# 2024年1月“九省联考”重组卷数学试题

学校:_____姓名：_____班级：_____考号：_____

## 一、单选题

1．已知集合$A=\left\{x\in \mathrm{N}\middle| x^2-3x<0\right\}$，集合$B=\left\{y\middle| y=\log_2 x，x\in A\right\}$，则$A\cap B=$（　）

A．$\{1\}$　　B．$\{2\}$　　C．$\{0,1\}$　　D．$\varnothing$

2．设抛物线$C$：$x^2=2py$的焦点为$F$，$M(x,4)$在$C$上，$|MF|=5$，则$C$的方程为（　）

A．$x^2=4y$　　B．$x^2=-4y$　　C．$x^2=-2y$　　D．$x^2=2y$

3．若$\lg\tan\alpha=-1$，$2^{\tan\beta}=\sqrt{2}$，则$\tan(\alpha+\beta)=$（　）

A．$\frac{3}{7}$　　B．$\frac{4}{7}$　　C．$\frac{12}{19}$　　D．$\frac{13}{19}$

4．向量$\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(-1,0)$，则$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影向量是（　）

A．$-\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C．$\left(-\frac{1}{5},-\frac{2}{5}\right)$　　D．$\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$

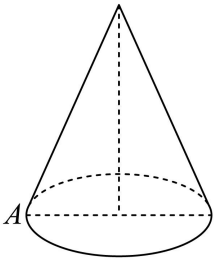
5．各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中，$a_2,a_4+2,a_5$成等差数列，$a_1=2$，$S_n$是$\{a_n\}$的前$n$项和，则$S_{10}-S_4=$（　）

A．1008　　B．2016

C．2032　　D．4032

6．在意大利，有一座满是“斗笠”的灰白小镇阿尔贝罗贝洛$(Alberobello)$，这些圆锥形屋顶的奇特小屋名叫*Trullo*，于1996年被收入世界文化遗产名录．现测量一个*Trullo*的屋顶，得其母线长为6m，屋顶的表面积为$12\pi\mathrm{m}^2$(即圆锥的侧面积).若从该屋顶底面圆周一点A绕屋顶侧面一周至过A的母线的中点，安装灯光带，则该灯光带的最短长度为（　）






A．$3\sqrt{3}$ m　　B．$3\sqrt{5}$ m　　C．$3\sqrt{7}$ m　　D．6 m

7．中国南北朝时期的著作《孙子算经》中，对同余除法有较深的研究.设$a$，$b$，$m(m>$

0)为整数，若$a$和$b$被$m$除得的余数相同，则称$a$和$b$对模$m$同余，记为$a=b\left(\mathrm{mod}\,m\right)$.

若$a=\mathrm{C}_{18}^{1}\cdot 2+\mathrm{C}_{18}^{2}\cdot 2^{2}+\ldots+\mathrm{C}_{18}^{18}\cdot 2^{18}$，$a=b\left(\mathrm{mod}10\right)$，则$b$的值可以是（　）

A．2018　　B．2020

C．2022　　D．2024

8．已知双曲线$E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1\left(-c,0\right),F_2\left(c,0\right),O$为坐标原点，圆$O:x^2+y^2=c^2$交双曲线$E$的左支于点$P$，直线$PF_2$交双曲线$E$的右支于点$Q$，若$Q$为$PF_2$的中点，则双曲线$E$的离心率为（　）

A．$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$　　C．$\sqrt{10}$　　D．$\sqrt{13}$

**二、多选题**

9．下列说法正确的是（　）

A．“$\forall x>0,\mathrm{e}^{x}>x+1$”的否定形式是“$\exists x\le 0,\mathrm{e}^{x}\le x+1$”

B．“复数$z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$”是“$z^3=1$”的充分不必要条件

C．若$0<a<1,b>c>1$，则$\dfrac{c-a}{b-a}<\dfrac{c}{b}$

D．函数$y=|\sin x|+\dfrac{4}{|\sin x|}$的最小值为4

10．已知向量$\vec{a}=\left(3\cos x,3\sin x\right)$，$\vec{b}=\left(\dfrac{1}{3}\cos x,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cos x\right)$，函数$f\left(x\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}$,则下列选项正确的（　）

A．函数$f\left(x\right)$是偶函数

B．函数$f\left(x\right)$的值域为$\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right]$

C．函数$f\left(x\right)$在区间$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$内所有零点之和为$-\dfrac{\pi}{6}$

D．将函数$f\left(x\right)$图象上各点横坐标变为原来的2倍（纵坐标不变），再将所得图象上各点向下平移$\dfrac{1}{2}$个单位长度，最后将所得图象向左平移$\dfrac{\pi}{3}$个单位长度，可得函数$y=-\cos x$的图象

11．已知定义在**R**上的函数$f\left(x\right)$满足$f\left(x+2\right)+f\left(x\right)=f\left(2024\right)$，且$f\left(2x+1\right)$是奇函数，则（　）

A．$f(x)$的图象关于点$(1,0)$对称

B．$f(0)=f(4)$

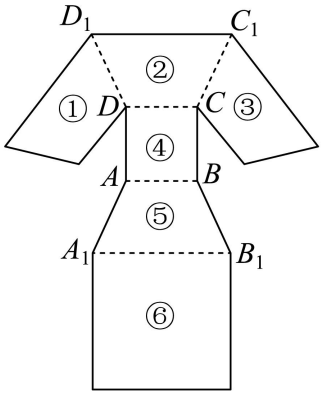
C．$f(2)=1$

D．若$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$，则$\sum_{i=1}^{100} if\left(i-\frac{1}{2}\right)=0$

## 三、填空题

12．国家射击运动员甲在某次训练中的5次射击成绩（单位：环）为9，6，$m$，10，8，其中$m$为整数，若这5次射击成绩的第40百分位数为8，则$m=$_____.

13．足尖虽未遍及美景，浪漫却从未停止生长. 清风牵动裙摆，处处彰显着几何的趣味. 下面的几何图形好似平铺的一件裙装，①②③⑤是全等的等腰梯形，④⑥是正方形，其中$AB=AA_1=2$，$A_1B_1=4$，若沿图中的虚线折起，围成一个封闭几何体$\Omega$，则$\Omega$的体积为_____；$\Omega$的外接球的表面积为_____.




14．定义：各项均不为零的数列$\{a_n\}$中，所有满足$a_i\cdot a_{i+1}<0$的正整数i的个数称为这个数列$\{a_n\}$的变号数.已知数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n=n^2-6n-2a\left(n\in\mathbf{N}^*,a\neq-\frac{5}{2}\right)$，令$a_n=1-\frac{4}{b_n}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，若数列$\{a_n\}$的变号数为2，则实数$a$的取值范围是_____.

## 四、解答题

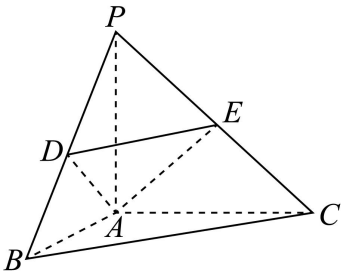
15．在$\triangle ABC$中，$BC=2\sqrt{5}$，点$D$在$AB$边上，且$\angle BCD$为锐角，$CD=2$，$\triangle BCD$的面积为4.

(1)求$\cos\angle BCD$的值；

(2)若$A=30°$，求边$AC$的长.

16．如图所示，在三棱锥$P-ABC$中，$PA=AB=AC$，直线$PA,AB,AC$两两垂直，点$D,E$

分别为棱 $PB, PC$ 的中点.




(1)证明：$BC$ // 平面 $ADE$；

(2)求平面 $ABC$ 与平面 $ADE$ 所成角的余弦值.

17．俗话说："人配衣服，马配鞍"．合理的穿搭会让人舒适感十足，给人以赏心悦目的感觉．张老师准备参加某大型活动，他选择服装搭配的颜色规则如下：将一枚骰子连续投掷两次，两次的点数之和为 3 的倍数，则称为"完美投掷"，出现"完美投掷"，则记 $\xi=1$；若掷出的点数之和不是 3 的倍数，则称为"不完美投掷"，出现"不完美投掷"，则记 $\xi=0$；若 $\xi=1$，则当天穿深色，否则穿浅色．每种颜色的衣物包括西装和休闲装，若张老师选择了深色，再选西装的可能性为 $\frac{3}{5}$，而选择了浅色后，再选西装的可能性为 $\frac{3}{10}$.

(1)求出随机变量 $\xi$ 的分布列，并求出期望及方差；

(2)求张老师当天穿西装的概率.

18．已知椭圆 $\Gamma$：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的左、右焦点分别为 $F_1$、$F_2$，上顶点为 $M$，过点 $M$ 且斜率为 $-1$ 的直线与椭圆 $\Gamma$ 交于另一点 $N$，过原点的直线 $l$ 与椭圆 $\Gamma$ 交于 $P$、$Q$ 两点.

(1)求 $\triangle PF_1F_2$ 周长；

(2)是否存在这样的直线 $l$，使椭圆 $\Gamma$ 中与直线 $MN$ 平行的弦的中点都在 $l$ 上?若存在，求直线 $l$ 的方程；若不存在，请说明理由；

(3)若直线 $l$ 与线段 $MN$ 相交，且四边形 $MPNQ$ 的面积 $S\in\left[\frac{108}{13},\frac{36\sqrt{13}}{13}\right]$，求直线 $l$ 的斜率 $k$ 的取值范围.

19．已知函数 $f(x)=ae^x-x(a\in\mathrm{R})$ 有两个零点.

(1)求实数 $a$ 的取值范围；

(2)设 $f(x)$ 的两个零点分别为 $x_1, x_2$，证明：$x_1+x_2>2$；

(3)证明：$\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\mathrm{L}+\frac{2}{2n+1}<\ln(n+1), n\in\mathrm{N}^*$.

**参考答案：**

1．A

【分析】解一元二次不等式和计算对数，再求交集.

【详解】由$x^2-3x<0$，解得$0<x<3$，

则$A=\{1,2\}$，$B=\{\log_2 1,\log_2 2\}=\{0,1\}$，

所以$A\cap B=\{1\}$.

故选：A

2．A

【分析】根据抛物线的定义求得$p$，进而确定正确答案.

【详解】抛物线$x^2=2py$的开口向上，

由于$M(x,4)$在$C$上，且$|MF|=5$，

根据抛物线的定义可知$4+\frac{p}{2}=5, p=2$，

所以抛物线$C$的方程为$x^2=4y$.

故选：A

3．C

【分析】求出$\tan\alpha$、$\tan\beta$的值，利用两角和的正切公式可求得$\tan(\alpha+\beta)$的值.

【详解】因为$\lg\tan\alpha=-1$，$2^{\tan\beta}=\sqrt{2}$，所以$\tan\alpha=\frac{1}{10}$，$\tan\beta=\frac{1}{2}$，

所以$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{10}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{10}\times\frac{1}{2}}=\frac{2+10}{20-1}=\frac{12}{19}$.

故选：C.

4．C

【分析】利用投影向量的定义求解.

【详解】解：因为向量$\vec{a}=(1,2),\vec{b}=(-1,0)$，

所以$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影向量是$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\cdot\vec{a}=-\frac{1}{5}\vec{a}=\left(-\frac{1}{5},-\frac{2}{5}\right)$,

故选：C

5．B

【分析】根据等差中项可得$2\left(a_4+2\right)=a_2+a_5$，结合等比数列通项公式可得$q=\sqrt{2}$，再利用等比数列求和公式运算求解.

【详解】设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q>0$，

因为$a_2,a_4+2,a_5$成等差数列，则$2\left(a_4+2\right)=a_2+a_5$，

且$a_1=2$，则$2\left(2q^3+2\right)=2q+2q^4=q\left(2q^3+2\right)$，

又因为$q>0$，则$2q^3+2>0$，可得$q=\sqrt{2}$，

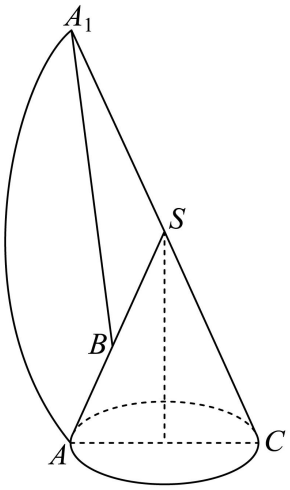
所以$S_{10}-S_4=\dfrac{2\left(1-2^{10}\right)}{1-2}-\dfrac{2\left(1-2^4\right)}{1-2}=2016$.

故选：B.

6．C

【分析】画出图形，根据圆锥的表面积求出侧面展开图顶角$\angle A_1SB=\dfrac{2}{3}\pi$，再由余弦定理求出$A_1B=3\sqrt{7}$.

【详解】




设圆锥的底面半径为$r$，侧面展开图如图所示，

由图可知$B$为$SA$的中点，$A_1B$为所求长度的最小值，

由于母线长为$6\text{m}$，则$SA=6$，圆锥的侧面积为$12\pi\text{m}^2$，

则由圆锥的侧面积公式可得$S=\pi rl\Rightarrow r=2$，

所以底面圆的周长即弧长$A_1A=4\pi$，

又$4\pi=6$葸 $A_1SB$ 才 $A_1SB=\frac{2}{3}\pi$，

则在$\triangle A_1SB$中，由余弦定理可得

$\cos\text{Đ}A_1SB=\frac{A_1S^2+SB^2-A_1B^2}{2A_1S\text{状}SB}=\frac{6^2+3^2-A_1B^2}{2\ \ 6\ \ 3}=-\frac{1}{2}$，

解得$A_1B=3\sqrt{7}$ m，

故选：C

7．A

【分析】首先利用二项式定理化简$a$，再确定$a$被10除的余数，结合选项，即可求解.

【详解】因为$a=(1+2)^{18}-C_{18}^0=3^{18}-1=9^9-1=(10-1)^9-1$

$=C_9^0\cdot10^9-C_9^1\cdot10^8+...+C_9^8\cdot10^1-C_9^9-1$

$=10\left(C_9^0\cdot10^8-C_9^1\cdot10^7+...+C_9^8\right)-2$

所以$a$被10除得的余数为8，而2018被10除得的余数是8.

故选：A.

8．D

【分析】设$|PF_1|=t$，据双曲线的定义可用$t$表示$|PF_2|,|QF_1|$，由直角三角形可计算得$t$，并用勾股定理列出了$(4a)^2+(6a)^2=(2c)^2$，进而可求$e$.

【详解】设$|PF_1|=t$，则$|PF_2|=t+2a$，因为$Q$为$PF_2$的中点，

所以$|PQ|=|QF_2|=\frac{t}{2}+a$，则由双曲线的定义可知$|QF_1|=\frac{t}{2}+3a$，

因为圆$O:x^2+y^2=c^2$交双曲线$E$的左支于点$P$，所以$PF_1\perp PF_2$，

所以$|PF_1|^2+|PQ|^2=|F_1Q|^2$，即$t^2+\left(a+\frac{t}{2}\right)^2=\left(3a+\frac{t}{2}\right)^2$，

则化简可得$8a^2+2at-t^2=0$，即$(2a+t)(4a-t)=0$，

则$t=4a$，所以$|PF_2|=6a$，

所以$|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$，即$(4a)^2+(6a)^2=(2c)^2$，

则化简可得$52a^2=4c^2$，即$e=\sqrt{13}$，

故选：D.

9．BC

【分析】根据命题的否定即可判断 A，根据复数根的求解即可判断 B，根据不等式的性质及可求解 C，根据对勾函数的单调性即可求解 D.

【详解】对于 A，由全称命题的否定知，原命题的否定为：$\exists x>0, e^x \le x+1$，故 A 错误；

对于 B，因为 $z^3=1 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1)=0 \Leftrightarrow z=1$ 或 $z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$，所以 $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 是 $z^3=1$ 的充分不必要条件，B 正确；

对于 C，$\frac{c-a}{b-a}-\frac{c}{b}=\frac{b(c-a)-c(b-a)}{b(b-a)}=\frac{a(c-b)}{b(b-a)}$，因为 $b>c>1$，$0<a<1$, 故 $c-b<0, b-a>0$，

$\frac{c-a}{b-a}-\frac{c}{b}=\frac{a(c-b)}{b(b-a)}<0$，故 $\frac{c-a}{b-a}<\frac{c}{b}$，故 C 正确；

对于 D，因为 $0<|\sin x|\le 1$，令 $t=|\sin x|$，$t\in(0,1]$，又 $y=t+\frac{4}{t}$ 在 $(0,1]$ 上单调递减，所以 $y\ge 1+4=5$ ，故 D 错误.

故选：BC.

10．BC

【分析】根据平面向量数量积的坐标表示及三角恒等变换公式化简 $f(x)$，再结合三角函数的零点、图象变换、函数的奇偶性、值域等知识对选项进行分析，从而确定正确选项.

【详解】由题 $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}=\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x=\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$，

对于 A，由 $f(-x)=\sin\left(-2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\ne f(x)$，所以 $f(x)$ 不是偶函数，故 A 错误；

对于 B，由 $-1\le\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\le 1$，所以 $-\frac{1}{2}\le f(x)\le\frac{3}{2}$，所以 $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$，故 B 正确；

对于 C，令 $f(x)=0$，即 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}=0$，解得 $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi$ 或 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbb{Z}$，

所以 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的零点为：$-\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2}$，所有零点和为 $-\frac{\pi}{6}$，故 C 正确；

对于 D，将函数 $f(x)$ 图象上各点横坐标变为原来的 2 倍（纵坐标不变），得到

$y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}$，

再将所得图象上各点向下平移$\frac{1}{2}$个单位长度，得到$y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，

最后将所得图象向左平移$\dfrac{\pi}{3}$个单位长度，得到$y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos x$，故 D 错误.

故选：BC.

11．ABD

【分析】A 选项，得到$f\left(-x+1\right)+f\left(x+1\right)=0$，得到函数的对称中心；B 选项，由题意条件得到$f\left(x+4\right)=f\left(x\right)$，故 B 正确；C 选项，由 B 选项得到$f\left(x\right)$的周期为 4，故$f\left(x+2\right)+f\left(x\right)=f\left(0\right)$，赋值法得到$f\left(2\right)=0$；D 选项，赋值法得到$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$，$f\left(\dfrac{5}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$，$f\left(\dfrac{7}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$，结合函数的周期得到答案.

【详解】A 选项，由题意知，$f\left(-2x+1\right)=-f\left(2x+1\right)$，则$f\left(-x+1\right)+f\left(x+1\right)=0$，

所以$f\left(x\right)$图象的对称中心为$\left(1,0\right)$，A 正确.

B 选项，$f\left(x+2\right)+f\left(x\right)=f\left(2024\right)$，$f\left(x+4\right)+f\left(x+2\right)=f\left(2024\right)$，

两式相减得$f\left(x+4\right)=f\left(x\right)$，所以$f\left(4\right)=f\left(0\right)$，B 正确.

C 选项，由 B 选项可得，$f\left(x\right)$的周期为 4，又$2024=4\times506$，

故$f\left(x+2\right)+f\left(x\right)=f\left(2024\right)=f\left(0\right)$，令$x=0$得，$f\left(2\right)+f\left(0\right)=f\left(0\right)$，

得$f\left(2\right)=0$，所以 C 错误；

D 选项，因为$f\left(-x+1\right)+f\left(x+1\right)=0$，令$x=1$得，$f\left(0\right)+f\left(2\right)=0$，

又$f\left(2\right)=0$，故$f\left(0\right)=0$，

$f\left(-x+1\right)+f\left(x+1\right)=0$中，令$x=\dfrac{1}{2}$得，$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=-f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$，

由$f\left(x+2\right)+f\left(x\right)=0$，得$f\left(\dfrac{5}{2}\right)=-f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$，$f\left(\dfrac{7}{2}\right)=-f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$，

又$f\left(x\right)$的周期为 4，

则

$(4n+1)f\left(4n+\frac{1}{2}\right)+(4n+2)f\left(4n+\frac{3}{2}\right)+(4n+3)f\left(4n+\frac{5}{2}\right)+(4n+4)f\left(4n+\frac{7}{2}\right)$

$=(4n+1)\times\frac{1}{2}+(4n+2)\times\left(-\frac{1}{2}\right)+(4n+3)\times\left(-\frac{1}{2}\right)+(4n+4)\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}\times\left[(4n+1)-(4n+2)-(4n+3)+(4n+4)\right]=0$，

所以$\sum_{i=1}^{100}if\left(i-\frac{1}{2}\right)=0$，D 正确.

故选：ABD

【点睛】函数的对称性：

若$f(x+a)+f(-x+b)=c$，则函数$f(x)$关于$\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)$中心对称，

若$f(x+a)=f(-x+b)$，则函数$f(x)$关于$x=\frac{a+b}{2}$对称，

12．8

【分析】按百分位数的定义列出等式，即可求解.

【详解】因为$5\times40\%=2$，

所以将成绩从小到大排列，第 40 百分位数是第二个成绩和第三个成绩的平均数.

所以$\frac{m+8}{2}=8$，解得$m=8$.

故答案为：8

13．　$\frac{28\sqrt{2}}{3}$　　$40\pi$

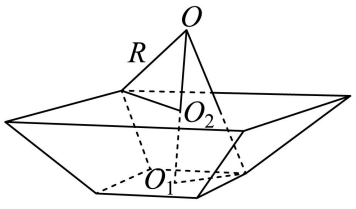
【分析】由题意可知几何体$\Omega$为正四棱台，结合正四棱台求体积；根据正四棱台以及球的结构特称求外接球的半径，进而可得表面积.

【详解】由题意可知几何体$\Omega$为正四棱台，其底面边长分别为 2，4，侧棱长为 2，

正四棱台高为$\sqrt{2^2-\left(\frac{4\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$，

可得体积为$\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times\left(4+16+\sqrt{4\times16}\right)=\frac{28\sqrt{2}}{3}$；

设上、下底面中心分别为$O_2,O_1$，外接球的球心为$O$，半径为$R$，



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/798040112015006042