

2024 年高考预测密卷一卷

数学（新高考）

【满分：150 分】

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并收回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $P = \{x \mid |x+1| < 2\}$ ， $Q = \{x \mid x^2 - (a+1)x + a < 0\}$ 。若 $P \cup Q = P$ ，则实数 a 的取值范围是（ ）

- A. $(-3, 1)$ B. $[-3, 1]$ C. $(1, 3]$ D. $(-\infty, 1)$

2. 设 z_1, z_2 是复数，则下列命题中是假命题的是（ ）

- A. 若 $z = z_1 \cdot z_2$ ，则 $|z| = |z_1| \cdot |z_2|$ B. 若 $z = z_1 \cdot z_2$ ，则 $\bar{z} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
C. 若 $|z_1| = |z_2|$ ，则 $z_1^2 = z_2^2$ D. 若 $|z_1| = |z_2|$ ，则 $z_1 \cdot \bar{z}_1 = z_2 \cdot \bar{z}_2$

3. 已知 l, m 是两条不同的直线， α, β 是两个不同的平面，给出下列命题：

- ①若 $l \perp m$ ， $l \parallel \alpha$ ，则 $m \perp \alpha$ ；
②若 $l \perp m$ ， $m \perp \alpha$ ，则 $l \parallel \alpha$ ；
③若 $l \perp \alpha$ ， $m \perp \beta$ ， $l \parallel m$ ，则 $\alpha \parallel \beta$ ；
④若 $l \perp \alpha$ ， $l \parallel \beta$ ，则 $\alpha \perp \beta$ 。其中正确命题的序号是（ ）

- A. ①③ B. ②③ C. ②④ D. ③④

4. 从甲、乙、丙、丁 4 人中任选两人安排在“五·一”劳动节假期的前四天中值班，要求每人值班两天，则不同的安排方法有（ ）

- A. 24 种 B. 36 种 C. 48 种 D. 72 种

5. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$ ， $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ，均满足 $f(a+b) = f(a) + f(b) - ab$ 。若 $f(-1) = 3$ ，则

$f(3) =$ （ ）

- A. 0 B. -9 C. -12 D. -15

6. 函数 $f(x) = (1 + 2\sin x)(1 - 2\cos x)$ 的最小值为 ()

- A. -2 B. $-\frac{3}{2}$ C. $-\frac{5}{4}$ D. -1

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ x+2, & x < 0 \end{cases}$, 若 $a < b$, 且 $f(a) = f(b)$, 则 $b-a$ 的取值范围是 ()

- A. $(\ln 2, 1]$ B. $(\ln 2, 1)$ C. $\left(\frac{1}{2}\ln 2, 1\right]$ D. $[1, 2)$

8. 已知 $f(x) = 3 - x^2 - 2\cos x$, 设 $a = 2^{-0.5}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $c = \log_{\frac{1}{3}} 2$, 则 $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ 的大小关系为 ()

- A. $f(c) > f(a) > f(b)$ B. $f(b) > f(a) > f(c)$
C. $f(b) > f(c) > f(a)$ D. $f(c) > f(b) > f(a)$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 给定一组数：0, x_2 , x_3 , $\dots$, x_9 , 30, 且 x_2 , x_3 , $\dots$, x_9 的平均数和方差分别为 10, 1, 则下列说法正确的是 ()

- A. $2x_2 + 1$, $2x_3 + 1$, $\dots$, $2x_9 + 1$ 的平均数为 21
B. $2x_2 + 1$, $2x_3 + 1$, $\dots$, $2x_9 + 1$ 的方差为 5
C. 0, x_2 , x_3 , $\dots$, x_9 , 30 的平均数为 11
D. 0, x_2 , x_3 , $\dots$, x_9 , 30 的方差为 49.8

10. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , e 是自然对数的底数, 则下列说法正确的是 ()

A. 当 $m \in N^*$ 时, S_m , S_{2m} , S_{3m} 是等差数列

B. 数列 $\{e^{a_n}\}$ 是等比数列

C. 数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列

D. 当 p, q 均为正整数且 $p \neq q$ 时, $\frac{S_{p+q}}{p+q} = \frac{S_p - S_q}{p - q}$

11. 古希腊哲学家发现并证明了只存在 5 种正多面体，即正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体，其中正八面体是由 8 个等边三角形构成. 正八面体在计算机科学中用于三维模型和场景的构建，以及人工智能领域中用于图象识别和处理，另外在晶体和材料科学中也被广泛应用. 现有一个棱长为 2 的正八面体 $PABCDQ$ ，如图所示，下列说法中正确的是（ ）



- A. 若点 P, A, B, C, D, Q 在同一个球的球面上，则该球的体积为 $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$
- B. 若该正八面体的 12 条棱中点在同一个球的球面上，则该球的表面积为 4π
- C. 该正八面体内任意一点到 8 个侧面的距离之和为定值
- D. 已知正方体 $GHMN-G_1H_1M_1N_1$ 的中心与该正八面体的中心重合，当该正方体绕中心任意转动时，若该正方体始终未超出该正八面体，则该正方体棱长的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

12. $C: y^2 = 4x$ 已知抛物线的焦点为 F ，动直线 l 与抛物线 C 交于 A, B 两点，分别过 A, B 向直线 $l_0: x = -1$ 引垂线，垂足分别为 A_1, B_1 ，点 M 在 l_0 上，且 $MA \perp MB$ ，设 O 为坐标原点，则下列说法中正确的是（ ）

- A. M 为线段 A_1B_1 的中点
- B. $|MF|$ 是 $|AF|$ 与 $|BF|$ 的等比中项
- C. A, O, B 三点共线
- D. MA 与抛物线 C 有两个公共点

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 $(2-x)(x+1)^n$ 的展开式中所有项的系数和为 1024，则含 x^4 项的系数为_____。（用数字作答）

14. 已知单位向量 $\vec{a}$ ，向量 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 不共线，且 $\left\langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{b} \right\rangle = \frac{5\pi}{5}$ ，则 $|\vec{b}|$ 的最大值为_____.

15. 已知直线 $l: y = k$ 是曲线 $f(x) = e^{x+1}$ 和 $g(x) = \ln x + a$ 的公切线，则实数 $a =$ _____.

16. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，过点 F_2 的直线 l 与椭圆 C 交于 P, Q 两点. 若 $|F_1F_2| = |PF_1|$ ，且 $2\overrightarrow{PF_2} = 3\overrightarrow{F_2Q}$ ，则 C 的离心率为_____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $a^2 = c(c+b)$.

(1) 求证： $B + 3C = \pi$;

(2) 若 $\angle ABC$ 的角平分线交 AC 于点 D ，且 $a = 12, b = 7$ ，求 BD 的长.

18. (12 分) 设正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $\sqrt{S_n+1} = \frac{a_n+1}{2}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

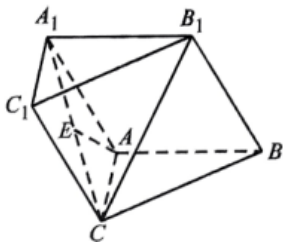
(2) 设 $b_n = \frac{a_n^2}{S_n - n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12 分) 甲、乙两人一起玩纸牌游戏, 游戏开始时, 甲、乙两人手中都各有大、小王两张牌, 游戏规则是: 甲、乙两人分别给对方随机发一张牌 (两人均不知自己所发为何牌), 记为一次换牌操作, 操作 $k(k \in N^*)$ 次后, 谁手中的大王牌数多则为赢家. 若大王牌数相同则为和牌, 和牌的概率为 P_k . 设每次甲发牌与乙发牌之间相互独立, 操作 k 次后, 甲手中的大王牌数为 ξ_k .

(1) 求 ξ_1 的数学期望;

(2) 求 P_6 .

20. (12 分) 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 已知侧面 ABB_1A_1 为菱形, 底面 ABC 为正三角形, E 为线段 A_1C 的中点, $B_1C \perp AB$.



(1) 求证: $B_1C \perp AE$;

(2) 若平面 $ABC \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 求平面 ACC_1A_1 与平面 BCC_1B_1 所成角的余弦值.

A1

21. (12 分) 已知圆 $F_1: (x + \sqrt{7})^2 + y^2 = 1$, 圆 $F_2: (x - \sqrt{7})^2 + y^2 = 25$. 若动圆 S 与圆 F_1 、圆 F_2 都内切, 记动圆 S 的圆心的轨迹为 C .

(1) 求轨迹 C 的方程;

(2) 已知 $A(2, 0)$, 过点 $B(2, 1)$ 的直线 l 与 C 交于 P, Q 两点, 直线 AP, AQ 分别交直线 $x = 4$ 于 M, N , 设线段 MN 的中点为 G , 判断点 G 是否在轨迹 C 上, 并说明理由.

22. (12 分) 已知函数 $f(x) = \ln x - \ln(x-1) - \frac{1}{x}$.

(1) 求 $f(x)$ 的值域;

(2) 求证: 当 $n \in N^*$ 时, $\sum_{i=1}^n \sin \frac{1}{n+i} < \ln 2$.

2024 年高考数学预测密卷一卷 · 新高考

参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	C	D	B	D	B	A	C	ACD	BCD	ABC	ABC

一、选择题

1. B 【解析】 $P = \{x | |x+1| < 2\} = \{x | -3 < x < 1\}$,

$Q = \{x | (x-1)(x-a) < 0\}$, 因为 $P \cup Q = P$, 所以 $Q \subseteq P$,

所以 $a > 1$ 不合题意, 所以 $Q = \{x | a < x < 1\}$, 所以 $-3 \leq a \leq 1$,

即实数 a 的取值范围是 $[-3, 1]$. 故选 B.

2. C 【解析】 设 $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$.

对于 A, $|z| = |z_1 z_2| = |(a+bi)(c+di)| = \sqrt{(ac-bd)^2 + (bc+ad)^2} = \sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 + (bc)^2 + (ad)^2}$,

$|z_1| \cdot |z_2| = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 + (bc)^2 + (ad)^2}$,

所以 $|z| = |z_1| \cdot |z_2|$, 故 A 正确;

对于 B, $z = (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (bc+ad)i$, $\bar{z} = (ac-bd) - (bc+ad)i$,

$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (a-bi)(c-di) = (ac-bd) - (bc+ad)i$,

所以 $\bar{z} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, 故 B 正确;

对于 C, $|z_1| = |a+bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $|z_2| = |c+di| = \sqrt{c^2 + d^2}$,

由 $|z_1| = |z_2|$, 得 $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

因为 $z_1^2 = a^2 - b^2 + 2abi$, $z_2^2 = c^2 - d^2 + 2cdi$,

所以 $z_1^2 = z_2^2$ 不一定成立, 如 $z_1 = 1$, $z_2 = i$,

此时 $|z_1| = |z_2|$, 而 $z_1^2 = 1$, $z_2^2 = -1$, 即 $z_1^2 \neq z_2^2$, 故 C 错误;

对于 D, 由 $|z_1| = |z_2|$, 得 $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, $z_1 \cdot \bar{z}_1 = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$,

$z_2 \cdot \bar{z}_2 = (c+di)(c-di) = c^2 + d^2$, 所以 $z_1 \cdot \bar{z}_1 = z_2 \cdot \bar{z}_2$, 故 D 正确. 故选 C.

3. D 【解析】对于①, m 与 α 还可能平行、在平面内, 或相交而不垂直, 故①错误;

对于②, l 还可能在平面 α 内, 故②错误;

对于③, 由 $l \perp \alpha$, $l \parallel m$, 知 $m \perp \alpha$, 又 $m \perp \beta$, 所以 $\alpha \parallel \beta$, 故③正确;

对于④, 过 l 作一平面与 β 相交, 设交线为 l' , 则 $l' \perp \alpha$,

又 $l' \subset \beta$, 所以 $\alpha \perp \beta$, 故④正确. 故选 D.

4. B 【解析】法一: 先将值班的四天分为两组, 每组两天, 有 $\frac{C_4^2}{A_2^2} = 3$ 种方法,

再安排两人到每组中, 每组安排同一人, 有 $A_4^2 = 12$ 种方法,

故不同的安排方法有 $3 \times 12 = 36$ 种. 故选 B.

法二: 从 4 人中选出 2 人值班有 $C_4^2 = 6$ 种方法, 选出的两人其中一人从 4 天中选两天值班,

剩下两天由另一人值班即可, 有 $C_4^2 = 6$ 种方法, 故不同的安排方法共有 $6 \times 6 = 36$ 种. 故选 B.

5. D 【解析】令 $a = b = 0$, 得 $f(0) = 2f(0)$, 所以 $f(0) = 0$;

令 $a = 1$, $b = -1$, 得 $f(0) = f(1) + f(-1) + 1 = 0$,

又 $f(-1) = 3$, 所以 $f(1) = -4$; 令 $a = b = 1$, 得 $f(2) = f(1) + f(1) - 1 = -9$;

令 $a = 1$, $b = 2$, 得 $f(3) = f(1) + f(2) - 2 = -15$. 故选 D.

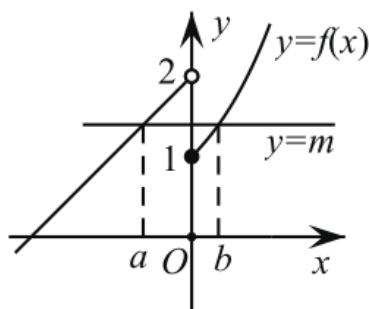
6. B 【解析】 $f(x) = (1 + 2\sin x)(1 - 2\cos x) = 1 + 2(\sin x - \cos x) - 4\sin x \cos x$,

令 $\sin x - \cos x = t$, 即 $t = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, 所以 $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$,

由 $(\sin x - \cos x)^2 = t^2$, 得 $2\sin x \cos x = 1 - t^2$, 从而原函数化为 $y = 2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$,

当 $t = -\frac{1}{2}$ 时, $y_{\min} = [f(x)]_{\min} = -\frac{3}{2}$. 故选 B.

7. A 【解析】设 $f(a) = f(b) = m$, 如图所示:



由 $f(x)$ 的图象知, $1 \leq m < 2$, 则 $e^b = m = a + 2$, 从而 $a = m - 2$, $b = \ln m$,

所以 $b - a = \ln m - m + 2$.

令 $g(x) = \ln x - x + 2$, $1 \leq x < 2$, 则 $g'(x) = \frac{1-x}{x}$,

当 $1 \leq x < 2$ 时, $g'(x) \leq 0$, 当且仅当 $x = 1$ 时, $g'(x) = 0$,

所以 $g(x)$ 在 $[1, 2)$ 上为减函数, 所以 $g(2) < g(x) \leq g(1)$,

得 $\ln 2 < g(x) \leq 1$, 即 $b - a$ 的取值范围是 $(\ln 2, 1]$. 故选 A.

8. C 【解析】当 $x \in \mathbb{R}$ 时, 由 $f(x)$ 得 $f(-x) = 3 - (-x)^2 - 2\cos(-x) = f(x)$,

所以 $f(x)$ 为偶函数. 又 $f'(x) = 2(\sin x - x)$, 当 $x \geq 0$ 时,

令 $g(x) = 2(\sin x - x)$, 则 $g'(x) = 2(\cos x - 1) \leq 0$,

所以 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $g(x) \leq g(0) = 0$,

即 $f'(x) \leq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减.

$a = 2^{-0.5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{|c|} = \log_2 3 > \log_2 2\sqrt{2} = \frac{3}{2} > \sqrt{2} = \frac{1}{a}$,

所以 $|c| < a \cdot \frac{1}{|c|} - \frac{1}{b} = \log_2 3 - \sqrt{3} = 2\log_2 \sqrt{3} - \sqrt{3}$, 令 $h(x) = 2\log_2 x - x$,

$x \in [\sqrt{3}, 2]$, 则 $h'(x) = \frac{2 - x \ln 2}{x \ln 2}$, 因为 $\sqrt{3} < 2 < \frac{2}{\ln 2}$,

所以 $h(x)$ 在 $[\sqrt{3}, 2]$ 上单调递增, 所以 $h(\sqrt{3}) < h(2)$,

即 $2\log_2 \sqrt{3} - \sqrt{3} < 2\log_2 2 - 2 = 0$, 所以 $\frac{1}{|c|} < \frac{1}{b}$, 得 $|c| > b$.

故 $b < |c| < a$, 从而 $f(b) > f(|c|) > f(a)$, 即 $f(b) > f(c) > f(a)$, 故选 C.

二、选择题

9. ACD 【解析】对于 A, 由题意得 $\frac{x_2 + x_3 + \text{L} + x_9}{8} = 10$,

所以 $\frac{(2x_2 + 1) + (2x_3 + 1) + \text{L} + (2x_9 + 1)}{8} = \frac{2(x_2 + x_3 + \text{L} + x_9) + 8}{8} = 20 + 1 = 21$, 故 A 正确;

对于 B, 由题意得 $\frac{(x_2 - 10)^2 + (x_3 - 10)^2 + \text{L} + (x_9 - 10)^2}{8} = 1$,

$$\text{所以 } \frac{(2x_2+1-21)^2 + (2x_3+1-21)^2 + \dots + (2x_9+1-21)^2}{8}$$

$$= \frac{2^2[(x_2-10)^2 + (x_3-10)^2 + \dots + (x_9-10)^2]}{8} = 4 \times 1 = 4, \text{ 故 B 错误;}$$

$$\text{对于 C, } \bar{x} = \frac{0+x_2+x_3+\dots+x_9+30}{10} = \frac{30+10 \times 8}{10} = 11. \text{ 故 C 正确;}$$

$$\text{对于 D, 将 0 和 30 作为一组, 其平均数和方差分别为 } \bar{x}_1 = \frac{0+30}{2} = 15,$$

$$s_1^2 = \frac{(0-15)^2 + (30-15)^2}{2} = 225, \text{ 将中间 8 个数作为另一组,}$$

$$\text{其平均数和方差分别为 } \bar{x}_2 = 10, s_2^2 = 1, \text{ 由 C 知 } \bar{x} = 11,$$

$$s^2 = \frac{m}{m+n}[(\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + s_1^2] + \frac{n}{m+n}[(\bar{x}_2 - \bar{x})^2 + s_2^2]$$

$$= \frac{1}{5} \times [(15-11)^2 + 225] + \frac{4}{5} \times [(10-11)^2 + 1] = 49.8, \text{ 故 D 正确. 故选 ACD.}$$

$$10. \text{ BCD } \quad \text{【解析】对于 A, 令 } m=1, \text{ 则 } S_2 - S_1 = a_2, S_3 - S_2 = a_3,$$

$$\text{当 } d \neq 0 \text{ 时, } a_2 \neq a_3, \text{ 即 } S_2 - S_1 \neq S_3 - S_2,$$

$$\text{所以 } S_1, S_2, S_3 \text{ 不是等差数列, 故 A 错误;}$$

$$\text{对于 B, 设 } \{a_n\} \text{ 的公差为 } d, \text{ 则 } \frac{e^{a_{n+1}}}{e^{a_n}} = e^{a_{n+1}-a_n} = e^d \text{ (定值),}$$

$$\text{所以 } \{e^{a_n}\} \text{ 是公比为 } e^d \text{ 的等比数列, 故 B 正确;}$$

$$\text{对于 C, } \frac{S_n}{n} = \frac{na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d}{n} = \frac{d}{2}n + a_1 - \frac{d}{2}, \text{ 故 } \left\{\frac{S_n}{n}\right\} \text{ 是公差为 } \frac{d}{2} \text{ 的等差数列, 故 C 正确;}$$

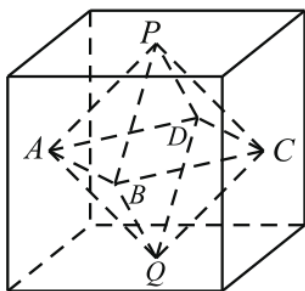
$$\text{对于 D, } \frac{S_{p+q}}{p+q} = \frac{(p+q)a_1 + \frac{(p+q)(p+q-1)}{2}d}{p+q} = \frac{d}{2}(p+q)$$

$$+ a_1 - \frac{d}{2} \cdot \frac{S_p - S_q}{p-q} = \frac{\left[pa_1 + \frac{p(p-1)}{2}d\right] - \left[qa_1 + \frac{q(q-1)}{2}d\right]}{p-q}$$

$$= \frac{(p-q)a_1 + \frac{d}{2}[(p^2 - q^2) - (p-q)]}{p-q} = a_1 + \frac{d}{2}(p+q-1) = \frac{d}{2}(p+q) + a_1 - \frac{d}{2}.$$

所以 $\frac{S_{p+q}}{p+q} = \frac{S_p - S_q}{p-q}$, 故 D 正确. 故选 BCD.

11. ABC 【解析】由题可知, 依次连接正方体 6 个面的中心, 得到正八面体 $PABCDQ$, 如图所示.



对于 A, 点 P, A, B, C, D, Q 在图中正方体内切球的球面上,

设该球的半径为 R_1 , 因为 $AB = 2$, 所以 $BD = 2\sqrt{2} = 2R_1$, 得 $R_1 = \sqrt{2}$,

则所求球的体积为 $\frac{4}{3}\pi R_1^3 = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{2})^3 = \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$, 故 A 正确;

对于 B, 由上图知, 正八面体 12 条棱的中点在同一球的球面上,

即该球与 12 条棱相切于棱的中点, 该球的直径为 $2R_2 = AB = 2$,

即 $R_2 = 1$, 故该球表面积为 4π , 故 B 正确;

对于 C, 正八面体体积为 $2V_{P-ABCD} = 2 \times \frac{1}{3} \times 2^2 \times \sqrt{2} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$,

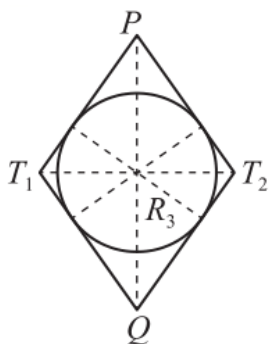
设正八面体内任意一点到 8 个侧面的距离分别为 $h_1, h_2, \dots, h_8$, 由体积相等,

得 $\frac{8\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABP}(h_1 + h_2 + \dots + h_8)$, 解得 $h_1 + h_2 + \dots + h_8 = \frac{8\sqrt{6}}{3}$ (定值), 故 C 正确;

对于 D, 由题意知, 该正方体 $GHMN - G_1H_1M_1N_1$ 棱长最大时,

其外接球即为正八面体的内切球, 设该球半径为 R_3 ,

取 AB 的中点 T_1 , CD 中点 T_2 , 该平面 PT, OT , 截该球所得截面圆的半径为 R_3 , 如图所示.



显然四边形 PT_1QT_2 ，是边长为 $\sqrt{3}$ 的菱形，且 $T_1T_2 = 2$ ，

$PQ = 2\sqrt{2}$ ，由面积相等，得 $4 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3}R_3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2}$ ，

得 $R_3 = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 。设该球的内接正方体棱长为 a ，则 $\sqrt{3}a = 2R_3$ ，

得 $a = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，故 D 错误。故选 ABC。

12. ABC 【解析】设直线 $l: x = my + a$ ，点 $M(-1, y_0)$ ，

$A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，由 $\begin{cases} y^2 = 4x, \\ x = my + a, \end{cases}$ 得 $y^2 - 4my - 4a = 0$ ，

则 $\begin{cases} y_1 + y_2 = 4m, \\ y_1 y_2 = -4a, \end{cases}$ 所以 $x_1 + x_2 = m(y_1 + y_2) + 2a = 4m^2 + 2a$ ， $x_1 x_2 = \frac{y_1^2}{4} \cdot \frac{y_2^2}{4} = \frac{(-4a)^2}{16} = a^2$ 。

由 $MA \perp MB$ ，得 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ ，则 $(x_1 + 1)(x_2 + 1) + (y_1 - y_0)(y_2 - y_0) = 0$ ，

化为 $x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 + y_1 y_2 - y_0(y_1 + y_2) + y_0^2 = 0$ ，

所以 $a^2 + 4m^2 + 2a + 1 - 4a - y_0 \cdot 4m + y_0^2 = (a - 1)^2 + (y_0 - 2m)^2 = 0$ ，

所以 $y_0 = 2m$ ， $a = 1$ ，故 $l: x = my + 1$ ，易知直线 l 过焦点 $F(1, 0)$ 。

对于 A，设弦 AB 的中点为 $N(x_N, y_N)$ ，因为 $y_N = \frac{y_1 + y_2}{2} = 2m = y_0$ ，

所以 $MN \parallel AA_1$ ，故 M 为 A_1B_1 的中点。故 A 正确；

对于 B，直线 MF 的斜率 $k_{MF} = \frac{y_0}{-1 - 1} = -m$ ，

所以 $k_{MF} \cdot k_{AB} = -m \cdot \frac{1}{m} = -1$ ，

所以 $MF \perp AB$ ，由 $\triangle MBF \sim \triangle AMF$ ，

得 $\frac{|MF|}{|BF|} = \frac{|AF|}{|MF|}$ ，即 $|MF|^2 = |AF| \cdot |BF|$ ，

所以 $|MF|$ 是 $|AF|$ 与 $|BF|$ 的等比中项，故 B 正确；

对于 C，直线 OA 的斜率为 $k_{OA} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_1}{\frac{y_1}{4}} = \frac{4}{y_1} = \frac{4}{-4} = \frac{y_2}{-1} = k_{OB_1}$ ，

故 A, O, B 三点共线。故 C 正确；

对于 D，过 M 作 C 的两条切线，切点分别为 $A'(x'_1, y'_1)$ ， $B'(x'_2, y'_2)$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/805230342221011214>