

系统复习资料汇编

考试复习重点推荐资料

百炼成金模拟考试汇编

阶段复习重点难点梳理

适应性全真模拟考试卷

考前高效率过关手册集

高效率刷题好资料分享

学霸上岸重点笔记总结

注：下载前请仔细阅读资料，以实际预览内容为准

中考几何模型及方法总结

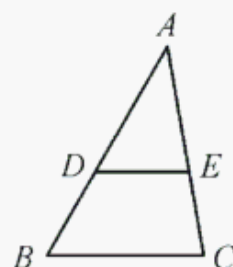


一 相似三角形的基本模型

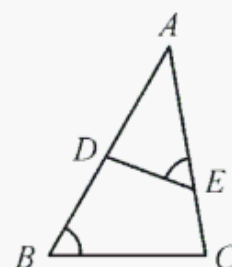
相似三角形是几何证明中重要的应用之一，利用三角形相似可证明角相等、线段成比例（或等积式）以及求线段的长，所以能在复杂的图形中找到相似三角形的基本模型至关重要。
 圆中得角相等的方法有很多，所以相似三角形常与圆相结合。

1. “A” 字型 and 反 “A” 字型

如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D, E 分别在 AB, AC 上。



“A” 字型

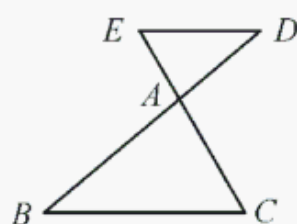


反 “A” 字型

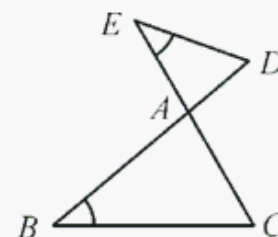
- (1) “A” 字型：若 $DE \parallel BC$ ，则 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ 。
- (2) 反 “A” 字型：若 $\angle AED = \angle ABC$ ，则 $\triangle ABC \sim \triangle AED$ 。

2. “8” 字型 and 反 “8” 字型

如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D, E 分别在 BA, CA 的延长线上。



“8” 字型

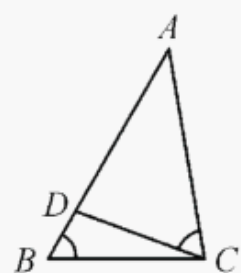


反 “8” 字型

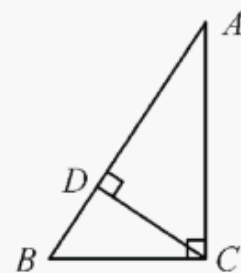
- (1) “8” 字型：若 $DE \parallel BC$ ，则 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ 。
- (2) 反 “8” 字型：若 $\angle AED = \angle ABC$ ，则 $\triangle ABC \sim \triangle AED$ 。

3. 子母型

如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在 AB 上.



共线共角型



双垂直

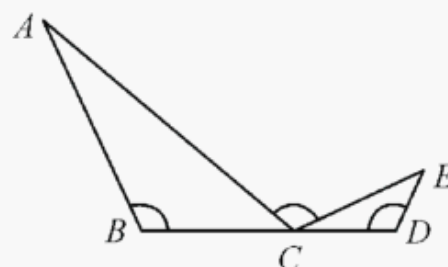
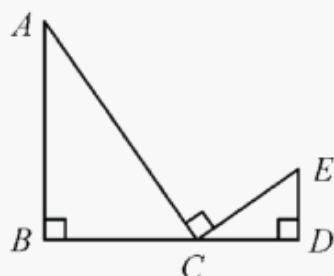
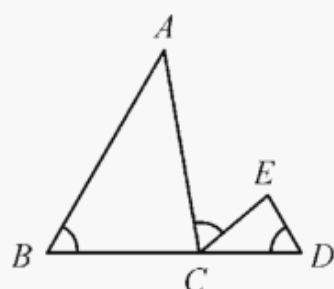
(1) 共线共角型：若 $\angle ACD = \angle ABC$ ，则 $\triangle ABC \sim \triangle ACD$.

(2) 双垂直：若 $\angle ACB = \angle ADC = 90^\circ$ ，则 $\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD$.

利用双垂直的结论，可证明射影定理： $CD^2 = AD \cdot BD$ ， $AC^2 = AD \cdot AB$ ； $BC^2 = BD \cdot BA$.

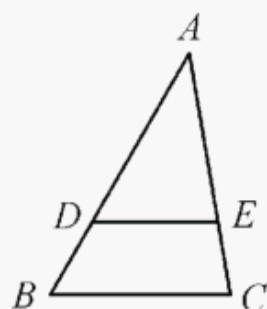
4. 一线三等角

如图在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 中 B, C, D 三点共线且 $\angle B = \angle ACE = \angle D$ ，则 $\triangle ABC \sim \triangle CDE$.

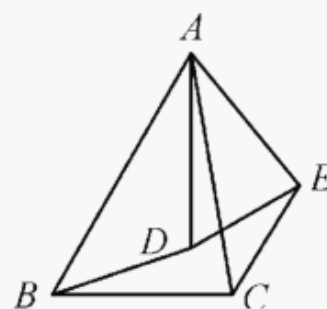


5. 旋转型

如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，点 D, E 分别在 AB, AC 上，且 $DE \parallel BC$. 将 $\triangle ADE$ 绕点 A 旋转一定角度连接 BD, CE ，如图 2，则 $\triangle ABD \sim \triangle ACE$.



图一



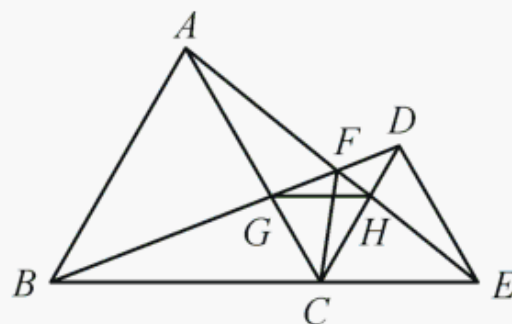
图二



二 共顶点模型

1. 等边三角形共顶点

已知等边 $\triangle ABC$ 与等边 $\triangle DCE$ ， B, C, E 三点共线。

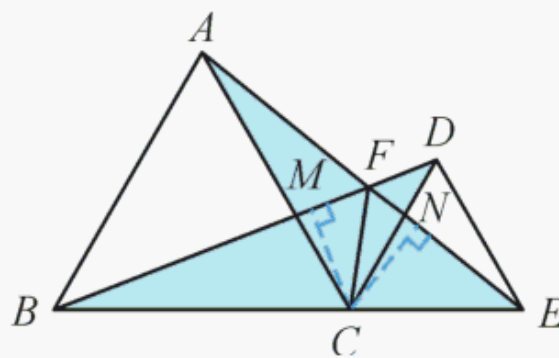


如图，连接 BD, AE ，交于点 F ， BD 与 AC 交于点 G ， AE 与 DC 交于点 H ，连接 CF, H ，则：

- (1) $\triangle BCD \cong \triangle ACE$ ；
- (2) $AE = BD$ ；
- (3) $\angle AFB = \angle DFE = 60^\circ$ ；
- (4) FC 平分 $\angle BFE$ ；
- (5) $BF = AF + FC$ ， $EF = DF + FC$ ；
- (6) $\triangle CGH$ 为等边三角形。

证明：

- (1) 由已知条件可得： $\angle ACE = \angle BCD$ ； $CA = CB$ ； $EC = DC$ 则 $\triangle ACE \cong \triangle BCD$ 。
- (2) 由 (1) 可得 $AE = BD$ 。
- (3) 由 (1) 可得 $\angle GAF = \angle GBC$ ，而 $\angle AGF = \angle BGC$ ，所以 $\angle DFE = \angle AFB = \angle ACB = 60^\circ$ 。
- (4) 方法一：如图，过点 C 分别作 BD, AE 的垂线，垂足为 M, N 。



由 (1) 知 $S_{\triangle ACE} = S_{\triangle BCD}$ ，即 $\frac{1}{2}BD \cdot CM = \frac{1}{2}AE \cdot CN$

所以 $CM = CN$ ，故 FC 平分 $\angle BFE$ 。

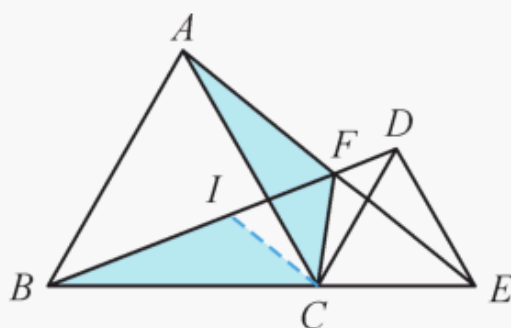
方法二：由 $\angle CAF = \angle CBF$ 可得 A, B, C, F 四点共圆，

所以 $\angle BFC = \angle BAC = 60^\circ$ 。

同理可得 $\angle CFE = \angle CDE = 60^\circ$ 。

所以 FC 平分 $\angle BFE$ 。

(5) 如图, 在 BD 上取点 I , 使得 $\angle FCI = 60^\circ$, 则 $\triangle CFI$ 为等边三角形.



易证: $\triangle BCI \cong \triangle ACF$, 所以 $BI = AF$, $IF = CI = CF$.

从而 $BF = BI + IF = AF + CF$.

同理可得 $EF = DF + CF$.

(6) 易证 $\triangle ACH \cong \triangle BCG$ (ASA), 所以 $CG = CH$.

而 $\angle GCH = 60^\circ$, 所以 $\triangle CGH$ 为等边三角形.

2. 等腰直角三角形共顶点

已知在等腰 $\text{Rt}\triangle ACB$ 与等腰 $\text{Rt}\triangle DCE$ 中, $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$.

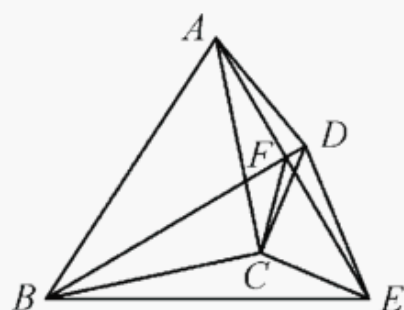


图 1

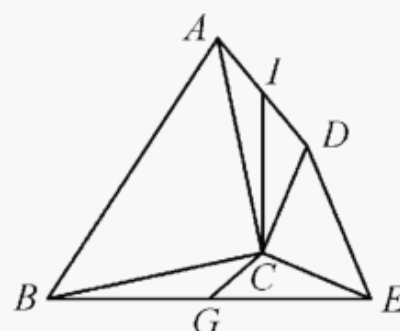


图 2

如图 1, 连接 BD , AE , 交于点 F , 连接 FC , AD , BE , 则:

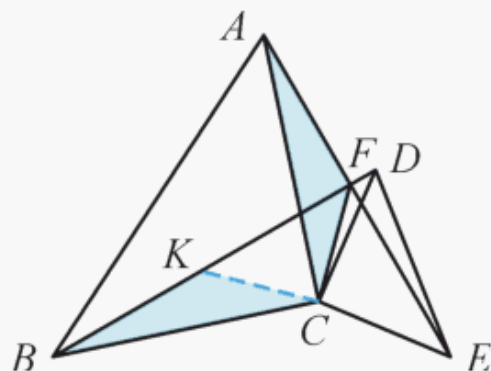
- (1) $\triangle BCD \cong \triangle ACE$;
- (2) $AE = BD$;
- (3) $AE \perp BD$;
- (4) FC 平分 $\angle BFE$;
- (5) $AB^2 + DE^2 = AD^2 + BE^2$;
- (6) $BF = AF + \sqrt{2}FC$, $EF = DF + \sqrt{2}FC$;
- (7) 如图 2, G , I 分别是 BE , AD 上的点, ①若 G 是 BE 的中点, 则 $GC \perp AD$ (反之亦然);
 ②若 $IC \perp BE$, 则 I 是 AD 的中点 (反之亦然);
- (8) $S_{\triangle ACD} = S_{\triangle BCE}$.

证明:

- (1) (2) (3) (4) 的证明可参阅本节“1. 等边三角形共顶点”;
- (5) 由 (3) 和勾股定理可得:

$$AB^2 + DE^2 = (AF^2 + BF^2) + (DF^2 + EF^2) = (AF^2 + DF^2) + (BF^2 + EF^2) = AD^2 + BE^2$$

(6) 如图，过点 C 作 $CK \perp FC$ ，与 BD 交于点 K ，则 $\triangle CFK$ 为等腰直角三角形。

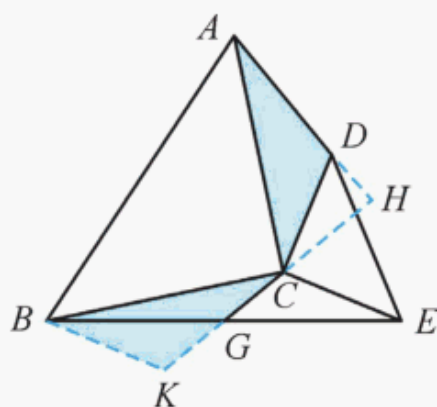


易证 $\triangle BCK \cong \triangle ACF$ ，所以 $BK = AF$ 。

从而 $BF = BK + KF = AF + \sqrt{2}FC$ 。

同理可得 $EF = DF + \sqrt{2}FC$ 。

(7) ①如图，延长 AD ， GC ，交于点 H ，延长 CG 至点 K ，使得 $GK = GC$ ，连接 BK 。



易证 $\angle KBG = \angle CEG$ ， $BK = EC = CD$ 。

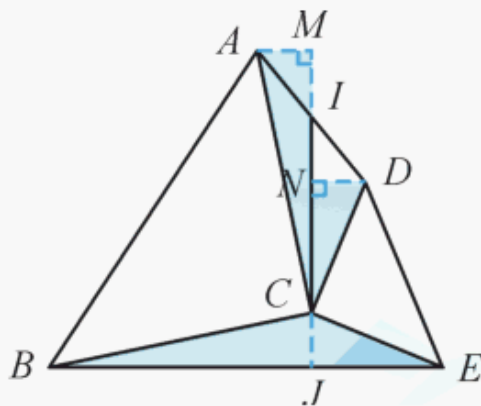
由题意可得 $\angle ACD + \angle BCE = \angle CBE + \angle CEB + \angle BCE = 180^\circ$ ，所以

$$\angle ACD = \angle CBE + \angle CEB = \angle CBG + \angle GBK = \angle CBK。$$

从而 $\triangle ACD \cong \triangle CBK$ (SAS)，所以 $\angle CAD = \angle BCK$ 。

所以 $\triangle ACH + \triangle CAH = \triangle ACH + \triangle BCK = 90^\circ$ ，故 $GC \perp AD$ 。

②如图，延长 IC 交 BE 于点 J ，分别过点 A ， D 作直线 CI 的垂线，垂足为 M ， N 。



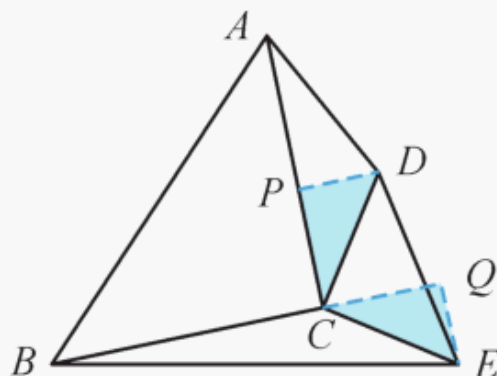
由弦图模型可得 $\triangle AMC \cong \triangle CJB$ ， $\triangle DNC \cong \triangle CJE$ 。

所以 $AM = CJ = DN$ ，故有 $\triangle AMI \cong \triangle DNI$ ，

所以 $AI = DI$ ，即得证。

(8) 在 (7) 的证明过程中可得到 $S_{\triangle ACD} = S_{\triangle BCE}$ ；也可以用下面的方法来证明。

如图，过点 D 作 $DP \perp AC$ 于点 P ，过点 E 作 $EQ \perp BC$ ，与 BC 的延长线交于点 Q 。

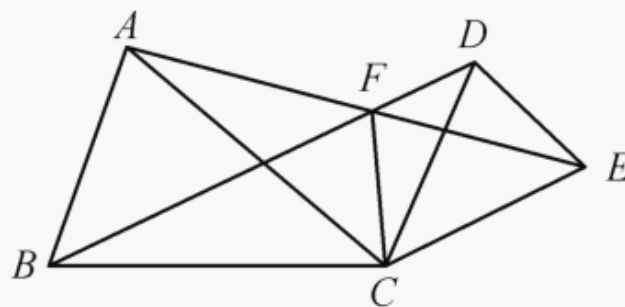


易证 $\triangle DPC \cong \triangle EQC$ (AAS)，所以 $DP = EQ$ 。

所以 $\frac{1}{2} DP \cdot AC = \frac{1}{2} EQ \cdot BC$ ，即 $S_{\triangle ACD} = S_{\triangle BCE}$ 。

3. 等腰三角形共顶点

已知在等腰 $\triangle ACB$ 与等腰 $\triangle DCE$ 中， $CA = CB$ ， $CD = CE$ ，且 $\angle ACB = \angle DCE$ 。

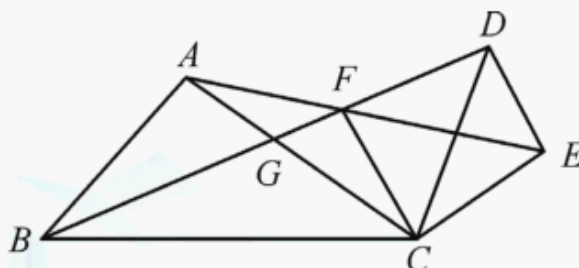


如图，连接 BD ， AE ，交于点 F ，则：

- (1) $\triangle BCD \cong \triangle ACE$ ；
- (2) $AE = BD$ ；
- (3) $\angle AFB = \angle ACB$ ；
- (4) FC 平分 $\angle BFE$ 。

4. 相似三角形共顶点

已知在 $\triangle ACB$ 和 $\triangle ECD$ 中， $\frac{AC}{EC} = \frac{BC}{DC}$ ， $\angle ACB = \angle ECD$ 。



如图，连接 BD ， AE ，交于点 F ，则：

(1) $\triangle BCD \sim \triangle ACE$ ；

(2) $\angle AFB = \angle ACB$.

证明：

(1) 由已知条件可得： $\frac{BC}{DC} = \frac{AC}{EC}$ ， $\angle BCD = \angle ACE$.

所以 $\triangle ACE \sim \triangle BCD$.

(2) 令 AC 与 BD 交于点 G ，则 $\angle AGF = \angle BGC$.

由 (1) 可得 $\angle CAF = \angle CBF$ ，所以 $\angle AFB = \angle ACB$.

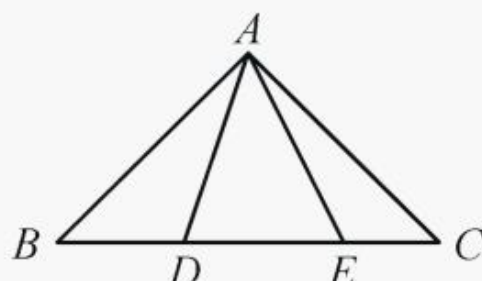


角含半角模型

1. 等腰直角三角形角含半角

如图在 $\triangle ABC$ 中 $AB = AC$, $\angle BAC = 90^\circ$, 点 D, E 在边 BC 上, 且 $\angle DAE = 45^\circ$ 则:

- (1) $\triangle BAE \sim \triangle ADE \sim \triangle CDA$;
- (2) $BD^2 + CE^2 = DE^2$.



证明:

- (1) 易得 $\angle ADC = \angle B + \angle BAD = \angle EAB$

所以 $\triangle BAE \sim \triangle ADE \sim \triangle CDA$.

- (2) 方法一 (旋转法): 如图 1, 将 $\triangle ABD$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle ACF$, 连接 EF ,

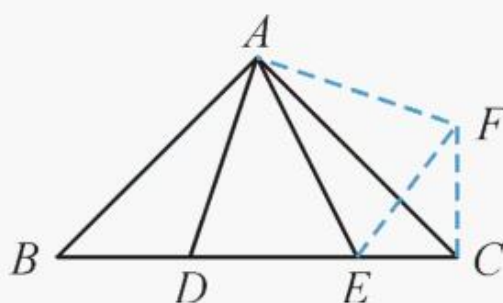
则 $\angle EAF = \angle EAD = 45^\circ$, $AF = AD$

所以 $\triangle DAE \cong \triangle FAE$ (SAS)

所以 $DE = FE$.

而 $CF = BD$, $\angle FCE = \angle FCA + \angle ACE = 90^\circ$

所以 $BD^2 + CE^2 = CF^2 + CE^2 = EF^2 = DE^2$.



图一

方法二 (翻折法): 如图 2, 作点 B 关于 AD 的对称点 F , 连接 AF , DF , EF ,

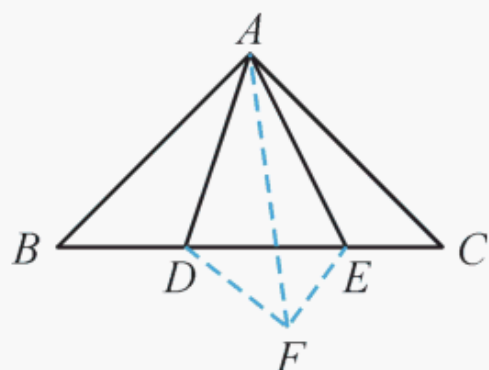
则 $\angle FAE = \angle CAE$, $AF = AB = AC$,

所以 $\triangle FAE \cong \triangle CAE$ (SAS)

所以 $EF = EC$.

而 $DF = DB$, $\angle DFE = \angle AFD + \angle AFE = 90^\circ$

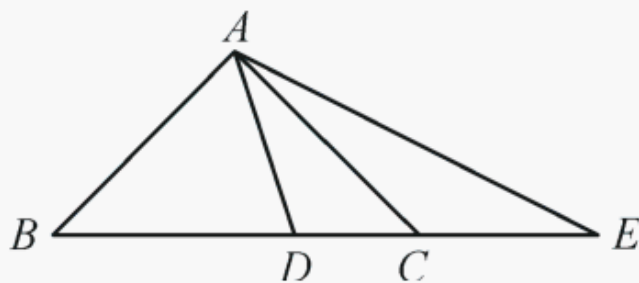
所以 $BD^2 + CE^2 = DF^2 + EF^2 = DE^2$.



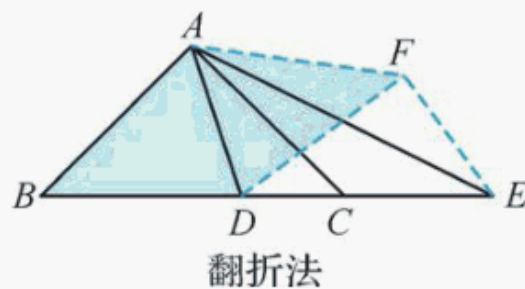
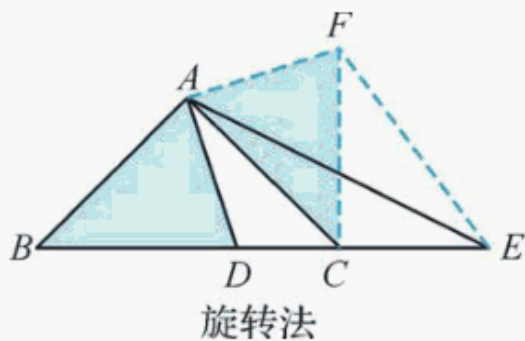
图二

【拓展 1】如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ，点 D 在边 BC 上，点 E 在 BC 的延长线上，且 $\angle DAE = 45^\circ$ 则：

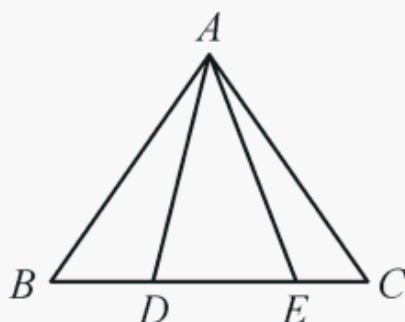
- (1) $\triangle BAE \sim \triangle ADE \sim \triangle CDA$ ；
- (2) $BD^2 + CE^2 = DE^2$.



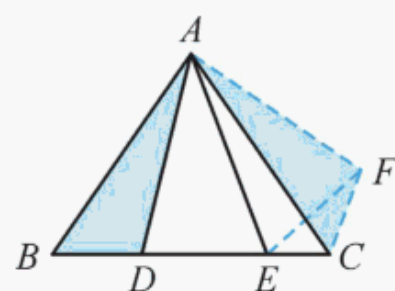
可以通过旋转、翻折的方法来证明，如图：



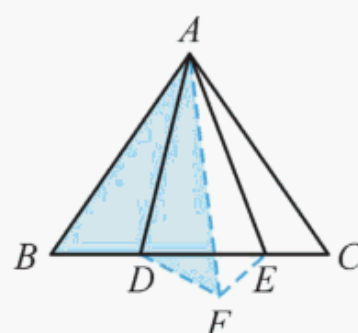
【拓展 2】将等腰直角三角形变成任意的等腰三角形：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，点 D, E 在边 BC 上且 $\angle DAE = \frac{1}{2} \angle BAC$ ，则以 BD, DE, EC 为三边长的三角形有一个内角度数为 $180^\circ - \angle BAC$.



可以通过旋转、翻折的方法将 BD, DE, EC 转移到一个三角形中，如图：



旋转法



翻折法

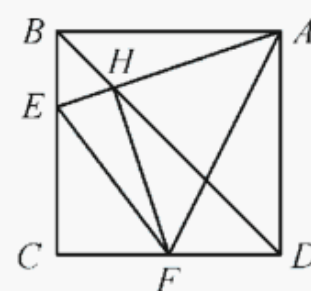
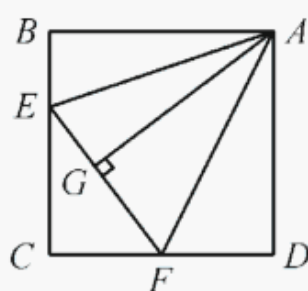
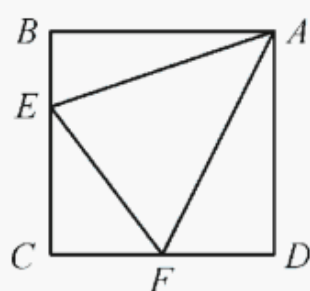
2. 正方形角含半角

如图 1，在正方形 $ABCD$ 中，点 E, F 分别在边 BC, CD 上， $\angle EAF = 45^\circ$ ，连接 EF ，则：

(1) $EF = BE + DF$

(2) 如图 2，过点 A 作 $AG \perp EF$ 于点 G ，则 $AG = AD$

(3) 如图 3，连接 BD ，与 AE 交于点 H ，连接 FH ，则 $FH \perp AE$ 。



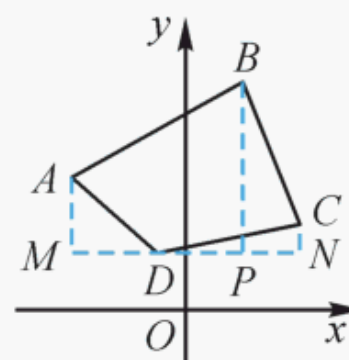
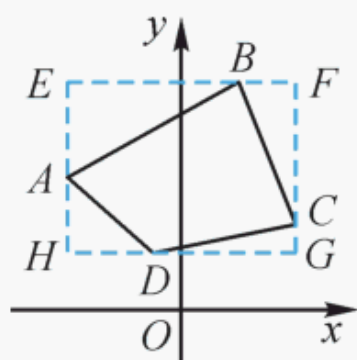
证明：

(1) 如图，将 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle ADI$ ，

则 $\angle IAF = \angle EAF = 45^\circ$ ， $AI = AE$ ，

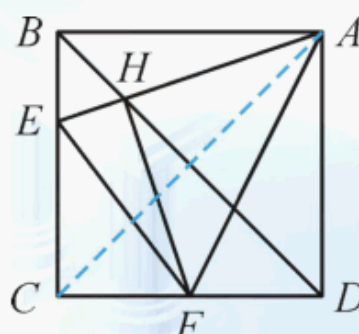
所以 $\triangle AEF \cong \triangle AIF$ (SAS)，

所以 $EF = IF = DI + DF = BE + DF$ 。



(2) 由 $\triangle AEF \cong \triangle AIF$ ， $AG \perp EF$ ， $AD \perp IF$ ，可得 $AG = AD$ 。

(3) 方法一：如图，连接 AC 。



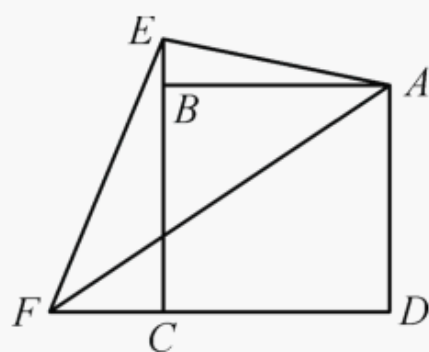
易证 $\triangle ABH \sim \triangle ACF$ ，从而得 $\triangle ABC \sim \triangle AHF$ ，

所以 $\angle AHF = \angle ABC = 90^\circ$ ，即得证。

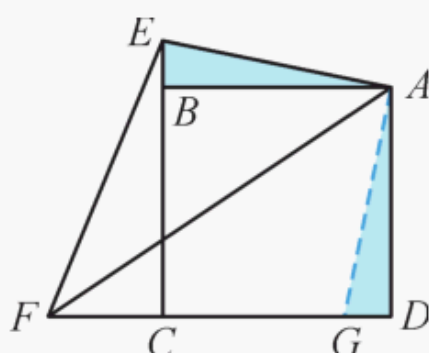
方法二：由 $\angle HAF = \angle HDF = 45^\circ$ 可得 A, D, F, H 四点共圆，

从而 $\angle AHF = 180^\circ - \angle ADF = 90^\circ$ ，即 $FH \perp AE$ 。

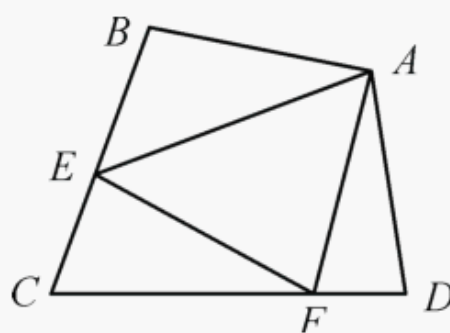
【拓展 1】如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E, F 分别在边 CB, DC 的延长线上， $\angle EAF = 45^\circ$ ，连接 EF ，则 $EF = DF - BE$ 。



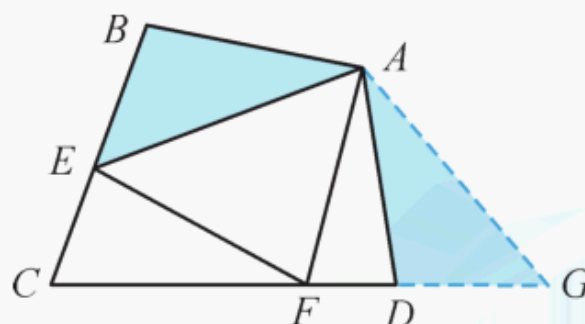
可以通过旋转的方法来证明如图：



【拓展 2】将正方形变成一组邻边相等、对角互补的四边形：如图在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $\angle BAD + \angle C = 180^\circ$ ，点 E, F 分别在边 BC, CD 上， $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$ ，连接 EF ，则 $EF = BE + DF$ 。



可以通过旋转的方法来证明，如图：



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/798050123050007027>