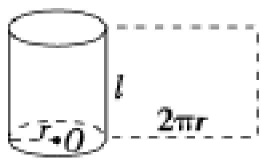
第 5 讲　简单几何体的再认识(表面积与体积)

一、知识梳理

1．圆柱、圆锥、圆台的侧面展开图及侧面积公式

	圆柱	圆锥	圆台
侧面展开图			
侧面积公式	$S_{圆柱侧}=2\pi rl$	$S_{圆锥侧}=\pi rl$	$S_{圆台侧}=\pi(r+r')l$

2. 空间几何体的表面积与体积公式

名称 几何体	表面积	体积
柱体(棱柱和圆柱)	$S_{表面积}=S_{侧}+2S_{底}$	$V=S_{底}h$
锥　体(棱锥和圆锥)	$S_{表面积}=S_{侧}+S_{底}$	$V=\frac{1}{3}S_{底}h$
台　体(棱台和圆台)	$S_{表面积}=S_{侧}+S_{上}+S_{下}$	$V=\frac{1}{3}(S_{上}+S_{下}+\sqrt{S_{上}S_{下}})h$
球	$S=4\pi R^2$	$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

常用结论

1．正方体的外接球、内切球及与各条棱相切球的半径

(1)外接球：球心是正方体的中心；半径 $r=\frac{\sqrt{3}}{2}a$(a 为正方体的棱长)．

(2)内切球：球心是正方体的中心；半径 $r=\frac{a}{2}$(a 为正方体的棱长)．

(3)与各条棱都相切的球：球心是正方体的中心；半径 $r=\frac{\sqrt{2}}{2}a$(a 为正方体的棱长)．2. 正四面体的外接球、内切球的球心和半径

(1)正四面体的外接球与内切球(正四面体可以看作是正方体

的一部分).

(2)外接球：球心是正四面体的中心；半径 $r=\frac{\sqrt{6}}{4}a$(a 为正四面体的棱长).

(3)内切球：球心是正四面体的中心；半径 $r=\frac{\sqrt{6}}{12}a$(a 为正四面体的棱长).

二、教材衍化

1．已知圆锥的表面积等于 12π cm^2，其侧面展开图是一个半圆，则底面圆的半径为________.

解析：$S_{表}=\pi r^2+\pi rl=\pi r^2+\pi r\cdot 2r=3\pi r^2=12\pi$，

所以 $r^2=4$，所以 $r=2$.

答案：2 cm

2．

如图，将一个长方体用过相邻三条棱的中点的平面截出一个棱锥，则该棱锥的体积与剩下的几何体体积的比为________.

解析：设长方体的相邻三条棱长分别为 a，b，c，它截出棱锥的体积 $V_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}a\times\frac{1}{2}b\times\frac{1}{2}c=\frac{1}{48}abc$，剩下的几何体的体积 $V_2=abc-\frac{1}{48}abc=\frac{47}{48}abc$，所以 $V_1:V_2=1:47$.

答案：1∶47

一、思考辨析

判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”)

(1)多面体的表面积等于各个面的面积之和．(　　)

(2)锥体的体积等于底面积与高之积．(　　)

(3)球的体积之比等于半径比的平方．(　　)

(4)简单组合体的体积等于组成它的简单几何体体积的和或差．(　　)

(5)长方体既有外接球又有内切球．(　　)

答案：(1)√　(2)×　(3)×　(4)√　(5)×

二、易错纠偏

常见误区｜K(1)不能把三视图正确还原为几何体而错解表面积或体积；

(2)考虑不周忽视分类讨论；

(3)几何体的截面性质理解有误；

(4)混淆球的表面积公式和体积公式．

1．已知一个四棱锥的底面是平行四边形，该四棱锥的三视图如图所示(单位：m)，则该四棱锥的体积为________m^3．

解析：根据三视图可知该四棱锥的底面是底边长为 2 m，高为 1 m 的平行四边形，四棱锥的高为 3 m．故该四棱锥的体积 $V=\frac{1}{3}\times2\times1\times3=2(m^3)$．

答案：2

2．将一个相邻边长分别为 4π，8π 的矩形卷成一个圆柱，则这个圆柱的表面积是________．

解析：当底面周长为 4π 时，底面圆的半径为 2，两个底面的面积之和是 8π；当底面周长为 8π 时，底面圆的半径为 4，两个底面的面积之和为 32π．无论哪种方式，侧面积都是矩形的面积 $32\pi^2$，故所求的表面积是 $32\pi^2+8\pi$ 或 $32\pi^2+32\pi$．

答案：$32\pi^2+8\pi$ 或 $32\pi^2+32\pi$

3．已知圆柱的上、下底面的中心分别为 O_1，O_2，过直线 O_1O_2 的平面截该圆柱所得的截面是面积为 8 的正方形，则该圆柱的表面积为________.

解析：因为过直线 O_1O_2 的平面截该圆柱所得的截面是面积为 8 的正方形，所以圆柱的高为 $2\sqrt{2}$，底面圆的直径为 $2\sqrt{2}$，所以该圆柱的表面积为 $2\times\pi\times(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\pi\times2\sqrt{2}=12\pi$.

答案：12π

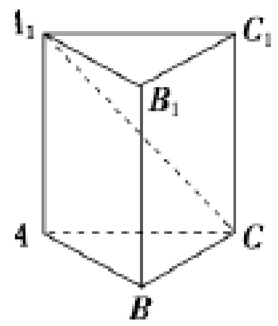
4．一个球的表面积是 16π，那么这个球的体积为________.

解析：设球的半径为 R，则由 $4\pi R^2=16\pi$，解得 $R=2$，所以这个球的体积为$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{32}{3}\pi$.

答案：$\frac{32}{3}\pi$

空间几何体的表面积(师生共研)

例1 (1)(2020·河南周口模拟)如图，在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$底面 ABC，$AB\perp BC$，$AA_1=AC=2$，直线 A_1C 与侧面 AA_1B_1B 所成的角为 30°，则该三棱柱的侧面积为(　　)



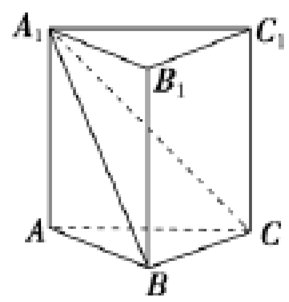
A．$4+4\sqrt{2}$　　B．$4+4\sqrt{3}$

C．12　　D．$8+4\sqrt{2}$

(2)(2020·四川泸州一诊)在梯形 ABCD 中，$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，$AD\parallel BC$，$BC=2AD=2AB=2$.将梯形 ABCD 绕 AD 所在的直线旋转一周而形成的曲面所围成的几何体的表面积为(　　)

A．$(5+\sqrt{2})\pi$　　B．$(4+\sqrt{2})\pi$

C．$(5+2\sqrt{2})\pi$　　D．$(3+\sqrt{2})\pi$



【解析】　(1)连接 A_1B.因为 $AA_1\perp$底面 ABC，则 $AA_1\perp BC$，又 $AB\perp BC$，$AA_1\cap AB=A$，所以 $BC\perp$平面 AA_1B_1B,所以直线 A_1C 与侧面 AA_1B_1B 所成的角为$\angle CA_1B=30°$．又 $AA_1=AC=2$，所以 $A_1C=2\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{2}$.又 $AB\perp BC$，则 $AB=\sqrt{2}$，则该三棱柱的侧面积为 $2\sqrt{2}\times2+2\times2=4+4\sqrt{2}$，故选 A.

(2)

因为在梯形 ABCD 中，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$，AD∥BC，$BC=2AD=2AB=2$，所以将梯形ABCD绕AD所在的直线旋转一周而形成的曲面所围成的几何体是一个底面半径为 $AB=1$，高为 $BC-AD=2-1=1$ 的圆锥，所以该几何体的表面积 $S=\pi\times1^2+2\pi\times1\times2+\pi\times1\times\sqrt{1^2+1^2}=(5+\sqrt{2})\pi$．故选 A.

【答案】　(1)A　(2)A

规律方法

空间几何体表面积的求法

(1)以三视图为载体的几何体的表面积问题，关键是分析三视图确定几何体中各元素之间的位置关系及数量.

(2)多面体的表面积是各个面的面积之和；组合体的表面积注意衔接部分的处理.

(3)旋转体的表面积问题注意其侧面展开图的应用.

1．在如图所示的斜截圆柱中，已知圆柱底面的直径为 40 cm，母线长最短 50 cm，最长 80 cm，则斜截圆柱的侧面面积 $S=$________cm^2.

解析：将题图所示的相同的两个几何体对接为圆柱，则圆柱的

侧面展开图为矩形．由题意得所求侧面展开图的面积 $S=\frac{1}{2}\times(50+80)\times(\pi\times40)=2\ 600\pi(cm^2)$．

答案：$2\ 600\pi$

2．已知一几何体的三视图如图所示，它的主视图与左视图相同，则该几何体的表面积为________．

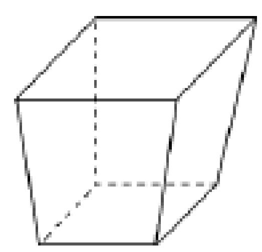
解析：由三视图知，该几何体是一个正四棱柱与半球的组合体，且正四棱柱的高为$\sqrt{2}$，底面对角线长为 4，球的半径为 2，所以该正四棱柱的底面正方形的边长为 $2\sqrt{2}$，该几何体的表面积 $S=\frac{1}{2}\times4\pi\times2^2+\pi\times2^2+2\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times4=12\pi+16$.

答案：$12\pi+16$

空间几何体的体积(多维探究)

角度一　直接利用公式求体积

例 2-1　(2020·山东省实验中学模拟)我国古代《九章算术》里，记载了一个“商功”的例子：今有刍童，下广二丈，袤三丈，上广三丈，袤四丈，高三丈．问积几何？其意思是：今有上下底面皆为长方形的草垛(如图所示)，下底宽 2 丈，长 3 丈，上底宽 3 丈，长 4 丈，高 3 丈．问它的体积是多少？该书提供的算法是：上底长的 2 倍与下底长的和与上底宽相乘，同样下底长的 2 倍与上底长的和与下底宽相乘，将两次运算结果相加，再乘以高，最后除以 6.则这个问题中的刍童的体积为(　　)



A．13.25 立方丈　　B．26.5 立方丈

C．53 立方丈　　D．106 立方丈

【解析】　由题意知，刍童的体积为[(4×2＋3)×3＋(3×2＋4)×2]×3÷6＝26.5(立方丈)，故选B.

【答案】　B

角度二　割补法求体积

例2-2　《九章算术》卷五商功中有如下问题：今有刍甍，下广三丈，袤四丈，上袤二丈，无广，高一丈，问积几何？刍甍：底面为矩形的屋脊状的几何体(网格纸中粗线部分为其三视图，设网格纸上每个小正方形的边长为1)，那么该刍甍的体积为(　　)

A．4　　B．5

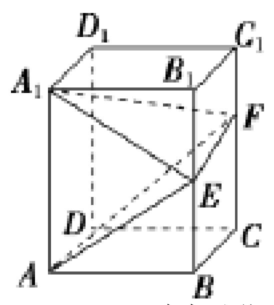
C．6　　D．12

【解析】　如图所示，

由三视图可还原得到几何体ABCDEF，过E，F分别作垂直于底面的截面EGH和FMN，可将原几何体切割成三棱柱EHG-FNM，四棱锥E-ADHG和四棱锥F-MBCN，易知三棱柱的体积为$\frac{1}{2}\times3\times1\times2=3$，两个四棱锥的体积相同，都为$\frac{1}{3}\times1\times3\times1=1$，则原几何体的体积为3＋1＋1＝5.故选B.

【答案】　B

角度三　等体积法求体积



例2-3　(2020·贵州部分重点中学联考)如图，在直四棱柱$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，底面ABCD是平行四边形，点E是棱BB_1的中点，点F是棱CC_1上靠近C_1的三等分点，且三棱锥$A_1\text{-}AEF$的体积为2，则四棱柱$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$的体积为(　　)

A．12　　B．8　C．20　D．18

【解析】　设点 F 到平面 ABB_1A_1 的距离为 h，由题意得 $V_{A_1-AEF}=V_{F-A_1AE}$. 又 $V_{F-A_1AE}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1AE}\cdot h=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}AA_1\cdot AB\right)\cdot h=\frac{1}{6}(AA_1\cdot AB)\cdot h=\frac{1}{6}S_{四边形ABB_1A_1}\cdot h=\frac{1}{6}V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}$，所以 $V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}=6V_{A_1-AEF}=6\times2=12$. 所以四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 12. 故选 A.

【答案】　A

规律方法

(1)处理体积问题的思路

①“转”：指的是转换底面与高，将原来不易求面积的底面转换为易求面积的底面，或将原来不易看出的高转换为易看出并易求解长度的高；

②“拆”：指的是将一个不规则的几何体拆成几个简单的几何体，便于计算；

③“拼”：指的是将小几何体嵌入一个大几何体中，如将一个三棱锥复原成一个三棱柱，将一个三棱柱复原成一个四棱柱，这些都是拼补的方法.

(2)求空间几何体的体积的常用方法

①公式法：对于规则几何体的体积问题，可以直接利用公式进行求解；

②割补法：把不规则的图形分割成规则的图形，然后进行体积计算；或者把不规则的几何体补成规则的几何体，不熟悉的几何体补成熟悉的几何体，便于计算其体积；

③等体积法：一个几何体无论怎样转化，其体积总是不变的. 如果一个几何体的底面面积和高较难求解时，我们可以采用等体积法

进行求解．等体积法也称等积转化或等积变形，它是通过选择合适的底面来求几何体体积的一种方法，多用来解决有关锥体的体积，特别是三棱锥的体积．

1．(2020·江西上饶二模)已知下图为某几何体的三视图，则其体积为(　　)

A．$\pi+\frac{2}{3}$　　　　B．$\pi+\frac{1}{3}$

C．$\pi+\frac{4}{3}$　　　　D．$\pi+\frac{3}{4}$

解析：选C.

几何体为半圆柱与四棱锥的组合体(如图)，半圆柱的底面半径为1，高为2，四棱锥的底面为边长为2的正方形，高为1，故几何体的体积$V=\frac{1}{2}\times\pi\times1^2\times2+\frac{1}{3}\times2^2\times1=\pi+\frac{4}{3}$.故选C.

2．(2019·高考全国卷Ⅲ)学生到工厂劳动实践，利用3D打印技术制作模型．如图，该模型为长方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$挖去四棱锥O-EFGH后所得的几何体，其中O为长方体的中心，E，F，G，H分别为所在棱的中点，AB＝BC＝6 cm，$AA_1=4$ cm.3D打印所用原料密度为0.9 g/cm^3.不考虑打印损耗，制作该模型所需原料的质量为________g.

解析：由题易得长方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$的体积为$6\times6\times4=144(cm^3)$，四边形EFGH为平行四边形，

如图所示，连接GE，HF，易知四边形EFGH的面积为矩形BCC_1B_1面积的一半，即$\frac{1}{2}\times6\times4=12(cm^2)$，所以$V_{四棱锥O\text{-}EFGH}=\frac{1}{3}\times3\times12=12(cm^3)$，所以该模型的体积为$144-12=132(cm^3)$，所以制作该模

型所需原料的质量为 $132\times0.9=118.8$(g).

答案：118.8

球与空间几何体的接、切问题(多维探究)

角度一　外接球

例3-1　(1)已知圆柱的高为 1，它的两个底面的圆周在直径为 2 的同一个球的球面上，则该圆柱的体积为(　　)

A. π　　　　B. $\frac{3\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{2}$　　　　D. $\frac{\pi}{4}$

(2)已知三棱锥 S-ABC 的所有顶点都在球 O 的球面上，SC 是球 O 的直径．若平面 SCA⊥平面 SCB，SA＝AC，SB＝BC，三棱锥 S-ABC 的体积为 9，则球 O 的表面积为________.

【解析】　(1)设圆柱的底面圆半径为 r，则 $r^2=1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$，所以，圆柱的体积 $V=\frac{3}{4}\pi\times1=\frac{3\pi}{4}$，故选 B.

(2)设球 O 的半径为 R，因为 SC 为球 O 的直径，所以点 O 为 SC 的中点，连接 AO，OB，因为 SA＝AC，SB＝BC，所以 AO⊥SC，BO⊥SC，因为平面 SCA⊥平面 SCB，平面 SCA∩平面 SCB＝SC，所以 AO⊥平面 SCB，所以 $V_{S\text{-}ABC}=V_{A\text{-}SBC}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle SBC}\times AO=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times SC\times OB)\times AO$，即 $9=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times2R\times R)\times R$，解得 $R=3$，所以球 O 的表面积为 $S=4\pi R^2=4\pi\times3^2=36\pi$.

【答案】　(1)B　(2)36π

角度二　内切球

例3-2 (1)如图，

在圆柱 O_1O_2 内有一个球 O，该球与圆柱的上、下底面及母线均相切．记圆柱 O_1O_2 的体积为 V_1，表面积为 S_1，球 O 的体积为 V_2，表面积为 S_2，则 $\frac{V_1}{V_2}$的值是__________，$\frac{S_1}{S_2}$＝________.

(2)已知棱长为 a 的正四面体，则此正四面体的表面积 S_1 与其内切球的表面积 S_2 的比值为________.

【解析】　(1)设圆柱内切球的半径为 R，则由题设可得圆柱 O_1O_2 的底面圆的半径为 R，高为 2R，所以$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi R^2\cdot 2R}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{3}{2}$. $\frac{S_1}{S_2}=$

$\frac{2\pi R\cdot 2R+2\pi R^2}{4\pi R^2}=\frac{3}{2}$.

(2)正四面体的表面积为 $S_1=4\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times a^2=\sqrt{3}a^2$,其内切球半径 r 为正四面体高的$\frac{1}{4}$，即 $r=\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{6}}{12}a$，因此内切球表面积为 $S_2=4\pi r^2=\frac{\pi a^2}{6}$，则$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\sqrt{3}a^2}{\frac{\pi a^2}{6}}=\frac{6\sqrt{3}}{\pi}$.

【答案】　(1)$\frac{3}{2}$　$\frac{3}{2}$　(2)$\frac{6\sqrt{3}}{\pi}$

规律方法

解决与球有关的切、接问题，其通法是作截面，将空间几何问题转化为平面几何问题求解，其解题的思维流程是：

1.

(2020·四川成都一诊)如图，在矩形 ABCD 中，EF∥AD，GH∥BC，BC＝2，AF＝FG＝BG＝1.现分别沿 EF，GH 将矩形折叠使得 AD 与 BC 重合，则折叠后的几何体的外接球的表面积为(　　)

A．24π　　　　B．6π

C.$\frac{16}{3}\pi$　　　　D．$\frac{8}{3}\pi$

解析：选 C.由题意可知，折叠后的几何体是底面为等边三角形的三棱柱，底面等边三角形外接圆的半径为$\frac{2}{3}\times\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.因为三棱柱的高为 BC＝2，所以其外接球的球心与底面外接圆圆心的距离为 1，则三棱柱外接球的半径为 $R=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,所以三棱柱外接球的表面积 $S=4\pi R^2=\frac{16\pi}{3}$.故选 C.

2．(2020·黑龙江哈尔滨师范大学附属中学模拟)在底面是边长为 2 的正方形的四棱锥 P-ABCD 中，点 P 在底面的射影 H 为正方形 ABCD 的中心，异面直线 PB 与 AD 所成角的正切值为 2.若四棱锥 P-ABCD 的内切球半径为 r，外接球的半径为 R，则$\frac{r}{R}$＝(　　)

A.$\frac{2}{3}$　　　　B．$\frac{2}{5}$

C.$\frac{1}{2}$　　　　D．$\frac{1}{3}$

解析：

选 B.如图，取 E，F 分别为 AB，CD 的中点，连接 EF，PE，PF.