6.3.5 平面向量数量积的坐标表示

自主预习·新知导学

合作探究·释疑解惑

易　错　辨　析

自主预习・新知导学

一、平面向量的数量积与向量垂直的坐标表示

1. 已知a,b是非零向量,a=(x_1,y_1),b=(x_2,y_2).

(1)若i,j是两个互相垂直且分别与x轴、y轴的正方向相同的单位向量,则a,b如何用i,j表示?

提示:a=x_1i+y_1j,b=x_2i+y_2j.

(2)能否用a,b的坐标表示a·b?怎样表示?

提示: 能,$a\cdot b=(x_1i+y_1j)\cdot(x_2i+y_2j)$

$=x_1x_2i^2+(x_1y_2+x_2y_1)i\cdot j+y_1y_2j^2$

$=x_1x_2+y_1y_2$.

(3)向量垂直与数量积的关系是什么?能用坐标表示向量垂直吗?

提示: $a\perp b\Leftrightarrow a\cdot b=0$,能,$x_1x_2+y_1y_2=0$.

2. 设a,b是非零向量,向量a=(x_1,y_1),b=(x_2,y_2).

数量积	a·b=________	两个向量的数量积等于它们____坐标的乘积的__
向量垂直	a⊥b⇔____________	两个向量垂直即它们____坐标的乘积的__为__

3.(1)若向量a=(4,-2),b=(-1,-6),则a·b=____________.

(2)若向量a=(3,x),b=(2,-6),且a⊥b,则x=____________.

解析:(1)a·b=4×(-1)+(-2)×(-6)=8.

(2)因为a⊥b,所以a·b=0,即3×2+(-6)x=0,解得x=1.

答案:(1)8　(2)1

二、平面向量的模与夹角的坐标表示

1. 已知a,b是非零向量,a=(x_1,y_1),b=(x_2,y_2).|a|,|b|分别用坐标怎样表示?a,b的夹角θ能否用坐标表示?

提示:由于 $\mathbf{a}^2=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=(x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j})\cdot(x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j})=x_1^2+y_1^2$,从而$|\mathbf{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$,

同理$|\mathbf{b}|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$.将两向量夹角公式 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$中的 a·b 以及|a|,|b|用坐标表示即可.

2.

三个重要公式

- 向量的模公式：设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，则 $|\boldsymbol{a}|=$ ________
- 两点间距离公式： 若 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $|\overrightarrow{AB}|=$ ________________
- 向量的夹角公式：设两非零向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

3.(1)设 a=(-2,3),则|a|=__________;

(2)若 a=(4,-3),b=(-8,-6),则 a,b 夹角的余弦值等于__________;

(3)已知 $A(2,6),B(4,7)$,则$|\overrightarrow{AB}|$=__________.

解析:(1)|a|=$\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{13}$.

(2)设 a,b 的夹角为 θ,则

$$\cos\theta=\frac{a\cdot b}{|a||b|}=\frac{-32+18}{\sqrt{4^2+(-3)^2}\times\sqrt{(-8)^2+(-6)^2}}=\frac{-14}{5\times10}=-\frac{7}{25}.$$

(3)$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(4-2)^2+(7-6)^2}=\sqrt{5}$.

答案:(1)$\sqrt{13}$ (2)$-\frac{7}{25}$ (3)$\sqrt{5}$

【思考辨析】

判断下列说法是否正确,正确的在后面的括号内画“√”,错误的画“×”.

(1)已知a=(x_1,y_1),b=(x_2,y_2),则a·b=$x_1y_1+x_2y_2$.(　　)

(2)若a=(x_1,y_1),b=(x_2,y_2),且a⊥b,则$x_1y_1+x_2y_2$=0.(　　)

(3)若a·b=|a||b|,则a,b共线.(　　)

(4)若a·b>0,则a,b的夹角为锐角.(　　)

合作探究·释疑解惑

探究一 探究二 探究三

探究一　数量积的坐标运算

【例1】　已知向量a=(-1,2),b=(3,2).

(1)求a·(a-b);

(2)求(a+b)·(2a-b);

(3)若c=(2,1),求(a·b)c,a(b·c).

分析:根据坐标运算法则,结合数量积的运算律进行计算.

解:(1)方法一: $\because a=(-1,2), b=(3,2)$, $\therefore a-b=(-4,0)$.

$\therefore a\cdot(a-b)=(-1,2)\cdot(-4,0)=(-1)\times(-4)+2\times0=4$.

方法二:$a\cdot(a-b)=a^2-a\cdot b=(-1)^2+2^2-[(-1)\times3+2\times2]=4$.

(2) $\because a+b=(-1,2)+(3,2)=(2,4), 2a-b=2(-1,2)-(3,2)=(-2,4)-(3,2)$

$=(-5,2)$,

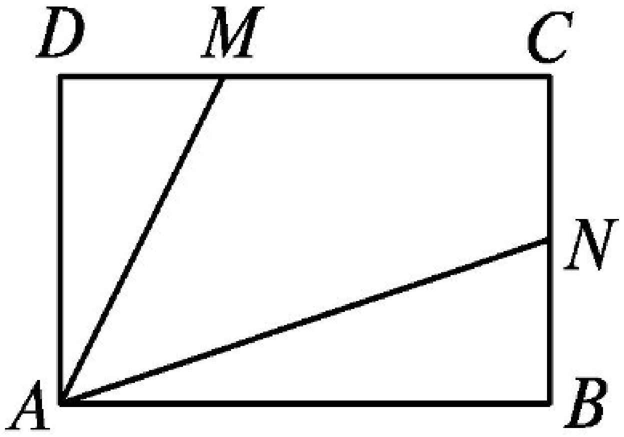
$\therefore (a+b)\cdot(2a-b)=(2,4)\cdot(-5,2)=2\times(-5)+4\times2=-2$.

(3)$(a\cdot b)c=[(-1,2)\cdot(3,2)]\times(2,1)=(-1\times3+2\times2)\times(2,1)=(2,1)$.

$a(b\cdot c)=(-1,2)\times[(3,2)\cdot(2,1)]=(-1,2)\times(3\times2+2\times1)=8(-1,2)$

$=(-8,16)$.

【例 2】如图,在矩形 $ABCD$ 中,$AB=3$,$BC=2$,点 M,N 分别在 DC,BC 上,且 $DM=\frac{1}{2}MC$,$BN=\frac{1}{2}BC$,则$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=$__________.



分析:可利用向量分解的方法,将$\overrightarrow{AM}$,$\overrightarrow{AN}$用基底表示,利用运算律计算求解,也可建立平面直角坐标系,利用坐标运算求解.

解析: (方法一)$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=\ \ \overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\ \ \cdot\ \ \overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$=0+\frac{1}{2}\times2^2+\frac{1}{3}\times3^2+\frac{1}{3}\times0=5.$

(方法二)以 A 为原点,AB,AD 所在直线分别为 x 轴、y 轴建立平面直角坐标系(图略),则 $A(0,0)$,$M(1,2)$,$N(3,1)$,

于是$\overrightarrow{AM}=(1,2)$,$\overrightarrow{AN}=(3,1)$,故$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=5.$

答案: 5