

江西省南昌市第三中学 2023-2024 学年高三年级校内模拟数学试题试卷（最后一卷）

- 注意事项：
1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。
 2. 答题时请按要求用笔。
 3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。
 4. 作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
 5. 保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. $\left(x + \frac{a}{x}\right)\left(2x - \frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中各项系数的和为 2，则该展开式中常数项为
- A. -40 B. -20 C. 20 D. 40
2. 我国南北朝时的数学著作《张邱建算经》有一道题为：“今有十等人，每等一人，宫赐金以等次差降之，上三人先入，得金四斤，持出，下三人后入得金三斤，持出，中间四人未到者，亦依次更给，问各得金几何？”则在该问题中，等级较高的二等人所得黄金比等级较低的九等人所得黄金（ ）
- A. 多 1 斤 B. 少 1 斤 C. 多 $\frac{1}{3}$ 斤 D. 少 $\frac{1}{3}$ 斤
3. 已知 $\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}$ ，则 $\sin \alpha$ 的值等于（ ）
- A. $-\frac{7}{9}$ B. $-\frac{2}{9}$ C. $\frac{2}{9}$ D. $\frac{7}{9}$
4. 已知函数 $f(x) = \ln x + 1$ ， $g(x) = 2e^{x-\frac{1}{2}}$ ，若 $f(m) = g(n)$ 成立，则 $m - n$ 的最小值是（ ）
- A. $\frac{1}{2} + \ln 2$ B. $e - 2$ C. $\ln 2 - \frac{1}{2}$ D. $\sqrt{e} - \frac{1}{2}$
5. 甲、乙两名学生的六次数学测验成绩(百分制)的茎叶图如图所示.

甲	乙
	6 9
6 2	7 8
6 2 0	8 7 8
0	9 2 6

- ①甲同学成绩的中位数大于乙同学成绩的中位数；
- ②甲同学的平均分比乙同学的平均分高；
- ③甲同学的平均分比乙同学的平均分低；
- ④甲同学成绩的方差小于乙同学成绩的方差.

以上说法正确的是（ ）

A. ③④

B. ①②

C. ②④

D. ①③④

6. 下列与函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 定义域和单调性都相同的函数是 ()

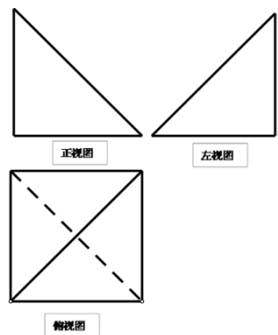
A. $y = 2^{\log_2 x}$

B. $y = \log_2 \left(\frac{1}{2} \right)^x$

C. $y = \log_2 \frac{1}{x}$

D. $y = x^{\frac{1}{4}}$

7. 某几何体的三视图如图所示, 三视图是腰长为 1 的等腰直角三角形和边长为 1 的正方形, 则该几何体中最长的棱长为 ().



A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. 1

D. $\sqrt{6}$

8. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 过点 F 的直线 l 与抛物线 C 交于 A, B 两点 (设点 A 位于第一象限), 过点 A, B 分别作抛物线 C 的准线的垂线, 垂足分别为点 A_1, B_1 , 抛物线 C 的准线交 x 轴于点 K , 若 $\frac{|A_1K|}{|B_1K|} = 2$, 则直线 l 的斜率为

A. 1

B. $\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{2}$

D. $\sqrt{3}$

9. 若函数 $f(x) = x^2 + 2x - m \cos(x+1) + m^2 + 3m - 7$ 有且仅有一个零点, 则实数 m 的值为 ()

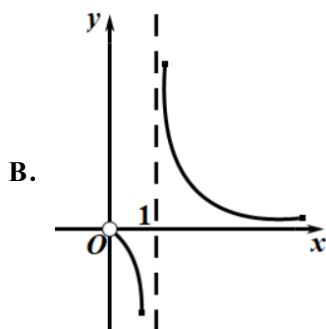
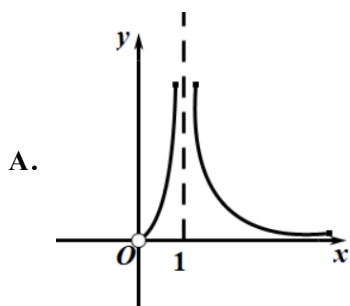
A. $\frac{-3 - \sqrt{37}}{2}$

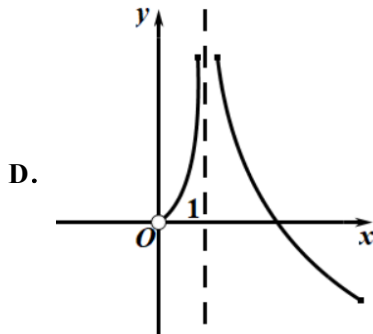
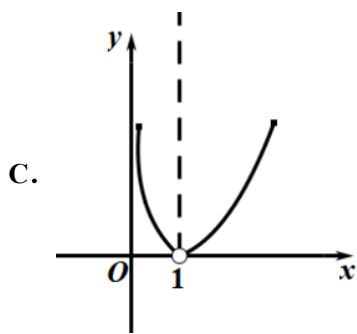
B. $\frac{-3 + \sqrt{37}}{2}$

C. -4

D. 2

10. 已知函数 $f(x) = \frac{-2}{\ln(x+1) - x}$, 则函数 $y = f(x-1)$ 的图象大致为 ()





11. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ ，若函数 $y=f(x+2)$ 为偶函数，且 $f(x)$ 对任意 $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$)，都有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0$ ，若 $f(a) \leq f(3a+1)$ ，则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ B. $[-2, -1]$ C. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ D. $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$

12. 一小商贩准备用 50 元钱在一批发市场购买甲、乙两种小商品，甲每件进价 4 元，乙每件进价 7 元，甲商品每卖出去 1 件可赚 1 元，乙商品每卖出去 1 件可赚 1.8 元.该商贩若想获取最大收益，则购买甲、乙两种商品的件数应分别为 ()

- A. 甲 7 件，乙 3 件 B. 甲 9 件，乙 2 件 C. 甲 4 件，乙 5 件 D. 甲 2 件，乙 6 件

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边长分别为 a, b, c ，满足 $a^2 - 2a(\sin B + \sqrt{3} \cos B) + 4 = 0$ ， $b = 2\sqrt{7}$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积为__.

14. 若 $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{1}{3}$ ，则 $\cos \alpha =$ _____， $\cos 2\alpha + \cos \alpha =$ _____.

15. 某校为了解家长对学校食堂的满意情况，分别从高一、高二年级随机抽取了 20 位家长的满意度评分，其频数分布表如下：

满意度评分分组	$[50, 60)$	$[60, 70)$	$[70, 80)$	$[80, 90)$	$[90, 100)$	合计
高一	1	3	6	6	4	20
高二	2	6	5	5	2	20

根据评分，将家长的满意度从低到高分三个等级：

满意度评分	评分 < 70 分	$70 \leq$ 评分 < 90	评分 ≥ 90 分
满意度等级	不满意	满意	非常满意

假设两个年级家长的评价结果相互独立，根据所给数据，以事件发生的频率作为相应事件发生的概率.现从高一、高二年级各随机抽取 1 名家长，记事件 A ：“高一家长的满意度等级高于高二家长的满意度等级”，则事件 A

发生的概率为_____.

16. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 若以 $N(0, 2)$ 为圆心且与椭圆 C 有公共点的圆的最大半径为 $\sqrt{26}$, 此时椭圆 C 的方程是_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{ax^2 + 1}{2bx}$, 其中 $a > 0, b > 0$.

(1) ①求函数 $f(x)$ 的单调区间;

②若 x_1, x_2 满足 $|x_i| > \frac{1}{\sqrt{a}} (i=1, 2)$, 且 $x_1 + x_2 > 0, x_2 > 0$. 求证: $f(x_1) + 2f(x_2) > \frac{\sqrt{a}}{b}$.

(2) 函数 $g(x) = \frac{1}{2}ax^2 - \ln x$. 若 $x_1, x_2 \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ 对任意 $x_1 \neq x_2$, 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| > |g(x_1) - g(x_2)|$, 求 $b - a$ 的最大值.

18. (12 分) 已知 q, n 均为给定的大于 1 的自然数, 设集合 $M = \{1, 2, 3, \dots, q\}$, $T = \{x \mid x = x_1 + x_2q + \dots + x_nq^{n-1}, x_i \in M, i=1, 2, \dots, n\}$.

(I) 当 $q = 2, n = 2$ 时, 用列举法表示集合 T ;

(II) 当 $q = 200$ 时, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{100}\} \subseteq M$, 且集合 A 满足下列条件:

①对任意 $1 \leq i < j \leq 100$, $a_i + a_j \neq 201$;

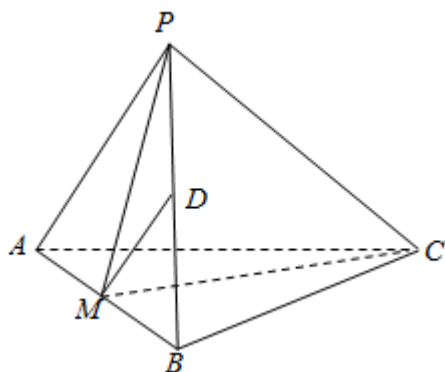
② $\sum_{i=1}^{100} a_i = 12020$.

证明: (i) 若 $\forall a_i \in A$, 则 $201 - a_i \in \bar{A}$ (集合 $\bar{A}$ 为集合 A 在集合 M 中的补集);

(ii) $\sum_{i=1}^{100} a_i^2$ 为一个定值 (不必求出此定值);

(III) 设 $s, t \in T$, $s = b_1 + b_2q + b_3q^2 + \dots + b_nq^{n-1}$, $t = c_1 + c_2q + \dots + c_nq^{n-1}$, 其中 $b_i, c_i \in M, i=1, 2, \dots, n$, 若 $b_n < c_n$, 则 $s < t$.

19. (12 分) 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB \perp PC$, M 是 AB 的中点, 点 D 在 PB 上, $MD \parallel$ 平面 PAC , 平面 $PAB \perp$ 平面 PMC , $\triangle CPM$ 为锐角三角形, 求证:



(1) D 是 PB 的中点;

(2) 平面 $ABC \perp$ 平面 PMC .

20. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , $b \sin A = 3c \sin B$, $a = 3$, $\cos B = \frac{2}{3}$.

(I) 求 b 的值;

(II) 求 $\cos(2B - \frac{\pi}{6})$ 的值.

21. (12 分) 设 a 为实数, 在极坐标系中, 已知圆 $\rho = 2a \sin \theta$ ($a > 0$) 与直线 $\rho \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) = 1$ 相切, 求 a 的值.

22. (10 分) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, 若矩阵 $M = BA$, 求矩阵 M 的逆矩阵 M^{-1} .

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、D

【解析】

令 $x=1$ 得 $a=1$. 故原式 = $(x + \frac{1}{x})(2x - \frac{1}{x})^5$. $(x + \frac{1}{x})(2x - \frac{1}{x})^5$ 的通项 $T_{r+1} = C_5^r (2x)^{5-2r} (-x^{-1})^r = C_5^r (-1)^r 2^{5-r} x^{5-2r}$,

由 $5-2r=1$ 得 $r=2$, 对应的常数项 = 80, 由 $5-2r=-1$ 得 $r=3$, 对应的常数项 = -40, 故所求的常数项为 40, 选 D

解析 2. 用组合提取法, 把原式看做 6 个因式相乘, 若第 1 个括号提出 x , 从余下的 5 个括号中选 2 个提出 x , 选 3 个提出

$\frac{1}{x}$; 若第 1 个括号提出 $\frac{1}{x}$, 从余下的括号中选 2 个提出 $\frac{1}{x}$, 选 3 个提出 x .

故常数项 = $X \cdot C_5^2 (2X)^2 \cdot C_3^3 (-\frac{1}{X})^3 + \frac{1}{X} \cdot C_5^2 (-\frac{1}{X})^2 \cdot C_3^3 (2X)^3 = -40 + 80 = 40$

2、C

【解析】

设这十等人所得黄金的重量从大到小依次组成等差数列 $\{a_n\}$ ，则 $a_1 + a_2 + a_3 = 4$ ， $a_8 + a_9 + a_{10} = 3$ ，由等差数列的性质得 $a_2 = \frac{4}{3}$ ， $a_9 = 1$ ， $\therefore a_2 - a_9 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$ ，

故选 C

3、A

【解析】

由余弦公式的二倍角可得， $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = 1 - 2\sin^2(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}) = \frac{7}{9}$ ，再由诱导公式有

$$\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin \alpha, \text{ 所以 } \sin \alpha = -\frac{7}{9}$$

【详解】

$$\because \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}$$

$\therefore$ 由余弦公式的二倍角展开式有

$$\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{7}{9}$$

$$\text{又} \because \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin \alpha$$

$$\therefore \sin \alpha = -\frac{7}{9}$$

故选：A

【点睛】

本题考查了学生对二倍角公式的应用，要求学生熟练掌握三角函数中的诱导公式，属于简单题

4、A

【解析】

分析：设 $f(m) = g(n) = t$ ，则 $t > 0$ ，把 m, n 用 t 表示，然后令 $h(t) = m - n$ ，由导数求得 $h(t)$ 的最小值.

详解：设 $f(m) = g(n) = t$ ，则 $t > 0$ ， $m = e^{t-1}$ ， $n = \ln \frac{t}{2} + \frac{1}{2} = \ln t - \ln 2 + \frac{1}{2}$ ，

$$\therefore m - n = e^{t-1} - \ln t + \ln 2 - \frac{1}{2}, \text{ 令 } h(t) = e^{t-1} - \ln t + \ln 2 - \frac{1}{2},$$

则 $h'(t) = e^{t-1} - \frac{1}{t}$ ， $h''(t) = e^{t-1} + \frac{1}{t^2} > 0$ ， $\therefore h'(t)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的增函数，

又 $h'(1) = 0$ ， $\therefore$ 当 $t \in (0, 1)$ 时， $h'(t) < 0$ ，当 $t \in (1, +\infty)$ 时， $h'(t) > 0$ ，

即 $h(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减, 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增, $h(1)$ 是极小值也是最小值,

$$h(1) = \frac{1}{2} + \ln 2, \therefore m-n \text{ 的最小值是 } \frac{1}{2} + \ln 2.$$

故选 A.

点睛 本题易错选 B, 利用导数法求函数的最值, 解题时学生可能不会将其中求 $b-a$ 的最小值问题, 通过构造新函数, 转化为求函数 $h(t)$ 的最小值问题, 另外通过二次求导, 确定函数的单调区间也很容易出错.

5、A

【解析】

由茎叶图中数据可求得中位数和平均数, 即可判断①②③, 再根据数据集中程度判断④.

【详解】

由茎叶图可得甲同学成绩的中位数为 $\frac{80+82}{2}=81$, 乙同学成绩的中位数为 $\frac{87+88}{2}=87.5$, 故①错误;

$$\bar{x}_{\text{甲}} = \frac{1}{6} \times (72+76+80+82+86+90) = 81, \bar{x}_{\text{乙}} = \frac{1}{6} \times (69+78+87+88+92+96) = 85, \text{ 则 } \bar{x}_{\text{甲}} < \bar{x}_{\text{乙}}, \text{ 故②错误, ③正确;}$$

显然甲同学的成绩更集中, 即波动性更小, 所以方差更小, 故④正确,

故选: A

【点睛】

本题考查由茎叶图分析数据特征, 考查由茎叶图求中位数、平均数.

6、C

【解析】

分析函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域和单调性, 然后对选项逐一分析函数的定义域、单调性, 由此确定正确选项.

【详解】

函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数.

A 选项, $y = 2^{\log_2 x}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 不符合.

B 选项, $y = \log_2 \left(\frac{1}{2} \right)^x$ 的定义域为 R , 不符合.

C 选项, $y = \log_2 \frac{1}{x}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数, 符合.

D 选项, $y = x^{\frac{1}{4}}$ 的定义域为 $[0, +\infty)$, 不符合.

故选: C

【点睛】

本小题主要考查函数的定义域和单调性，属于基础题.

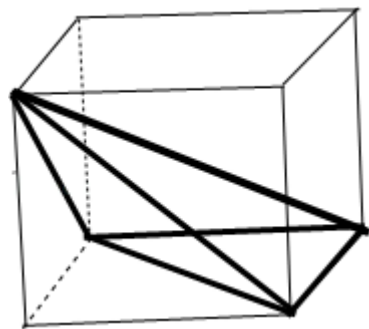
7、B

【解析】

首先由三视图还原几何体，进一步求出几何体的棱长.

【详解】

解：根据三视图还原几何体如图所示，



所以，该四棱锥体的最长的棱长为 $l = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

故选：B.

【点睛】

本题主要考查由三视图还原几何体，考查运算能力和推理能力，属于基础题.

8、C

【解析】

根据抛物线定义，可得 $|AF| = |AA_1|$ ， $|BF| = |BB_1|$ ，

又 $AA_1 \parallel FK \parallel BB_1$ ，所以 $\frac{|A_1K|}{|B_1K|} = \frac{|AF|}{|BF|} = 2$ ，所以 $\frac{|A_1K|}{|B_1K|} = \frac{|AA_1|}{|BB_1|} = 2$ ，

设 $|BB_1| = m (m > 0)$ ，则 $|AA_1| = 2m$ ，则 $\cos \angle AFx = \cos \angle BAA_1 = \frac{|AA_1| - |BB_1|}{|AB|} = \frac{2m - m}{2m + m} = \frac{1}{3}$ ，

所以 $\sin \angle AFx = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，所以直线 l 的斜率 $k = \tan \angle AFx = 2\sqrt{2}$. 故选 C.

9、D

【解析】

推导出函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = -1$ 对称，由题意得出 $f(-1) = 0$ ，进而可求得实数 m 的值，并对 m 的值进行检验，即可得出结果.

【详解】

$$Q f(x) = (x+1)^2 - m \cos(x+1) + m^2 + 3m - 8,$$

$$\text{则 } f(-1+x) = (-1+x+1)^2 - m \cos(-1+x+1) + m^2 + 3m - 8 = x^2 - m \cos x + m^2 + 3m - 8,$$

$$f(-1-x) = (-1-x+1)^2 - m \cos(-1-x+1) + m^2 + 3m - 8 = x^2 - m \cos x + m^2 + 3m - 8,$$

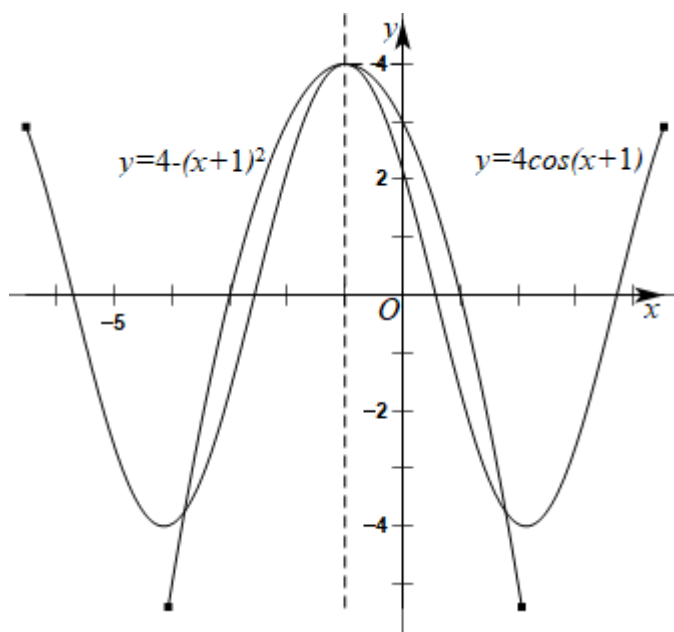
$\therefore f(-1+x) = f(-1-x)$, 所以, 函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = -1$ 对称.

若函数 $y = f(x)$ 的零点不为 $x = -1$, 则该函数的零点必成对出现, 不合题意.

所以, $f(-1) = 0$, 即 $m^2 + 2m - 8 = 0$, 解得 $m = -4$ 或 2 .

①当 $m = -4$ 时, 令 $f(x) = (x+1)^2 - 4 \cos(x+1) - 4 = 0$, 得 $4 \cos(x+1) = 4 - (x+1)^2$, 作出函数 $y = 4 \cos(x+1)$

与函数 $y = 4 - (x+1)^2$ 的图象如下图所示:



此时, 函数 $y = 4 \cos(x+1)$ 与函数 $y = 4 - (x+1)^2$ 的图象有三个交点, 不合乎题意;

②当 $m = 2$ 时, $\cos(x+1) \leq 1$, $\therefore f(x) = (x+1)^2 - 2 \cos(x+1) + 2 \geq 0$, 当且仅当 $x = -1$ 时, 等号成立, 则函数

$y = f(x)$ 有且只有一个零点.

综上所述, $m = 2$.

故选: D.

【点睛】

本题考查利用函数的零点个数求参数, 考查函数图象对称性的应用, 解答的关键就是推导出 $f(-1) = 0$, 在求出参数后要对参数的值进行检验, 考查分析问题和解决问题的能力, 属于中等题.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/806104133222011000>