\frac{2c}{2a} = \frac{|BC|}{|DC| + |DB|} = \frac{2}{\sqrt{3} + 1} = \sqrt{3} - 1$, 故 A 错误;

对于 B, 以 AD 的中点为原点, 建立直角坐标系如图所示, 设正六边形 $ABCDEF$ 的边长为

2, $|AD| = 4, |FD| = 2\sqrt{3}$, 以 A, D 为焦点, 且过 B, C, E, F 的双曲线方程设为

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0), \text{ 离心率为 } \frac{2c}{2a} = \frac{|AD|}{|FD| - |FA|} = \frac{4}{2\sqrt{3} - 2} = \sqrt{3} + 1,$$

故 B 错误;

高级中学名校试卷

对于 C, 设“黄金椭圆”的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 椭圆上的点 $P(x_0, y_0)$, 焦点

$$F_1(-c, 0), F_2(c, 0), \text{ 由 } \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1, \text{ 可得 } y_0^2 = b^2 \left(1 - \frac{x_0^2}{a^2} \right),$$

$$\overrightarrow{PF_1} = (-c - x_0, -y_0), \overrightarrow{PF_2} = (c - x_0, -y_0)$$

$$\text{又因为“黄金椭圆”的离心率 } \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\text{所以 } \left(\frac{c}{a} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, c^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} a^2,$$

$$\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = (-c - x_0)(c - x_0) + y_0^2 = x_0^2 + y_0^2 - c^2 =$$

$$b^2 \left(1 - \frac{x_0^2}{a^2} \right) + x_0^2 - c^2 = \frac{c^2 x_0^2}{a^2} + a^2 - 2c^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} x_0^2 + (\sqrt{5}-2) a^2 > 0,$$

所以“黄金椭圆”上不存在一点, 与两焦点的连线互相垂直. 故 C 错误.

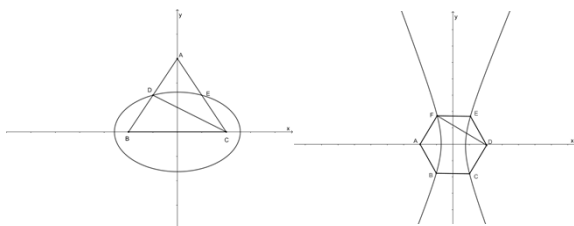
对于 D, “黄金双曲线”的方程设为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 实半轴长为 a , 一个焦点到

$$\text{一条渐近线的距离 } b, \text{ 半焦距 } c, \text{ 因为离心率 } \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$b^2 - ac = c^2 - a^2 - ac = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^2 a^2 - a^2 - \frac{\sqrt{5}+1}{2} a^2 = 0$$

所以 $b^2 = ac$, a, b, c 成等比数列. 故 D 正确.

故选: D.



二、多项选择题 (本题共 2 小题, 每小题 4 分, 共 8 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对得 4 分, 部分选对得 2 分, 有选错得 0 分.)

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = n^2 - 11n$, 则下列说法正确的是 ()

A. 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列

B. $a_3 = 6$

C. 数列 $\{S_n\}$ 的最小项为 S_{11}

D. 数列 $\left\{ \frac{S_n}{n} \right\}$ 是等差数列

【答案】AD

高级中学名校试卷

【解析】当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 1^2 - 11 = -10$,

当 $n=2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - 11n - (n-1)^2 + 11(n-1) = 2n - 12$,

且 $a_1 = 2 - 12 = -10$, 所以 $a_n = 2n - 12$,

对于 A, $n \geq 2$ 时, $a_n - a_{n-1} = 2n - 12 - 2(n-1) + 12 = 2 > 0$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 故 A 正确;

对于 B, $a_3 = 2 \times 3 - 12 = -6$, 故 B 错误;

对于 C, $S_n = \left(n - \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{121}{4}$, 因为 $n \in N^*$,

所以当 $n=5$ 或 $n=6$ 时, S_n 最小, 为 -30 ,

所以数列 $\{S_n\}$ 的最小项为 S_5 或 S_6 , 故 C 错误;

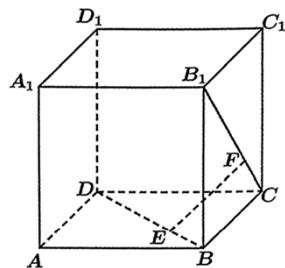
对于 D, 因为 $\frac{S_n}{n} = \frac{n^2 - 11n}{n} = n - 11$, 且当 $n=1$ 时, $\frac{S_1}{1} = -10$,

当 $n=2$ 时, $\frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n-1} = n - 11 - (n-1) + 11 = 1$,

所以数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是以 -10 为首项 1 为公差的等差数列, 故 D 正确.

故选: AD.

10. 已知和两条异面直线都垂直相交的直线叫做两条异面直线的公垂线, 公垂线与两条直线相交的点所形成的线段, 叫做这两条异面直线的公垂线段. 两条异面直线的公垂线段的长度, 叫做这两条异面直线的距离. 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E 在 BD 上, 且 $BE = \frac{1}{3}BD$; 点 F 在 CB_1 上, 且 $CF = \frac{1}{3}CB_1$. 则下列结论正确的是 ()



A. 线段 EF 是异面直线 BD 与 CB_1 的公垂线段

B. 异面直线 AA_1 与 BD 的距离为 $\frac{1}{2}$

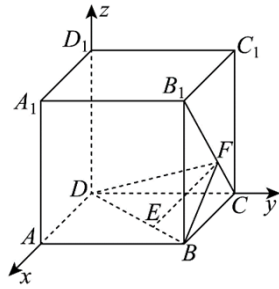
C. 点 D_1 到直线 EF 的距离为 $\frac{\sqrt{14}}{3}$

D. 点 D_1 到平面 DEF 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

【答案】ACD

【解析】以 D 为坐标原点, DA , DC , DD_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系.

$D(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(0,1,0)$, $A_1(1,0,1)$, $B_1(1,1,1)$, $D_1(0,0,1)$,



$$\vec{EB} = \frac{1}{3}\vec{DB} = \frac{1}{3}(1,1,0) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right), \quad \vec{CF} = \frac{1}{3}\vec{CB_1} = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right),$$

$$\therefore E\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0\right), \quad F\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}\right).$$

对于 A, $\vec{EF} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\vec{DB} = (1,1,0)$, $\vec{CB_1} = (1,0,1)$,

$$\therefore \vec{EF} \cdot \vec{DB} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0, \quad \vec{EF} \cdot \vec{CB_1} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0, \quad \text{即 } EF \perp DB, \quad EF \perp CB_1,$$

所以线段 EF 是异面直线 BD 与 CB_1 的公垂线段, 故 A 正确;

对于 B, 由正方体可得异面直线 AA_1 与 BD 的公垂线的方向向量为 $\vec{AC} = (-1,1,0)$,

又 $\vec{DA} = (1,0,0)$, 所以异面直线 AA_1 与 BD 的距离为 $\frac{|\vec{AC} \cdot \vec{DA}|}{|\vec{AC}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 故 B 错误;

对于 C, $\vec{D_1E} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -1\right)$, $\vec{EF} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$,

所以 $\vec{D_1E}$ 在 $\vec{EF}$ 方向的投影向量的模为 $h = \frac{|\vec{D_1E} \cdot \vec{EF}|}{|\vec{EF}|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以点 D_1 到直线 EF 的距离为 $\sqrt{|\vec{D_1E}|^2 - h^2} = \sqrt{\frac{17}{9} - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$. 故 C 正确;

对于 D, 设平面 DEF 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{DB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{DF} = 0 \end{cases}$,

$$\text{即} \begin{cases} x+y=0 \\ \frac{1}{3}x+y+\frac{1}{3}z=0 \end{cases}, \text{ 令 } x=1, \text{ 得 } y=-1, z=2,$$

$$\therefore \vec{n} = (1, -1, 2), \text{ 又 } \vec{DD_1} = (0, 0, 1),$$

$$\text{所以点 } D_1 \text{ 到平面 } DEF \text{ 的距离为 } d = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{DD_1}|}{|\vec{n}|} = \frac{|2|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{\sqrt{6}}{3}. \text{ 故 D 正确.}$$

故选: ACD.

三、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分. 请将你认为正确的【答案】填在答题卷的相应位置上.)

11. 已知直线 $ax - y + 3 = 0$ 和直线 $(a+2)x - y - 2 = 0$ 互相垂直, 则实数 a 等于_____.

【答案】 -1

【解析】 直线 $ax - y + 3 = 0$ 和直线 $(a+2)x - y - 2 = 0$ 互相垂直,

则有 $a(a+2) = -1$, 解得 $a = -1$. 故【答案】为: -1

12. 已知 $\vec{a} = (1, 0, 1), \vec{b} = (0, 2, -2)$, 则向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为_____.

【答案】 $\frac{2\pi}{3}$

【解析】 因为 $\vec{a} = (1, 0, 1), \vec{b} = (0, 2, -2)$,

$$\text{则 } \cos \angle \vec{a}, \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-2}{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2},$$

所以向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$, 故【答案】为: $\frac{2\pi}{3}$.

13. 我国古代数学名著《算法统宗》中有如下问题: “远望巍巍塔七层, 红光点点倍加增, 共灯三百八十一, 请问尖头几盏灯?” 意思是: 一座 7 层塔共挂了 381 盏灯, 且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的 2 倍, 则塔的顶层灯数为_____

【答案】 3

【解析】 设塔的顶层共有 a_1 盏灯, 则数列 $\{a_n\}$ 公比为 2 的等比数列,

$$\therefore S_7 = \frac{a_1(1-2^7)}{1-2} = 381, \text{ 解得 } a_1 = 3. \text{ 故【答案】为 } 3.$$

14. 双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 的两个焦点为 F_1, F_2 , P 为双曲线 C 上一点, 若 $PF_1 \perp PF_2$, 则

$\triangle PF_1F_2$ 的面积为_____.

高级中学名校试卷

【答案】3

【解析】双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$, 实轴长 $2a = 4$, 焦距 $2c = 2\sqrt{7}$, 由对称性不妨设 $|PF_1| > |PF_2|$,

$$\text{由 } PF_1 \perp PF_2, \text{ 有 } \begin{cases} |PF_1| - |PF_2| = 4 \\ |PF_1|^2 + |PF_2|^2 = (2\sqrt{7})^2 \end{cases},$$

$$\text{则 } (|PF_1| - |PF_2|)^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2| = 28 - 2|PF_1| \cdot |PF_2| = 16,$$

$$\text{解得 } |PF_1| \cdot |PF_2| = 6,$$

$$S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} |PF_1| \cdot |PF_2| = 3.$$

故【答案】为: 3

15. 长为 3 的线段 AB 的两个端点 A 和 B 分别在 x 轴和 y 轴上滑动, 点 P 为线段 AB 靠近点 A 的三等分点, 则点 P 的轨迹方程为_____. 若直线 l 的方程为 $2x + 3y - 6 = 0$, 则点 P 到直线 l 的距离的最小值为_____.

【答案】① $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ② $\frac{\sqrt{13}}{13}$

【解析】设 $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $P(x, y)$

$$\text{由题意可知, } \begin{cases} x = \frac{2a}{3} \\ y = \frac{b}{3} \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} a = \frac{3x}{2} \\ b = 3y \end{cases},$$

$$\text{又由 } |AB| = \sqrt{a^2 + b^2} = 3,$$

$$\text{得 } \frac{9x^2}{4} + 9y^2 = 9, \text{ 化简为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1;$$

如图, 向椭圆平移直线 $2x + 3y - 6 = 0$, 设平移直线为 $2x + 3y + t = 0$,

当直线 $2x + 3y + t = 0$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 相切时, 此时切点到直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 的距离最

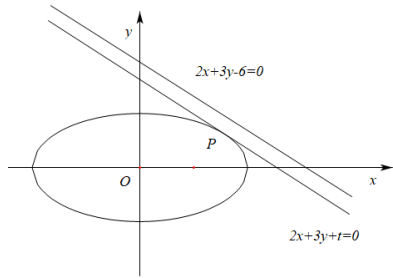
近;

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ 2x + 3y + t = 0 \end{cases},$$

$$\text{得 } 25y^2 + 6ty + t^2 - 16 = 0,$$

高级中学名校试卷

此时 $\Delta = 36t^2 - 100(t^2 - 16) = 0$, 得 $t = \pm 5$, 由图可知, 正的舍去,



直线 $2x + 3y - 5 = 0$ 与 $2x + 3y - 6 = 0$ 之间的距离 $d = \frac{|-5+6|}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$,

即点 P 到直线 l 的距离的最小值为 $\frac{\sqrt{13}}{13}$.

故【答案】为: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1; \frac{\sqrt{13}}{13}$

四、解答题(本大题共 4 小题, 每小题 8 分, 共 32 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_n = 2a_n - 1$.

(1) 求 a_1, a_2, a_3 , 试猜想数列 $\{a_n\}$ 的通项公式并证明;

(2) 记 $b_n = a_n + \log_2 a_n$, 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

解: (1) $n=1$ 时, $S_1 = 2a_1 - 1$, 得 $a_1 = 1$,

$n=2$ 时, $S_2 = 2a_2 - 1$, 即 $a_1 + a_2 = 2a_2 - 1$, 得 $a_2 = 2$,

$n=3$ 时, $S_3 = 2a_3 - 1$, 即 $a_1 + a_2 + a_3 = 2a_3 - 1$, 得 $a_3 = 4$,

猜想 $a_n = 2^{n-1}$, 理由如下:

当 $n \geq 2$ 时, $S_n = 2a_n - 1$ ①

$S_{n-1} = 2a_{n-1} - 1$ ②, ①-②得, $a_n = 2a_n - 2a_{n-1}$, 即 $a_n = 2a_{n-1}$

所以 $\{a_n\}$ 是以 $a_1 = 1$ 为首项, 2 为公比的等比数列, $a_n = 2^{n-1}$.

(2) $b_n = a_n + \log_2 a_n = 2^{n-1} + \log_2 2^{n-1} = 2^{n-1} + (n-1)$,

$T_n = (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) + [0 + 1 + 2 + \dots + (n-1)]$

$= \frac{1 \times (1 - 2^n)}{1 - 2} + \frac{(0 + n - 1)n}{2} = 2^n - 1 + \frac{n(n-1)}{2}$.

17. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两个焦点 F_1, F_2 的坐标分别是 $(-3, 0), (3, 0)$

高级中学名校试卷

，且双曲线 C 经过圆 $D: x^2 + y^2 - 4x - 2\sqrt{2}y + 5 = 0$ 的圆心 D 。

(1) 求 a, b 的值；

(2) 设圆 D 与双曲线 C 的渐近线交于 A, B 两点，求 $|AB|$ 。

解：(1) 由题意双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两个焦点 F_1, F_2 的坐标分别是

$(-3, 0), (3, 0)$,

所以 $c = 3$,

而圆 $D: x^2 + y^2 - 4x - 2\sqrt{2}y + 5 = 0$ 即圆 $D: (x-2)^2 + (y-\sqrt{2})^2 = 1$ 的圆心坐标为

$(2, \sqrt{2})$ ，所以 $\frac{4}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1$ ，

又注意到 $c^2 = a^2 + b^2$ ，

所以解得 $a^2 = 3$ 或 $a^2 = 15 > c^2 = 9$ (舍去)， $b^2 = 6$ ，

所以 $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{6}$ 。

(2) 由(1)得双曲线方程为 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$ ，其渐近线方程为 $y = \sqrt{2}x$ 或 $y = -\sqrt{2}x$ ，

圆 $D: (x-2)^2 + (y-\sqrt{2})^2 = 1$ 的半径为 $r = 1$ ，

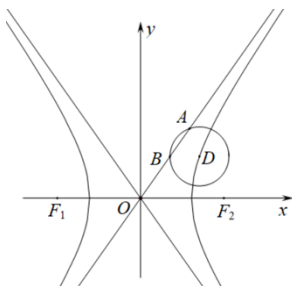
圆心 $(2, \sqrt{2})$ 到直线 $y = \sqrt{2}x$ 的距离为 $d_1 = \frac{|2\sqrt{2} - \sqrt{2}|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} < r = 1$ ，

所以直线 $y = \sqrt{2}x$ 与圆 $D: (x-2)^2 + (y-\sqrt{2})^2 = 1$ 相交，

圆心 $(2, \sqrt{2})$ 到直线 $y = -\sqrt{2}x$ 的距离为 $d_2 = \frac{|-2\sqrt{2} - \sqrt{2}|}{\sqrt{3}} = \sqrt{6} > r = 1$ ，

所以直线 $y = -\sqrt{2}x$ 与圆 $D: (x-2)^2 + (y-\sqrt{2})^2 = 1$ 相离，

所以 $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d_1^2} = 2\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。



高级中学名校试卷

18. 直线 l 经过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F ，且与抛物线交于 A, B 两点（其中点 A 在 x 轴上方）。

(1) 若 $|AF| = 4$ ，求直线 l 的倾斜角；

(2) 若原点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，求以线段 AB 为直径的圆的方程。

解：(1) 由题意得抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点，准线分别为 $F(1, 0), x = -1$ ，

所以由抛物线定义可知 $|AF| = 4 = x_A + 1$ ，又 $y_A^2 = 4x_A$ ，

所以解得 $x_A = 3, y_A = \pm 2\sqrt{3}$ ，

直线 l 的斜率为 $k_{AF} = \frac{y_A}{x_A - x_F} = \frac{\pm 2\sqrt{3}}{2} = \pm\sqrt{3}$ ，

所以直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$ 。

(2) 由题意直线 l 的斜率存在且不为 0（若直线斜率不存在则原点 O 到直线 l 的距离为 1，矛盾），

所以设直线 l 的方程为 $x = my + 1, (m \neq 0)$ ，

联立抛物线方程 $y^2 = 4x$ ，化简得 $y^2 - 4my - 4 = 0$ ，显然 $\Delta > 0$ ，

$y_1 + y_2 = 4m, x_1 + x_2 = m(y_1 + y_2) + 2 = 4m^2 + 2, |AB| = (x_1 + 1) + (x_2 + 1) = 4(m^2 + 1) = 2r$ ，

所以以线段 AB 为直径的圆的圆心、半径分别为 $C(2m^2 + 1, 2m), r = 2(m^2 + 1)$ ，

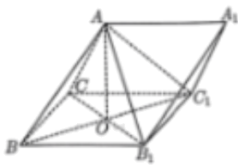
因为原点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

所以 $d = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，解得 $m = \pm 1$ ，

所以圆心、半径分别为 $C(3, \pm 2), r = 4$ ，

$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$ 或 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$ 。

19. 如图，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $BC = BB_1 = 2, BC_1 \cap B_1C = O, AO \perp$ 平面 BB_1C_1C 。



(1) 求证： $AB \perp B_1C$ ；

高级中学名校试卷

(2) 若 $\angle B_1BC = 60^\circ$, 直线 AB 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 30° , 求平面 ABC_1 与平面 ABC 的夹角余弦值.

解: (1) 因为 $BC = BB_1$, 所以四边形 BB_1C_1C 为菱形,

则 $B_1C \perp BC_1$,

又因为 $AO \perp$ 平面 BB_1C_1C , $B_1C \subset$ 平面 BB_1C_1C ,

所以 $AO \perp B_1C$,

又 $AO \cap BC_1 = O$, $AO, BC_1 \subset$ 平面 ABC_1 ,

所以 $B_1C \perp$ 平面 ABC_1 ,

又 $AB \subset$ 平面 ABC_1 ,

所以 $AB \perp B_1C$.

(2) 因为 $AO \perp$ 平面 BB_1C_1C ,

所以直线 AB 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 $\angle ABO$,

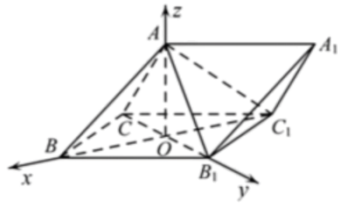
即 $\angle ABO = 30^\circ$,

由边长 BB_1C_1C 为菱形, 又 $\angle B_1BC = 60^\circ$,

所以 $OB = OC_1 = \sqrt{3}, OB_1 = OC = 1, OA = 1$,

则以 O 为坐标原点, OB, OB_1, OA 所在直线为 x, y, z 轴,

建立如图所示空间直角坐标系,



则 $B(\sqrt{3}, 0, 0), C_1(-\sqrt{3}, 0, 0), B_1(0, 1, 0), A(0, 0, 1), C(0, -1, 0)$,

$\vec{AB} = (\sqrt{3}, 0, -1), \vec{BC} = (-\sqrt{3}, -1, 0)$,

设平面 ABC 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{BC} = 0 \end{cases}, \text{ 则 } \begin{cases} \sqrt{3}x - z = 0 \\ -\sqrt{3}x - y = 0 \end{cases},$$

取 $x = 1$, 则 $y = -\sqrt{3}, z = \sqrt{3}$,

故 $\vec{n} = (1, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$,

高级中学名校试卷

由 $B_1C \perp$ 平面 ABC_1 易得平面 ABC_1 的法向量 $\vec{m} = (0, 1, 0)$,

设平面 ABC_1 与平面 ABC 的夹角为 θ ,

$$\text{则 } \cos \theta = \left| \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle \right| = \left| \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} \right| = \left| \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{7} \cdot 1} \right| = \frac{\sqrt{21}}{7},$$

故平面 ABC_1 与平面 ABC 的夹角余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

五、阅读与探究（本大题 1 个小题，共 8 分. 解答应写出文字说明，条理清晰.）

20. 阅读材料：

在平面直角坐标系中，若点 $M(x, y)$ 与定点 $F(c, 0)$ （或 $F'(-c, 0)$ ）的距离和它到定直线

$$l: x = \frac{a^2}{c} \quad \left(\text{或 } l': x = -\frac{a^2}{c} \right) \text{ 的距离之比是常数 } \frac{c}{a} (0 < c < a), \text{ 则 } \frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{\frac{a^2}{c} - x} = \frac{c}{a},$$

化简可得 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ ，设 $b^2 = a^2 - c^2 (b > 0)$ ，则得到方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，

所以点 M 的轨迹是一个椭圆，这是从另一个角度给出了椭圆的定义. 这里定点 $F(c, 0)$ 是椭圆的一个焦点，直线 $l: x = \frac{a^2}{c}$ 称为相应于焦点 F 的准线；定点 $F'(-c, 0)$ 是椭圆的另一个焦

点，直线 $l': x = -\frac{a^2}{c}$ 称为相应于焦点 F' 的准线.

根据椭圆的这个定义，我们可以把到焦点的距离转化为到准线的距离. 若点 $M(x, y)$ 在椭圆

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上， $F(c, 0)$ 是椭圆的右焦点，椭圆的离心率 $e = \frac{c}{a}$ ，则点 $M(x, y)$

到准线 $l: x = \frac{a^2}{c}$ 的距离为 $\frac{a^2}{c} - x$ ，

所以 $|MF| = \frac{c}{a} \times \left(\frac{a^2}{c} - x \right) = a - \frac{c}{a}x = a - ex$ ，我们把这个公式称为椭圆的焦半径公式.

结合阅读材料回答下面的问题：

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F ，点 P 是该椭圆上第一象限的点，且

$PF \perp x$ 轴，若直线 $l: x = 9$ 是椭圆右准线方程，点 P 到直线 l 的距离为 8.

(1) 求点 P 的坐标；

(2) 若点 M, N 也在椭圆 C 上且 $\triangle MNP$ 的重心为 F ，判断 $|FM|, |FP|, |FN|$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/797131154160006062>