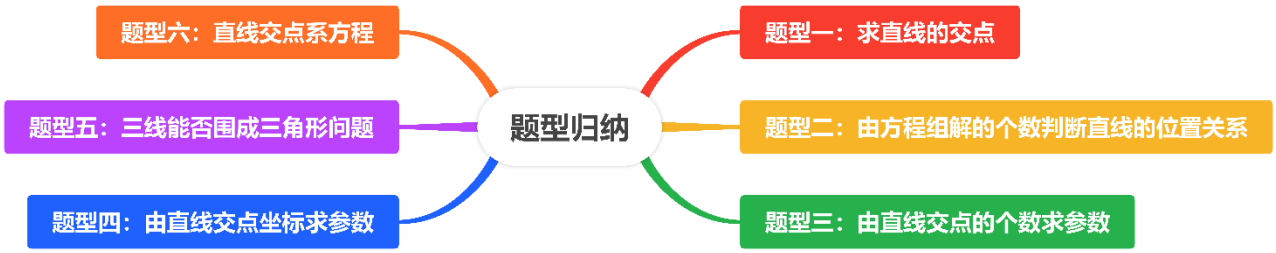
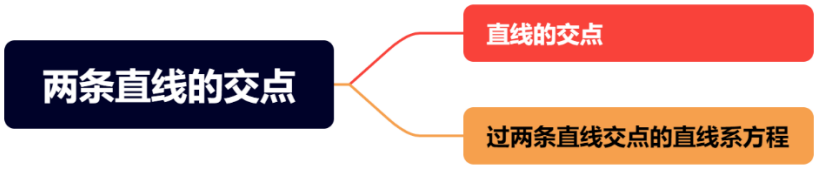
1．4 两条直线的交点

01 学习目标

课程标准	学习目标
（1）能用自己的语言解释两条直线的交点坐标与两条直线的方程之间的关系， （2）能用解方程组的方法求两条直线的交点坐标，能根据方程组解的个数判断两条直线的位置关系.	（1）会用解方程组的方法求两条相交直线的交点坐标. （2）会根据方程解的个数判定两条直线的位置关系.

02 思维导图





03 知识清单

知识点 01　直线的交点

求两直线 $A_1x+B_1y+C_1=0(A_1B_1C_1\neq 0)$ 与 $A_2x+B_2y+C_2=0(A_2B_2C_2\neq 0)$ 的交点坐标，只需求两直线方程联立所得方程组 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$ 的解即可．若有 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$，则方程组有无穷多个解，此时两直线重合；若有 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$，则方程组无解，此时两直线平行；若有 $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$，则方程组有唯一解，此时两直线相交，此解即两直线交点的坐标.

知识点诠释：

求两直线的交点坐标实际上就是解方程组，看方程组解的个数.

【即学即练 1】（2024·高二·天津·期中）两直线$l_1:3x+4y-5=0,l_2:2x-3y+8=0$的交点$M$坐标是：_____.

【答案】$(-1,2)$

【解析】联立两直线方程$\begin{cases}3x+4y-5=0\\2x-3y+8=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$可得$M(-1,2)$.

故答案为：$(-1,2)$

知识点 02　过两条直线交点的直线系方程

一般地，具有某种共同属性的一类直线的集合称为直线系，它的方程叫做直线系方程，直线系方程中除含有x,y以外，还有根据具体条件取不同值的变量，称为参变量，简称参数．由于参数取法不同，从而得到不同的直线系.

过两直线的交点的直线系方程：经过两直线$l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$交点的直线方程为$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$，其中$\lambda$是待定系数．在这个方程中，无论$\lambda$取什么实数，都得不到$A_2x+B_2y+C_2=0$，因此它不能表示直线$l_2$.

【即学即练 2】（2024·高二·全国·专题练习）求过两条直线$y=2x+3$与$3x-y+2=0$的交点，且分别满足下列条件的直线方程：

(1)斜率为$-\frac{1}{2}$；

(2)过点$P(2,3)$；

(3)平行于直线$3x+y=1$.

【解析】（1）法一:直线$y=2x+3$与$3x-y+2=0$的交点为$(1,5)$，

当斜率为$-\frac{1}{2}$时，由直线的点斜式方程得：直线方程为$y-5=-\frac{1}{2}(x-1)$.

直线方程为$x+2y-11=0$.

法二:由题意，直线$3x-y+2=0$不符合题意，

所以由直线系方程可设所求直线为$2x+3-y+\lambda(3x-y+2)=0$

$2x+3-y+\lambda(3x-y+2)=0\Rightarrow(2+3\lambda)x-(\lambda+1)y+2\lambda+3=0$，

当直线的斜率为$-\frac{1}{2}$时，$\frac{2+3\lambda}{\lambda+1}=-\frac{1}{2}$，解得$\lambda=-\frac{5}{7}$，

故所求直线方程为$x+2y-11=0$；

（2）法一：过点$P(2,3)$时，由两点式得：$y-5=\frac{3-5}{2-1}(x-1)$即为$y=-2x+7$.

直线方程为$2x+y-7=0$.

法二：由题意，直线$3x-y+2=0$不符合题意，

过点$P(2,3)$时，代入（1）中直线系方程得$4+5\lambda=0\Rightarrow\lambda=-\frac{4}{5}$，

故所求直线方程为$2x+y-7=0$.

（3）法一：平行于直线$3x+y=1$时，得直线斜率为$k=-3$，直线方程为$y-5=-3(x-1)$，

直线方程为$3x+y-8=0$.

法二：由题意，直线$3x-y+2=0$不符合题意，

平行于直线$3x+y=1$时，由（1）中直线系方程$\frac{2+3\lambda}{\lambda+1}=-3$，解得$\lambda=-\frac{5}{6}$，

故所求直线方程为$3x+y-8=0$.

04 题型精讲

题型一：求直线的交点

【典例 1-1】（2024·高二·上海·阶段练习）两直线$x+y-7=0$和$3x-y-1=0$的交点为_____.

【答案】$(2,5)$

【解析】由题意可得$\begin{cases}x+y-7=0\\3x-y-1=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=2\\y=5\end{cases}$，

交点坐标为$(2,5)$.

故答案为：$(2,5)$

【典例 1-2】（2024·高二·全国·课后作业）已知直线$l_1:x-2y-4=0$和$l_2:x+3y+6=0$，则直线l_1和l_2的交点为__.

【答案】$(0,-2)$

【解析】联立$\begin{cases}x-2y-4=0\\x+3y+6=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=0\\y=-2\end{cases}$.

$\therefore$直线l_1和l_2的交点为$(0,-2)$.

故答案为：$(0,-2)$

【方法技巧与总结】

判断两直线的位置关系，关键是看两直线的方程组成的方程组的解的情况.

（1）解方程组的重要思想就是消元，先消去一个变量，代入另外一个方程能解出另一个变量的值.

（2）解题过程中注意对其中参数进行分类讨论.

（3）最后把方程组解的情况还原为直线的位置关系.

【变式 1-1】（2024·高二·北京房山·期末）已知直线$l_1:3x-y+1=0$, $l_2:x+y-5=0$, $l_3:x-ay-3=0$，则l_1与l_2的交点坐标为_____；若直线l_1,l_2,l_3不能围成三角形，写出一个符合要求的实数a的值_____.

【答案】 $(1,4)$ 答案不唯一（只需写出$-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3}$中的一个即可）

【解析】解方程组$\begin{cases}3x-y+1=0\\x+y-5=0\end{cases}$，得$\begin{cases}x=1\\y=4\end{cases}$，所以$l_1$与$l_2$的交点坐标为$(1,4)$；

由$x-ay-3=0$得，直线l_3恒过定点$(3,0)$；若直线l_1,l_2,l_3不能围成三角形，

只需l_3经过$(1,4)$，或l_1与l_3平行，或l_2与l_3平行.

当l_3经过$(1,4)$时，图 1 所示，$1-4a-3=0$，$\therefore a=-\frac{1}{2}$；

当l_1与l_3平行时，图 2 所示，$-3a=-1$，$a=\frac{1}{3}$；

当l_2与l_3平行时，图 3 所示，$-a=1$，$\therefore a=-1$.

故答案为：$(1,4)$；-1或$-\frac{1}{2}$或$\frac{1}{3}$（只需写出$-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3}$中的一个即可）.

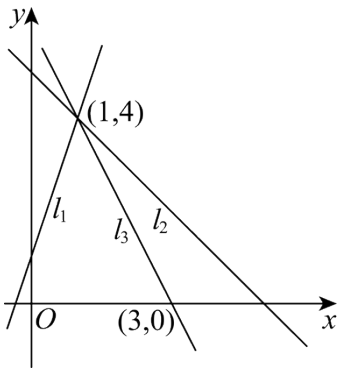


图 1

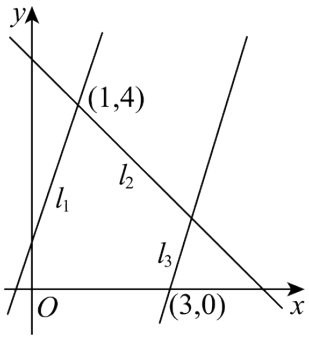


图 2

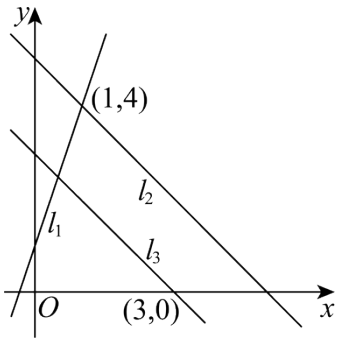


图 3

【变式 1-2】（2024·高二·四川成都·期中）已知直线$l_1:2x-y-3=0$与$l_2:x+4y-6=0$交于点$A(x_0,y_0)$，则$x_0+y_0=$_____.

【答案】3

【解析】由$\begin{cases}2x-y-3=0\\x+4y-6=0\end{cases}$得$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$，所以$x_0=2,y_0=1$，

$x_0+y_0=3$，

故答案为：3.

题型二：由方程组解的个数判断直线的位置关系

【典例 2-1】（2024·高二·湖南·期中）已知$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$是直线$y=kx+2023$（k为常数）上两个不同的点，则关于x和y的方程组$\begin{cases}x_1x+y_1y=1\\x_2x+y_2y=1\end{cases}$的解的情况，下列说法正确的是（　）

A．无论k，P_1，P_2如何，总是无解

B．无论k，P_1，P_2如何，总有唯一解

C．存在k，P_1，P_2，使$\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$是方程组的一组解

D．存在k，P_1，P_2，使之有无穷多解

【答案】B

【解析】直线$y=kx+2023$的斜率存在，

$\therefore x_1\neq x_2$，

由题意$\begin{cases}y_1=kx_1+2023\\y_2=kx_2+2023\end{cases}$，

则$x_1y_2-x_2y_1=x_1(kx_2+2023)-x_2(ky_1+2023)=2023(x_1-x_2)\neq0$，

故l_1：$x_1x+y_1y=1$与l_2：$x_2x+y_2y=1$相交，

∴方程组总有唯一解，A，D 错误，B 正确；

若$\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$是方程组的一组解，则$\begin{cases}x_1+2y_1=1\\x_2+2y_2=1\end{cases}$，

则点$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$在直线$x+2y=1$，即$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$上，

但已知这两个点在直线$y=kx+2023$上，而这两条直线不是同一条直线，

$\therefore\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$不可能是方程组的一组解，C 错误.

故选：B.

【典例 2-2】（2024·高二·全国·单元测试）已知直线$l:f(x,y)=0$，$P(x_0,y_0)$是直线l外一点，那么直线$f(x,y)-f(x_0,y_0)=0$（　）

A．过点P且与直线l斜交

B．过点P且与直线l重合

C．过点P且与直线l平行

D．过点P且与直线l垂直

【答案】C

【解析】$P(x_0,y_0)$在直线外，所以$f(x_0,y_0)\neq 0$，

方程$f(x,y)=0$与$f(x,y)-f(x_0,y_0)=0$两变量的系数完全相同，而$f(x_0,y_0)\neq 0$，即常数项不同，它们的方程组成的方程组无解，所以两直线的位置关系是平行，

又$f(x_0,y_0)-f(x_0,y_0)=0$，所以直线$f(x,y)-f(x_0,y_0)=0$必过点P，所以直线过点P且与直线l平行.

故选：C

【方法技巧与总结】

通过构建并求解包含直线方程系数的方程组，可以根据方程组的解的个数判断直线的位置关系。具体来说，若方程组有唯一解，则两直线相交；若方程组无解，则两直线平行；若方程组有无穷多解，则两直线重合。

【变式 2-1】（2024·高二·全国·专题练习）曲线$y=|x|$与$y=kx+1$的交点的情况是（　）

A．最多有两个交点　　B．两个交点

C．一个交点　　D．无交点

【答案】A

【解析】联立两条直线方程得：$\begin{cases}y=|x|\\y=kx+1\end{cases}$得到$|x|=kx+1$，两边平方得：$k^2-1x^2+2kx+1=0$，当$k^2-1\neq 0$即$k\neq\pm1$时，$\Delta=2k^2-4\left(k^2-1\right)=4>0$，得到方程有两个不相等的实数解，所以曲线与直线有两个交点．当$k=\pm1$时，得到$y=\pm x+1$，与曲线只有一个交点．所以曲线$y=|x|$与$y=kx+1$的最多有两个交点．

故选：A

【变式 2-2】（2024·高三·上海杨浦·阶段练习）若关于x，y的方程组$\begin{cases}x+my-1=0\\2x-4y+n=0\end{cases}(m,n\in\mathrm{R})$有无穷多组解，则$mn$的值为_____

【答案】4

【解析】若方程组$\begin{cases}x+my-1=0\\2x-4y+n=0\end{cases}$有无穷多组解，

即两条直线重合,即$\frac{1}{2}=\frac{m}{-4}=\frac{-1}{n}$

$\therefore m=-2,n=-2$

则$mn=(-2)\times(-2)=4$

故答案为：4

题型三：由直线交点的个数求参数

【典例 3-1】（2024·高二·安徽宿州·阶段练习）若$y=-a|x|$的图象与直线$y=-a+x(a<0)$有两个不同的交点，则a的取值范围是（　）

A．$-1<a<0$　　B．$a<-1$

C．$a<0$　　D．$a=-1$

【答案】B

【解析】当$x\geq 0$时，由$-a|x|=-a+x$可得，$-ax=-a+x$，当$a\neq -1$时，解得$x=\dfrac{a}{a+1}$；

当$x<0$时，由$-a|x|=-a+x$可得，$ax=-a+x$，由$a<0$可知，方程的解是$x=-\dfrac{a}{a-1}$，

又$y=-a|x|$的图象与直线$y=-a+x(a<0)$有两个不同的交点，

所以$\begin{cases}\dfrac{a}{a+1}\geq 0\\ -\dfrac{a}{a-1}<0\end{cases}$，其中$a<0$，解得$a<-1$；

综上所述，$a<-1$.

故选：B

【典例 3-2】（2024·高二·全国·课后作业）若三条直线$2x+y-4=0$，$x-y+1=0$与$ax-y+2=0$共有两个交点，则实数a的值为（　）

A．1　　B．-2　　C．1或-2　　D．-1

【答案】C

【解析】由题意可得三条直线中，有两条直线互相平行，

∵直线$x-y+1=0$和直线$2x+y-4=0$不平行，

∴直线$x-y+1=0$和直线$ax-y+2=0$平行或直线$2x+y-4=0$和直线$ax-y+2=0$平行，

∵直线$x-y+1=0$的斜率为1，直线$2x+y-4=0$的斜率为-2，直线$ax-y+2=0$的斜率为a，

∴$a=1$或$a=-2$.

故选：C.

【方法技巧与总结】

通过联立两直线的方程并构建关于参数的方程组，可以根据直线交点的个数来求解参数。具体来说，若方程组有唯一解，则两直线有一个交点；若方程组无解，则两直线无交点；若方程组有无穷多解，则两直线重合，即无数个交点。由此可求解出对应的参数值。

【变式 3-1】（多选题）（2024·高二·江苏徐州·阶段练习）已知集合$A=\left\{(x,y)\middle|\dfrac{y-3}{x-2}=4\right\}$，集合$B=\{(x,y)|ax-y-1=0\}$，且$A\cap B=\varnothing$，则$a=$（　）

A．-4　　B．4　　C．-2　　D．2

【答案】BD

【解析】由$\dfrac{y-3}{x-2}=4$整理可得$4x-y-5=0(x\neq 2)$.

因为集合$B=\{(x,y)|ax-y-1=0\}$，$A\cap B=\varnothing$.

（1）直线$ax-y-1=0$过点$(2,3)$，则$2a-3-1=0$，解得$a=2$，

此时，直线$4x-y-5=0$与直线$2x-y-1=0$不平行；

（2）若直线$4x-y-5=0$与$ax-y-1=0$平行，则$\begin{cases}-a=-4\\-5a\neq-4\end{cases}$，解得$a=4$.

综上所述，$a=2$或4.

故选：BD.

【变式 3-2】（2024·高二·全国·课后作业）直线$2x+my+1=0$与直线$y=x+1$相交，则m的取值范围为_____.

【答案】$(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$

【解析】因为直线$2x+my+1=0$与直线$y=x+1$，即$x-y+1=0$相交，

所以$m+2\neq0$，解得$m\neq-2$.

所以m的取值范围为$(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$.

故答案为：$(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$

【变式 3-3】（2024·上海奉贤·二模）若关于x，y的方程组$\begin{cases}x+2y=4\\3x+ay=6\end{cases}$有唯一解，则实数$a$满足的条件是_____.

【答案】$a\neq6$/$a-6\neq0$

【解析】由$\begin{cases}x+2y=4\\3x+ay=6\end{cases}$，可得$(a-6)y+6=0$，

由关于x，y的方程组$\begin{cases}x+2y=4\\3x+ay=6\end{cases}$有唯一解，

可得方程$(a-6)y+6=0$有唯一解，则$a\neq6$

故答案为：$a\neq6$

题型四：由直线交点坐标求参数

【典例 4-1】（2024·高二·全国·专题练习）已知直线$x+y-3m=0$和$2x-y+2m-1=0$的交点在第四象限，则m的取值范围为___.

【答案】$\left(-1,\frac{1}{8}\right)$

【解析】联立$\begin{cases}x+y-3m=0\\2x-y+2m-1=0\end{cases}$可得$\begin{cases}x=\frac{m+1}{3}\\y=\frac{8m-1}{3}\end{cases}$，

所以，两直线的交点坐标为$\left(\frac{m+1}{3},\frac{8m-1}{3}\right)$，且交点在第四象限，

则$\begin{cases}\frac{m+1}{3}>0\\\frac{8m-1}{3}<0\end{cases}$，解得$-1<m<\frac{1}{8}$，因此，实数$m$的取值范围是$\left(-1,\frac{1}{8}\right)$.

故答案为：$\left(-1,\frac{1}{8}\right)$.

【典例 4-2】（2024·高二·江苏扬州·阶段练习）已知直线 $x+ky+2=0$ 经过两直线 $3x+2y-9=0$ 和 $x-1=0$ 的交点，则 k 的值等于_____.

【答案】-1

【解析】联立方程组 $\begin{cases}3x+2y-9=0\\x-1=0\end{cases}$，解得 $x=1,y=3$，即两直线的交点为 $(1,3)$，

将点 $(1,3)$ 代入直线 $x+ky+2=0$，可得 $1+3k+2=0$，解得 $k=-1$，

即实数 k 的值为 -1.

故答案为：-1.

【方法技巧与总结】

通过联立两直线的方程，并将已知的交点坐标代入方程组，可以构建一个关于参数的方程。求解这个方程，即可得到参数的值。具体来说，若交点坐标满足方程组，则可通过代数运算求解出参数，该参数使得两直线在指定点相交。

【变式 4-1】（2024·高二·全国·期中）已知直线 $5x+4y=2a+1$ 与直线 $2x+3y=a$ 的交点位于第四象限，则 a 的取值范围是_____.

【答案】$\left(-\frac{3}{2},2\right)$

【解析】联立方程组 $\begin{cases}5x+4y=2a+1\\2x+3y=a\end{cases}$，解得 $x=\frac{2a+3}{7},y=\frac{a-2}{7}$，即交点坐标为 $(\frac{2a+3}{7},\frac{a-2}{7})$，

因为交点位于第四象限，所以 $\frac{2a+3}{7}>0$ 且 $\frac{a-2}{7}<0$，

解得 $-\frac{3}{2}<a<2$，即实数 a 的取值范围为 $(-\frac{3}{2},2)$.

故答案为：$(-\frac{3}{2},2)$.

【变式 4-2】（2024·高二·全国·课后作业）若直线 $l:y=kx-\sqrt{3}$ 与直线 $x+y-3=0$ 相交，且交点在第一象限，则直线 l 的倾斜角 θ 的取值范围是_____.

【答案】$30°<\theta<90°$

【解析】由两直线相交可得 $k\neq-1$，

联立 $\begin{cases}y=kx-\sqrt{3}\\x+y-3=0\end{cases}$，解得 $x=\frac{3+\sqrt{3}}{1+k},y=\frac{3k-\sqrt{3}}{1+k}$；

所以两直线的交点坐标为 $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{1+k},\frac{3k-\sqrt{3}}{1+k}\right)$；

又两直线交点在第一象限，所以 $\begin{cases}\frac{3+\sqrt{3}}{1+k}>0\\\frac{3k-\sqrt{3}}{1+k}>0\end{cases}$，解得 $k>\frac{\sqrt{3}}{3}$，

又直线 l 的倾斜角为 θ，则 $\tan\theta>\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以可得 $30°<\theta<90°$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/806011035022010233