第四章

4.3 对数

学习目标

1.理解**对数的概念**和**运算性质**.

2.知道用**换底公式**能将一般对数转化成自然对数或常用对数.

3.了解对数在简化运算中的作用.

核心素养：数学运算、数学建模

新知学习

1 对数的概念

①**对数的定义**：在4.2.1的问题1中，通过指数运算，我们能从$y=1.11^t$中算出经过t年后B景区的人数是2011年的y倍.反之，如果想知道多少年后游客人次是2001年的2倍、3倍、…该怎么做？

上述问题就是从 $1.11^t=2$， $1.11^t=3,\ldots$ 中分别求出t，即已知底数和幂的值，求指数.

一般地，如果 $a^x=N(a>0且a\neq1)$，那么 x 叫做以 a 为底 N 的**对数**.

记作 $x=log_a N$ ，其中 a 叫做对数的**底数**，N叫做**真数**.

例如，因为$4^2=16$，那么2就是以4为底16的对数，记作$log_4 16=2$,因为$3^4=81$，所以4就是以3为底81的对数，记作$log_3 81=4$

log和“+”“-”“×”“÷”“$\sqrt{x}$”一样，表示一种运算,叫做对数运算.不同的是对数运算的符号写在前面.

1 对数的概念

【问题】为什么规定 $(a>0$且$a\neq1)$？

【1】如果$a<0$，则会出现N为某些数值时，$\log_a N$不存在的情况，比如，假设$\log_{-4}2$存在，设$\log_{-4}2=x$，则$(-4)^x=2$，无解.

【2】如果 $a=0$，且 $N\neq0$，则 $\log_a N$ 不存在；若 $a=0$，且 $N=0$，则 $\log_a N$ 有无数个值，不能确定.为此，规定 $a\neq0$且 $N\neq0$.

【3】如果 $a=1$，且 $N\neq1$，则 $\log_a N$ 不存在；若 $a=1$，且 $N=1$，则 $\log_1 1$ 有无数个值，不能确定.为了避免$\log_a N$不存在或者不唯一确定的情况，规定$(a>0$且$a\neq1)$.

1 对数的概念

②两种特殊对数

通常，我们把以10为底的对数叫做常用对数，并且赋予它特殊的数学符号，

即：

$$\log_{10}N = \lg N$$

另外，在科技、经济、社会中经常使用以无理数e=2.71828…为底数的对数，以e为底的对数叫做自然对数，也有它特殊的符号，即　　　　　　.

$$\log_{e}N = \ln N$$

2 对数的基本性质和与指数的关系

·

【1】 根据对数的定义，可以得到对数和指数的关系：

当 $(a>0$且$a\neq 1)$ 时，$a^x=N \Leftrightarrow x=\log_a N$

【2】 对数的基本性质：

① **负数和0没有对数；** ② $\log_a 1=0$，$\log_a a=1$.

证明：（1）由$\log_a N=x$，得$N=a^x$，当$a>0$且$a\neq 1$时，$a^x>0$，∴ $N>0$，

∴ 负数和0没有对数.

（2）设$\log_a 1=x$（$a>0$且$a\neq 1$），则$a^x=a^0$，

∴ $x=0$，即$\log_a 1=0$.

设$\log_a a=x$，则$a^x=a$，∴ $x=1$，即$\log_a a=1$.

即时巩固

【1】把下列指数式化为对数式，对数式化为指数式.

（1）$5^4=625$；（2）$2^{-6}=$ ；（3） $=5.73$；

（4） $16=-4$；（5）$\lg 0.01=-2$；（6）$\ln 10=2.303$.

【解】（1）$\log_5 625=4$；（2） $=-6$；（3） $5.73=m$；

（4）$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=16$；（5）$10^{-2}=0.01$；（6）$e^{2.303}=10$.

2 对数的基本性质和与指数的关系

【规律总结】

（1）指数式和对数式的关系

指数式 $a^x=N$和对数式

$\log_a N=x$（$a>0$，且$a\neq 1$，$N>0$）是同一种数量关系的两种不同表达形式.（如下表）

表达形式	a	x	N	对应的运算
$a^x=N$	底数	指数	幂	乘方，由a，x求N
$\log_a N=x$	底数	对数	真数	对数，由a，N求x

（2）对数恒等式

$a^{\log_a N}=N$（$a>0$且$a\neq 1$）.

即时巩固

【1】求下列各式的值.

（1）$\log_{64}x=-\frac{2}{3}$；（2）$\log_x 8=6$；（3）$\lg 100=x$；（4）$-\ln e^2=x$.

【解】（1）$x=64^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{64^2}}=\frac{1}{4}$

（2）$x=\sqrt[6]{8}=8^{\frac{1}{6}}=\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

（3）因为$10^x=100=10^2$,所以$x=2$

（4）因为$-\ln e^2=x$，所以$\ln e^2=-x$，$e^2=e^{-x}$，于是$x=-2$.

3 对数的运算

【探究】设 $M=a^m, N=a^n$，因为 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$，所以 $MN=a^{m+n}$

根据对数和指数之间的关系可得：

$\log_a M = m$，$\log_a N = n$，$\log_a(MN) = m+n$.

这样，我们就得到了对数的一个运算性质：

前提

$a>0,$
$a\neq 1,$
$M>0,$
$N>0.$

$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$

同样的，还有：

$\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

$\log_a M^n = n\log_a M\ (n\in \mathrm{R})$

3 对数的运算

【对数运算性质的理解】

【1】逆向应用对数运算性质，可以将几个对数式化为一个对数式，有利于化简.

【2】对于每一条运算性质，都要注意只有当式子中所有的对数都有意义时，等式才成立.如$\log_2[(-2)\times(-3)]$是存在的，但$\log_2(-2)$与$\log_2(-3)$均不存在，不能写成$\log_2[(-2)\times(-3)]=\log_2(-2)+\log_2(-3)$.

【3】对数的运算性质(1)可以推广到若干个正因数积的对数，即以下式子成立：

$$\log_a(M_1\cdot M_2\cdot M_3\cdot\ldots\cdot M_k)=\log_aM_1+\log_aM_2+\log_aM_3+\ldots+\log_aM_k,$$

$a>0$且$a\neq1$，$M_k>0,k\in\mathbf{N}^*$.

3 对数的运算

【对数运算性质的推广】

（1）$\log_a \sqrt[n]{m}=\frac{1}{n}\log_a m$（$m>0$，$n\in N^*$，$n>1$，$a>0$且$a\neq1$）；

（2）$\log_a \frac{1}{m}=-\log_a m$（$m>0$，$a>0$且$a\neq1$）；

（3）$\log_a \sqrt[p]{m^n}=\frac{n}{p}\log_a m$（$m>0$，$n$，$p\in N^*$，$a>0$且$a\neq1$）.