第二章 相对论质点力学

电磁场的相对性

狭义相对论对一个物理规律是否正确提出了必要的判据。

根据狭义相对性原理，物理定律应在洛伦兹变换下具有不变性。即只有符合狭义相对论要求，在Lorentz 变换下保持形式不变的物理规律才可能是正确的。

麦克斯韦方程组具有洛伦兹变换不变性。

经典力学的牛顿第二定律具有伽利略变换不变性，但是 不具有洛伦兹变换不变性。因此狭义相对论中牛顿第二 定律一定会改变。

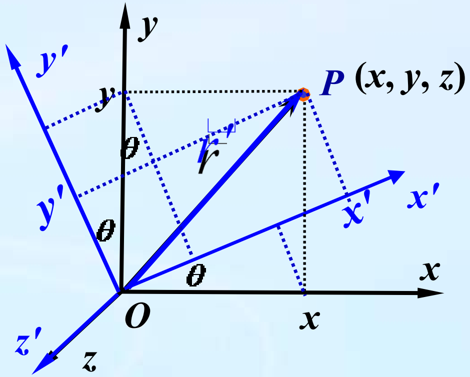
本章我们首先研究Lorentz协变式的数学形式，然后建立相对论质点力学方程，导出重要的质速关系、质能关系。最后回到电磁学问题，进一步揭示电磁现象的统一性和电磁场的相对性。

一、Lorentz 协变式的数学形式

1. 坐标系转动变换，三维空间中的标量、矢量和张量

考虑三维空间直角坐标系绕 z 轴的转动,转角θ

在坐标系S'中，位置矢量$\vec{r}(x, y, z)$的长度不变，各分量变换满足：



$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \\ z' = z \end{cases}$$

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

一、Lorentz 协变式的数学形式

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \\ z' = z \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

定义转动矩阵 $:\alpha = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 记 $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$

$$x_i' = \sum_j \alpha_{ij} x_j, \quad i, j = 1, 2, 3$$

分别表示*x, y, z*三个分量。

一、Lorentz 协变式的数学形式

$\vec{r}$ 是个位置矢量，推广到任意矢量，可以定义:

如果一个量由三个分量组成，每个分量在坐标系转动变换下如同坐标分量一样变换，即:

$$A_i' = \sum_j \alpha_{ij} A_j = \alpha_{ij} A_j$$

则称此量为三维空间中的一阶张量。

一、Lorentz 协变式的数学形式

可以证明速度也是一阶张量，因为它的每个分量在坐标系转动变换下有:

$$\boxed{A_i^{'} = \alpha_{ij} A_j}$$

$$v_i^{'} = \frac{dx_i^{'}}{dt} = \alpha_{ij}\frac{dx_j}{dt} = \alpha_{ij} v_j$$

类似地可证明动量、加速度、力等也是一阶张量。事实上以前已经遇到的所有的矢量都是一阶张量。

如果一个量在坐标系转动变换下为不变量，就称此量为三维空间中的零阶张量。

一、Lorentz 协变式的数学形式

时间、质量、电荷等和坐标系无关，不受坐标系转动变换的影响；空间两点之间的距离，虽然两点坐标都随坐标系转动变化，但两点距离不变，所以这些量都是零阶张量。所有标量都是零阶张量。

一、Lorentz 协变式的数学形式

如果一个量$T_{ij}(i,j=1,2,3)$ 由9个分量构成，每个分量在坐标系转动变换下都满足变换关系：

$$T_{ij}^{'}=\sum_{k,l}\alpha_{ik}\alpha_{jl}T_{kl}=\alpha_{ik}\alpha_{jl}T_{kl}=\alpha_{ik}T_{kl}\tilde{\alpha}_{lj}$$

就称量 T 是三维空间中的二阶张量。

转动惯量张量，就是一个二阶张量的例子，物理上二阶张量的例子还有应力张量、介电张量、磁导率张量等。

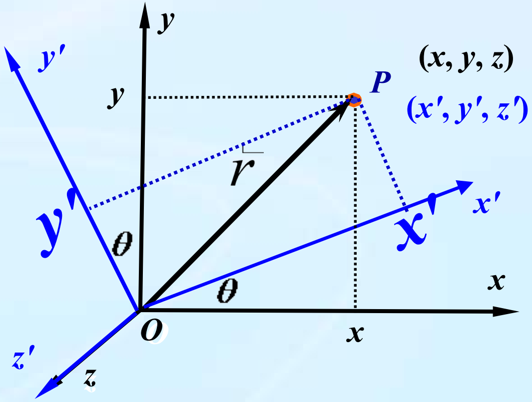
一、Lorentz 协变式的数学形式

回到位置矢量 $\vec{r}(x, y, z)$

位置矢量 $\vec{r}(x, y, z)$ 的长度不变，即:

$$\vec{r}^{\,2} = x^2 + y^2 + z^2$$

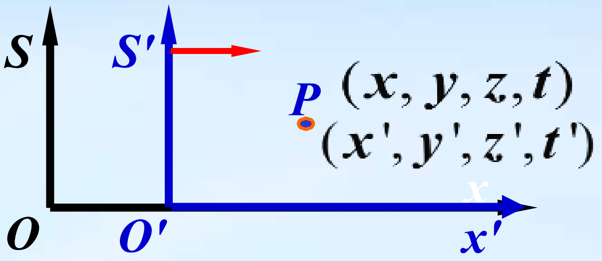
$$\equiv \vec{r}'^{\,2} = x'^2 + y'^2 + z'^2$$



位置矢量的长度在空间转动下不变。

二、Lorentz 变换的几何意义

考虑一个物理事件 P，在 S 和 S' 中的时空 坐标分别为 $(x, y,$ 和 $t)$，由洛伦兹变换有：



$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2$$

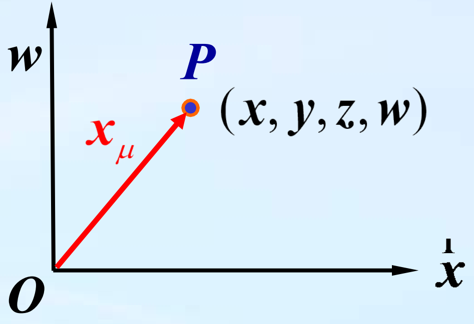
事件 P 和原点 O 的时空间隔是一个洛伦兹不变量。改写：

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 + (ict)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2,\ w = x_4 = ict$$

二、Lorentz 变换的几何意义

引进四维空间：$x_\mu = (x, y, z, w = ict)$

把由原点事件 $O(0,0,0,0)$ 引向事件 $P(x, y, z, w = ict)$ 的"矢量"看成P在四维空间中的"位置矢量" x_μ：。



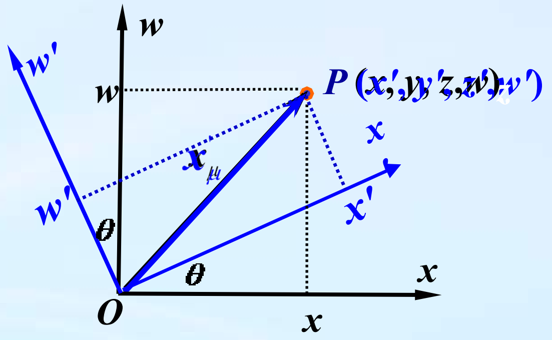
$$s^2 = x_\mu \cdot x_\mu = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

是一个洛仑兹不变量。

二、Lorentz 变换的几何意义

考虑四维空间中坐标轴在(x, w)平面内绕原点的转动：

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + w\sin\theta \\ w' = -x\sin\theta + w\cos\theta \end{cases}$$



当P点在w'轴上时，$x'=0$，有

$$tg\theta = -x/w = ix/(ct) = i\beta,$$

其中 $v = x/t$ 是S'与S的相对速度。

二、Lorentz 变换的几何意义

并有：

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \sin\theta = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$ 虚角度的三角函数

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{\sqrt{1-\beta^2}} + \dfrac{i\beta w}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ w' = -\dfrac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} + \dfrac{w}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \xrightarrow[\beta = v/c]{w = ict} \begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ t' = \dfrac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{cases}$$

二、Lorentz 变换的几何意义

Lorentz 变换：四维空间 $x_\mu = (x, y, z, w = ict)$ 在(x, w) 平面内绕原点的转动变换。

洛伦兹变换

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \beta x / c) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x' = \gamma(x - i\beta w) \\ y' = y \\ z' = z \\ w' = \gamma(w - i\beta x) \end{cases}$$