第三章

# 培优点2　指对同构问题

把一个等式或不等式通过变形，使左右两边结构形式完全相同，构造函数，利用函数的单调性进行处理，找到这个函数模型的方法就是同构法.同构法主要解决含有指数、对数混合的等式或不等式问题.

## 题型一　同构法的理解

例1　(1)若$e^a+a>b+\ln b$($a$，$b$为变量)成立，则下列选项正确的是

√ A.$a>\ln b$　　B.$a<\ln b$

C.$\ln a>b$　　D.$\ln a<b$

解析

方法一　由$e^a+a>b+\ln b$，可得$e^a+a>e^{\ln b}+\ln b$，

令$f(x)=e^x+x$，则$f(a)>f(\ln b)$，

因为$f(x)$在$\mathbf{R}$上是增函数，所以$a>\ln b$.

方法二　由$e^a+a>b+\ln b$，

可得$e^a+\ln e^a>b+\ln b$，

令$g(x)=x+\ln x$，则$g(e^a)>g(b)$，

因为$g(x)$在$(0，+\infty)$上是增函数，所以$e^a>b$，即$a>\ln b$.

(2)若关于$a$的方程$a\mathrm{e}^{a-2}=\mathrm{e}^4$和关于$b$的方程$b(\ln b-2)=\mathrm{e}^{3\lambda-1}$($a$，$b\in\mathbf{R}_+$)可化为同构方程，则$ab$的值为

A.$\mathrm{e}^8$　　B.e　　C.ln 6　　D.1

解析

对$ae^{a-2}=e^4$两边取自然对数，

得$\ln a+a=6$， ①

对$b(\ln b-2)=e^{3\lambda-1}$两边取自然对数，

得$\ln b+\ln(\ln b-2)=3\lambda-1$，

即$\ln b-2+\ln(\ln b-2)=3\lambda-3$， ②

因为方程①②为两个同构方程，

所以$3\lambda-3=6$，解得$\lambda=3$，

**解析**

设 $F(x)=\ln x+x$，$x>0$，则 $F'(x)=\frac{1}{x}+1>0$，

所以$F(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增，

所以方程$F(x)=6$的解只有一个，

所以$a=\ln b-2$，所以$ab=(\ln b-2)b=b(\ln b-2)=e^{3\times 3-1}=e^{8}$.

## 思维升华

利用恒等式$x=\ln e^{x}$和$x=e^{\ln x}$，通过幂转指或幂转对进行等价变形，构造函数，然后由构造的函数的单调性进行研究.

**跟踪训练1**　已知不等式$ax+e^{ax}>\ln(bx)+bx$进行指对同构时，可以构造的函数是

A. $f(x)=\ln x+x$　　　　B. $f(x)=x\ln x$

C. $f(x)=xe^x$　　　　D. $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$

解析

由恒等式$x=\ln e^{x}$可得$ax=\ln e^{ax}$，

所以$ax+e^{ax}>\ln(bx)+bx$可变形为

$\ln e^{ax}+e^{ax}>\ln(bx)+bx$，

构造函数$f(x)=\ln x+x$，

可得$f(e^{ax})>f(bx)$.

# 题型二　同构法的应用

## 命题点1　$a\ln a$与$xe^x$同构

例2　设实数$k>0$，对于任意的$x>1$，不等式$ke^{kx}\geq\ln x$恒成立，则$k$的最小值为__$\frac{1}{e}$__.

解析

由$ke^{kx}\geqslant \ln x$得$kxe^{kx}\geqslant x\ln x$，

即$kxe^{kx}\geqslant e^{\ln x}\cdot \ln x$，

令$f(x)=xe^{x}$，则$f(kx)\geqslant f(\ln x)$.

因为$f'(x)=(x+1)e^{x}$，

所以$f(x)$在$(-1，+\infty)$上单调递增，

因为$kx>0$，$\ln x>0$，所以$kx\geqslant \ln x$，即$k\geqslant \dfrac{\ln x}{x}$，

解析

令 $h(x)=\frac{\ln x}{x}(x>1)$，则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

当$x\in(1，e)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，

当$x\in(e，+\infty)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，

所以 $h(x)_{max}=h(e)=\frac{1}{e}$，即 $k\geq\frac{1}{e}$，

所以 $k$ 的最小值为$\frac{1}{e}$.

## 命题点2　$be^b$与$x\ln x$同构

例3　(2023·南京模拟)设$a$，$b$都为正数，e为自然对数的底数，若$ae^a<b\ln b$，则

A.$ab>e$　　B.$b>e^a$　　C.$ab<e$　　D.$b<e^a$

解析

由$ae^a<b\ln b$，得$e^a\ln e^a<b\ln b$.

设$f(x)=x\ln x(x>0)$，

因为$a>0$，则$e^a>1$，

因为$b>0$，且$b\ln b>ae^a>0$，则$b>1$.

当$x>1$时，$f'(x)=\ln x+1>0$，

则$f(x)$在$(1，+\infty)$上单调递增，

$e^a\ln e^a<b\ln b$，即$f(e^a)<f(b)$，

所以$e^a<b$.

## 命题点3　$\frac{c}{e^c}$与$\frac{\ln x}{x}$同构

例4　若关于$x$的不等式$\frac{x+\ln a}{e^x}-\frac{a\ln x}{x}>0$对$\forall x\in(0,1)$恒成立，则实数$a$的取值范围为

A.$\left(-\infty,\ \frac{1}{e}\right]$　　√B.$\left[\frac{1}{e},\ +\infty\right)$　　C.$\left[\frac{1}{e},\ 1\right)$　　D.$\left(0,\ \frac{1}{e}\right]$

解析

由题意可知 $a>0$，$\dfrac{\ln e^x+\ln a}{e^x}>\dfrac{a\ln x}{x}$，即$\dfrac{\ln ae^x}{ae^x}>\dfrac{\ln x}{x}$对$\forall x\in(0,1)$恒成立.

设 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则问题转化为 $g(ae^x)>g(x)$在$(0,1)$上恒成立，

因为 $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

所以当$0<x<e$时，$g'(x)>0$，当$x>e$时，$g'(x)<0$，

所以$g(x)$在$(0，e)$上单调递增，在$(e，+\infty)$上单调递减，

又$g(1)=0$，所以当$x\in(0,1)$时，$g(x)<0$；

**解析**

当$x\in(1,+\infty)$时，$g(x)>0$.

①在$x\in(0,1)$上，若$ae^x\geqslant1$恒成立，即$a\geqslant1$，$g(ae^x)\geqslant0>g(x)$；

②在$x\in(0,1)$上，若$0<ae^x<1$，则$ae^x>x$恒成立，即$\frac{x}{e^x}<a<1$恒成立，

令$h(x)=\frac{x}{e^x}$，$x\in(0,1)$，则$h'(x)=\frac{1-x}{e^x}>0$，

所以$h(x)$在$(0,1)$上单调递增，所以$h(x)<h(1)=\frac{1}{e}$，

所以$\frac{1}{e}\leqslant a<1$，综上所述，实数$a$的取值范围为$\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.

## 命题点4　$d+\ln d$与$x+e^x$同构

例5　对于任意的$x>0$，$e^x\geq(a-1)x+\ln(ax)$恒成立，则$a$的最大值是__e__.

解析

由$e^x \geqslant (a-1)x+\ln(ax)$，

可得$e^x+x \geqslant ax+\ln(ax)$，

即$e^x+x \geqslant e^{\ln(ax)}+\ln(ax)$，

令$f(x)=e^x+x$，则$f(x) \geqslant f(\ln(ax))$，

因为$f(x)$在$\mathbf{R}$上是增函数，

所以$x \geqslant \ln(ax)$，即$a \leqslant \dfrac{e^x}{x}$，

解析

令 $h(x)=\frac{e^x}{x}(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$，

当$x\in(0,1)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减；

当$x\in(1,+\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，

所以$h(x)_{\min}=h(1)=e$，即$a\leqslant e$，

所以$a$的最大值是e.

## ■ 思维升华

常见的同构函数有：①$f(x)=\frac{\ln x}{x}$；②$f(x)=x\ln x$；③$f(x)=xe^x$；④$f(x)=\frac{x}{e^x}$.

其中①④可以借助$\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln x}{e^{\ln x}}=\frac{t}{e^t}$，②③可以借助 $xe^x=(\ln e^x)e^x=(\ln t)t=t\ln t$ 进行指对互化.

**跟踪训练2**　(1)(2024·武汉模拟)已知$a>0$，若在$(1，+\infty)$上存在$x$使得不等式$\mathrm{e}^x-x\leqslant x^a-a\ln x$成立，则$a$的最小值为____e____.

**解析**

$\because x^a=\mathrm{e}^{\ln x^a}=\mathrm{e}^{a\ln x}$，$\therefore$不等式即为$\mathrm{e}^x-x\leqslant\mathrm{e}^{a\ln x}-a\ln x$，

$\because a>0$且$x>1$，$\therefore a\ln x>0$，

设$y=\mathrm{e}^x-x$，$x\in(0，+\infty)$，则$y'=\mathrm{e}^x-1>0$，

故$y=\mathrm{e}^x-x$在$(0，+\infty)$上单调递增，

$\therefore x\leqslant a\ln x$，即 $a\geqslant\dfrac{x}{\ln x}$，

即存在 $x\in(1，+\infty)$，使 $a\geqslant\dfrac{x}{\ln x}$，

解析

$\therefore a \geqslant \left(\dfrac{x}{\ln x}\right)_{\min}$，

设 $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}(x>1)$，

则 $f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}$，当 $x\in(1，e)$时，$f'(x)<0$；

当$x\in(e，+\infty)$时，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$在$(1，e)$上单调递减，在$(e，+\infty)$上单调递增，

$\therefore f(x)_{\min}=f(e)=e$，$\therefore a\geqslant e$.

故$a$的最小值为e.