

湖南省长沙市第一中学 2024 年高考仿真模拟数学试卷

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂；非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 a, b 是两条不同的直线， α, β 是两个不同的平面，且 $a \subset \beta, \alpha \perp \beta = b$ ，则“ $a \parallel \alpha$ ”是“ $a \parallel b$ ”的（ ）

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

2. 已知函数 $f(x) = x^3 + \sin x + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ ，若 $f(2a-1) > f(0)$ ，则 a 的取值范围为（ ）

- A. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ B. $(0, 1)$ C. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ D. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

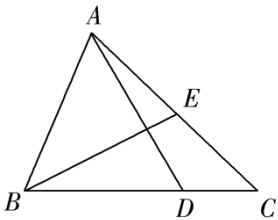
3. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点分别为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ ，以线段 F_1F_2 为直径的圆与双曲线在第二象限的交点为 P ，若直线 PF_2 与圆 $E: \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{b^2}{16}$ 相切，则双曲线的渐近线方程是（ ）

- A. $y = \pm x$ B. $y = \pm 2x$ C. $y = \pm \sqrt{3}x$ D. $y = \pm \sqrt{2}x$

4. 阅读名著，品味人生，是中华民族的优良传统. 学生李华计划在高一年级每周星期一至星期五的每天阅读半个小时中国四大名著：《红楼梦》、《三国演义》、《水浒传》及《西游记》，其中每天阅读一种，每种至少阅读一次，则每周不同的阅读计划共有（ ）

- A. 120 种 B. 240 种 C. 480 种 D. 600 种

5. 已知 $\triangle ABC$ 中， $AB = 2, BC = 3, \angle ABC = 60^\circ, BD = 2DC, AE = EC$ ，则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} =$ （ ）



- A. 1 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

6. 设 $e \approx 2.71828\dots$ 为自然对数的底数，函数 $f(x) = e^x - e^{-x} - 1$ ，若 $f(a) = 1$ ，则 $f(-a) =$ （ ）

- A. -1 B. 1 C. 3 D. -3

7. 下图为一个正四面体的侧面展开图， G 为 BF 的中点，则在原正四面体中，直线 EG 与直线 BC

④乙同学连续九次测验成绩每一次均有明显进步.

其中正确的个数为 ()

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

12. 抛物线 $x^2 = 3ay$ 的准线方程是 $y = 1$, 则实数 $a =$ ()

- A. $-\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $-\frac{4}{3}$ D. $\frac{4}{3}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 集合 $A = \{x | x = 2k - 1, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

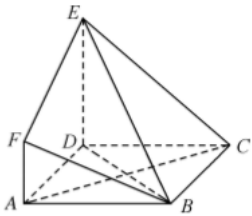
14. 过直线 $4x + 3y - 10 = 0$ 上一点 P 作圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的两条切线, 切点分别为 A, B , 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最小值是 _____.

15. 甲、乙、丙、丁 4 名大学生参加两个企业的实习, 每个企业两人, 则“甲、乙两人恰好在同一企业”的概率为 _____.

16. 正四面体 $A-BCD$ 的各个点在平面 M 同侧, 各点到平面 M 的距离分别为 1, 2, 3, 4, 则正四面体的棱长为 _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 如图, 四边形 $ABCD$ 是边长为 3 的菱形, $DE \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \perp AD$, $AF \parallel DE$, $DE = 3AF$.



(1) 求证: $AC \perp$ 平面 BDE ;

(2) 若 BE 与平面 $ABCD$ 所成角为 60° , 求二面角 $F-BE-D$ 的正弦值.

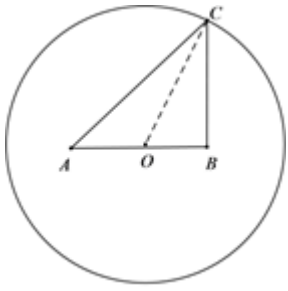
18. (12 分) 某公园准备在一圆形水池里设置两个观景喷泉, 观景喷泉的示意图如图所示, A, B 两点为喷泉, 圆心 O 为 AB 的中点, 其中 $OA = OB = a$ 米, 半径 $OC = 10$ 米, 市民可位于水池边缘任意一点 C 处观赏.

(1) 若当 $\angle OBC = \frac{2\pi}{3}$ 时, $\sin \angle BCO = \frac{1}{3}$, 求此时 a 的值;

(2) 设 $y = CA^2 + CB^2$, 且 $CA^2 + CB^2 \leq 232$.

(i) 试将 y 表示为 a 的函数, 并求出 a 的取值范围;

(ii) 若同时要求市民在水池边缘任意一点 C 处观赏喷泉时, 观赏角度 $\angle ACB$ 的最大值不小于 $\frac{\pi}{6}$, 试求 A, B 两处喷泉间距离的最小值.

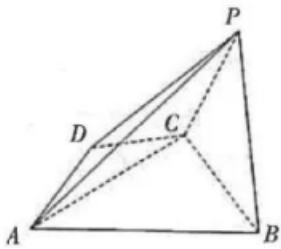


19. (12分) 已知点 P 是抛物线 $C: y = \frac{1}{4}x^2 - 3$ 的顶点, A, B 是 C 上的两个动点, 且 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = -4$.

(1) 判断点 $D(0,1)$ 是否在直线 AB 上? 说明理由;

(2) 设点 M 是 $\triangle PAB$ 的外接圆的圆心, 点 M 到 x 轴的距离为 d , 点 $N(1,0)$, 求 $|MN| - d$ 的最大值.

20. (12分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $BC \perp CD$, $AD = CD$, $PA = 3\sqrt{2}$, $\triangle ABC$ 和 $\triangle PBC$ 均为边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形.



(1) 求证: 平面 $PBC \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 求二面角 $C-PB-D$ 的余弦值.

21. (12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与 x 轴负半轴交于 $A(-2,0)$, 离心率 $e = \frac{1}{2}$.

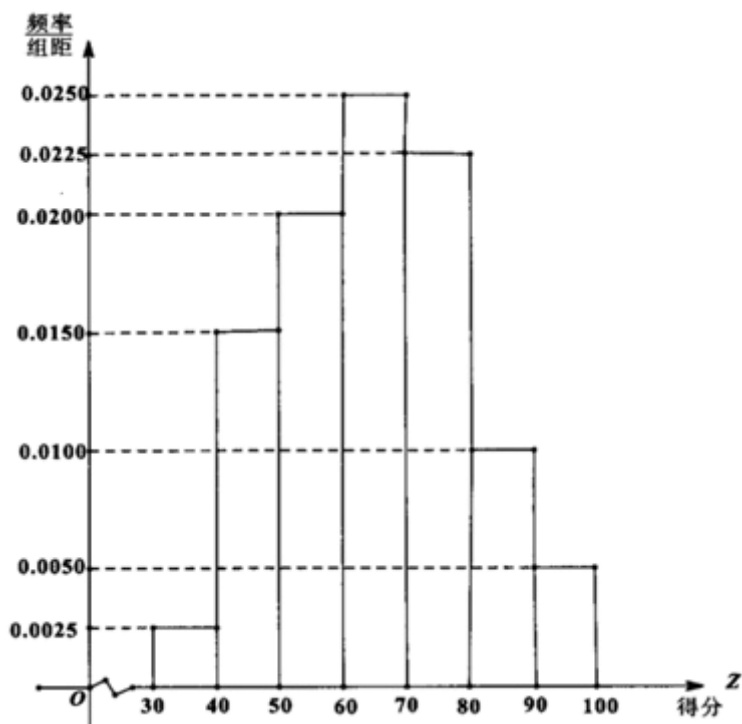
(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 C 交于 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ 两点, 连接 AM, AN 并延长交直线 $x=4$ 于

$E(x_3, y_3), F(x_4, y_4)$ 两点, 若 $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = \frac{1}{y_3} + \frac{1}{y_4}$, 直线 MN 是否恒过定点, 如果是, 请求出定点坐标, 如果不是,

请说明理由.

22. (10分) 2019年安庆市在大力推进城市环境、人文精神建设的过程中, 居民生活垃圾分类逐渐形成意识. 有关部门为宣传垃圾分类知识, 面向该市市民进行了一次“垃圾分类知识”的网络问卷调查, 每位市民仅有一次参与机会, 通过抽样, 得到参与问卷调查中的 1000 人的得分数据, 其频率分布直方图如图:



(1) 由频率分布直方图可以认为, 此次问卷调查的得分 Z 服从正态分布 $N(\mu, 210)$, μ 近似为这 1000 人得分的平均值 (同一组数据用该区间的中点值作代表), 利用该正态分布, 求 $P(50.5 < Z < 94)$;

(2) 在 (1) 的条件下, 有关部门为此次参加问卷调查的市民制定如下奖励方案:

(i) 得分不低于 μ 可获赠 2 次随机话费, 得分低于 μ 则只有 1 次:

(ii) 每次赠送的随机话费和对应概率如下:

赠送话费 (单位: 元)	10	20
概率	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

现有一位市民要参加此次问卷调查, 记 X (单位: 元) 为该市民参加问卷调查获赠的话费, 求 X 的分布列. 附:

$\sqrt{210} = 14.5$, 若 $Z: N(\mu, \delta^2)$, 则 $P(\mu - \delta < Z < \mu + \delta) = 0.6826$, $P(\mu - 2\delta < Z < \mu + 2\delta) = 0.9544$.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

根据线面平行的性质定理和判定定理判断 $a//\alpha$ 与 $\alpha//b$ 的关系即可得到答案.

【详解】

若 $a//\alpha$, 根据线面平行的性质定理, 可得 $a//b$;

若 $a//b$, 根据线面平行的判定定理, 可得 $a//\alpha$.

故选: C.

【点睛】

本题主要考查了线面平行的性质定理和判定定理, 属于基础题.

2、C

【解析】

求出函数定义域, 在定义域内确定函数的单调性, 利用单调性解不等式.

【详解】

由 $\frac{1+x}{1-x} > 0$ 得 $-1 < x < 1$,

在 $x \in (-1, 1)$ 时, $y = x^3$ 是增函数, $y = \sin x$ 是增函数, $y = \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(-1 + \frac{2}{1-x})$ 是增函数, \therefore

$f(x) = x^3 + \sin x + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ 是增函数,

\therefore 由 $f(2a-1) > f(0)$ 得 $0 < 2a-1 < 1$, 解得 $\frac{1}{2} < a < 1$.

故选: C.

【点睛】

本题考查函数的单调性, 考查解函数不等式, 解题关键是确定函数的单调性, 解题时可先确定函数定义域, 在定义域内求解.

3、B

【解析】

先设直线 PF_2 与圆 $E: \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{b^2}{16}$ 相切于点 M , 根据题意, 得到 $EM // PF_1$, 再由 $\frac{F_2E}{F_2F_1} = \frac{1}{4}$, 根据勾股定理

求出 $b = 2a$, 从而可得渐近线方程.

【详解】

设直线 PF_2 与圆 $E: \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{b^2}{16}$ 相切于点 M ,

因为 $\triangle PF_1F_2$ 是以圆 O 的直径 F_1F_2 为斜边的圆内接三角形, 所以 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$,

又因为圆 E 与直线 PF_2 的切点为 M , 所以 $EM \parallel PF_1$,

$$\text{又 } \frac{F_2E}{F_2F_1} = \frac{1}{4}, \text{ 所以 } |PF_1| = 4 \cdot \frac{b}{4} = b,$$

$$\text{因此 } |PF_2| = 2a + b,$$

$$\text{因此有 } b^2 + (2a + b)^2 = 4c^2,$$

所以 $b = 2a$, 因此渐近线的方程为 $y = \pm 2x$.

故选 **B**

【点睛】

本题主要考查双曲线的渐近线方程, 熟记双曲线的简单性质即可, 属于常考题型.

4、**B**

【解析】

首先将五天进行分组, 再对名著进行分配, 根据分步乘法计数原理求得结果.

【详解】

将周一至周五分为 4 组, 每组至少 1 天, 共有: $\frac{C_5^2 C_3^1 C_2^1}{A_3} = 10$ 种分组方法;

将四大名著安排到 4 组中, 每组 1 种名著, 共有: $A_4^4 = 24$ 种分配方法;

由分步乘法计数原理可得不同的阅读计划共有: $10 \times 24 = 240$ 种

本题正确选项: **B**

【点睛】

本题考查排列组合中的分组分配问题, 涉及到分步乘法计数原理的应用, 易错点是忽略分组中涉及到的平均分组问题.

5、**C**

【解析】

以 $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ 为基底, 将 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}$ 用基底表示, 根据向量数量积的运算律, 即可求解.

【详解】

$$BD = 2DC, \overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA},$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC}, \therefore \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA},$$

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} &= \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right) \\
 &= \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}^2 - \frac{1}{6}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}^2 \\
 &= 1 - \frac{1}{6} \times 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

故选:C.

【点睛】

本题考查向量的线性运算以及向量的基本定理，考查向量数量积运算，属于中档题.

6、D

【解析】

利用 $f(a)$ 与 $f(-a)$ 的关系，求得 $f(-a)$ 的值.

【详解】

依题意 $f(a) = e^a - e^{-a} - 1 = 1, e^a - e^{-a} = 2,$

所以 $f(-a) = e^{-a} - e^a - 1 = -(e^a - e^{-a}) - 1 = -2 - 1 = -3$

故选: D

【点睛】

本小题主要考查函数值的计算，属于基础题.

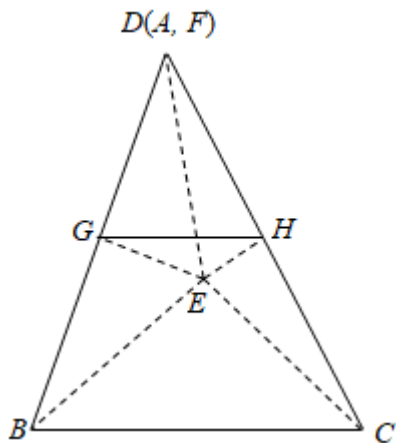
7、C

【解析】

将正四面体的展开图还原为空间几何体， A, D, F 三点重合，记作 D ，取 DC 中点 H ，连接 EG, EH, GH ， $\angle EGH$ 即为 EG 与直线 BC 所成的角，表示出三角形 EGH 的三条边长，用余弦定理即可求得 $\cos \angle EGH$ 。

【详解】

将展开的正四面体折叠，可得原正四面体如下图所示，其中 A, D, F 三点重合，记作 D ：



则 G 为 BD 中点, 取 DC 中点 H , 连接 EG, EH, GH , 设正四面体的棱长均为 a ,

由中位线定理可得 $GH \parallel BC$ 且 $GH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a$,

所以 $\angle EGH$ 即为 EG 与直线 BC 所成的角,

$$EG = EH = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

由余弦定理可得 $\cos \angle EGH = \frac{EG^2 + GH^2 - EH^2}{2EG \cdot GH}$

$$= \frac{\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{3}{4}a^2}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{1}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

所以直线 EG 与直线 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$,

故选: C.

【点睛】

本题考查了空间几何体中异面直线的夹角, 将展开图折叠成空间几何体, 余弦定理解三角形的应用, 属于中档题.

8、A

【解析】

首先利用二倍角正切公式由 $\tan 2\theta = -\frac{4}{3}$, 求出 $\tan \theta$, 再根据充分条件、必要条件的定义判断即可;

【详解】

解: $\because \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = -\frac{4}{3}$, \therefore 可解得 $\tan \theta = 2$ 或 $-\frac{1}{2}$,

\therefore “ $\tan \theta = 2$ ”是“ $\tan 2\theta = -\frac{4}{3}$ ”的充分不必要条件.

故选: A

【点睛】

本题主要考查充分条件和必要条件的判断, 二倍角正切公式的应用是解决本题的关键, 属于基础题.

9、D

【解析】

先根据已知条件求解出 $\{a_n\}$ 的通项公式, 然后根据 $\{a_n\}$ 的单调性以及 $a_1 > 0$ 得到 a_1 满足的不等关系, 由此求解出 a_1 的取值范围.

【详解】

由已知得 $\frac{1}{a_n} - 1 = \left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, 则 $a_n = \frac{1}{\left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 1}$.

因为 $a_1 > 0$, 数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列,

所以 $a_{n+1} > a_n > 0$, 则 $\frac{1}{\left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \left(\frac{1}{3}\right)^n + 1} > \frac{1}{\left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 1}$,

化简得 $0 < \left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \frac{1}{3} < \frac{1}{a_1} - 1$, 所以 $0 < a_1 < 1$.

故选: D.

【点睛】

本题考查数列通项公式求解以及根据数列单调性求解参数范围, 难度一般. 已知数列单调性, 可根据 a_n, a_{n+1} 之间的大小关系分析问题.

10、C

【解析】

简单判断可知函数关于 $x=1$ 对称, 然后根据函数 $f(x) = x - \frac{2}{x}$ 的单调性, 并计算 $\begin{cases} x - \frac{2}{x} = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$, 结合对称性, 可得结

果.

【详解】

由 $f(1-x) = f(1+x)$,

可知函数 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称

当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = x - \frac{2}{x}$,

可知 $f(x) = x - \frac{2}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 单调递增

则 $\begin{cases} x - \frac{2}{x} = 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2$

又函数 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称, 所以 $f(0) = 1$

且 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调递减,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/798015035027006062>