摘 要

微积分是高等数学的根本组成局部，它不仅在高等数学中占有重要地位，而且也是现代化建设和高科技开展不可缺少的有效工具。而无穷小是微积分理论的最根本概念之一，在微积分理论体系中，无穷小是一个必须要弄清楚的概念。然而，人们对无穷小的认识却经历了一个漫长的过程。直到十八世纪，仍然没有较完善的解释无穷小概念。无穷小是什么？无穷小究竟能不能是零？我们怎样确切地描述它？这些问题引起了数学界乃至哲学界的争论长达一个半世纪。无穷小问题至关重要，假设其不能解决，极限概念就无法建立，微积分理论就不会完善。到十九世纪二十年代，无穷小概念才有了比拟合理的解释。为了更好地学习微积分理论，掌握现代化科学文化知识，正确认识无穷小量的历史开展根源及其内涵也是非常重要的。本文主要通过无穷小的历史认识无穷小的地位和价值。

关键词：无穷小量，微积分，开展，认识

Development and understanding of infinitesimal

Abstract:

Calculus is the basic part of higher mathematics, it not only occupies an important position in higher mathematics, and it is also an effective tool to modernization and high-tech development essential. But the infinitely small is one of the most basic concepts of calculus, calculus theory, infinitely small is a must to clarify the concept of. However, people's awareness of the infinitesimal has experienced a long process. Until eighteenth Century, there is no perfect interpretation of the concept of infinitesimal. Infinitesimal is what? Infinitesimal what can not be zero? How can we describe it exactly? These problems caused by the mathematics community and philosophical debate for 1.5 century. Essential infinitely small problem, if not solved, the concept of limit cannot be established, calculus theory is not perfect. In nineteenth Century twenty time, the idea of infinitesimal is relatively rational explanation. In order to better learning calculus theory, master the modern scientific and cultural knowledge, causes the historical development and connotation of the correct understanding of infinitesimal is also very important. In this paper,the historical understanding through infinitesimal infinitesimal status and value.

Keywords: infinitesimal calculus, development, understanding

目 录

一、引言

“无穷小”的出现是初等数学向高等数学转变的一件具有划时代意义的大事，从此出现了一个新的数学分支——微积分。它是微积分学的根底理论，并且在数学的许多领域中也起着重要的作用。可是，这一概念的出现并不是在微积分创立时就已成为微积分学的根底。它的建立经历了一个漫长而艰苦的过程。本文研究“无穷小量”的建立和开展的历史，认识其对数学开展的意义和作用即在数学中的应用。根据有关史料，试就“无穷小”的建立及其对数学开展的意义和作用，提出一些粗浅的见解。

二、无穷小的开展及历史过程

〔一〕无穷小概念的产生

无穷小概念的产生无穷小是一个历史概念，它的历史可以追溯到文艺复兴时期的不可分量，不可分量概念的产生可以从古希腊的原子论和阿基米德解决一些问题的方法中得到某种根源性的解释。而在公元前 450 年，希腊人芝诺用“两分法”分析物体的运动时，得出运动是不可能的悖论。他说：“假设物体由 A 点运动到 B 点，首先必须经过 AB 的中点 C；然而，要经过 C 点 ，又必须经过 AC 的中点 D，即 AB 的 1/4 分点……。”这些分点如此无限次地找下去所得结论是:运动是不可能的。[1]这说明当时的希腊人虽然已经具备了用无穷小思想认识问题的能力，但由于他们还不能解决无穷小与很小很小之间的矛盾，所以当时的希腊几何证明中很少使用无穷小思想。

不管是在古希腊还是在中国，无穷小思想最初都是在哲学范围内提出的。在 2000 多年前的中国，人们就已产生对数学无穷小的萌芽认识。《庄子·天下篇》中有言“至大无外，谓之大一，至小无内，谓之小一”，大到没有外面，自然是无穷大，小到没有里面，当是无穷小。又言“一尺之锤，日取其半，万世不竭” ，描述了无穷小的变化过程。

魏晋时期数学家刘徽在《九章算术》“刘徽的割圆术”中提出“割之弥细，所失弥少。割之又割，以至于不可割，那么与圆周全体而无所失矣”的思想，第一次创造性地将无穷小思想运用到数学中，他用增加圆内接正多边形的边数来逼近圆。此时，正多边形的周长与圆的周长之差是无穷小。

17 世纪上半叶一系列先驱性的工作，沿着不同的方向向微积分的大门逼近。意大利数学家卡瓦利列在其《不可分量几何》中，将面和立体看、成不可分量“流动”所生成。他认为，不可分量就是无穷小。在开普勒以后，不可分量逐渐被叫做无穷小量。随着社会不断进步，面临解决诸如瞬时速度，曲线的切线及不规那么图形的面积计算等问题，都与无穷小相关，于是无穷小量方法就成为力学和几何学的一个重要工具。

在 17 世纪晚期，开始产生并形成了无穷小的演算。英国物理学家牛顿在研究物理学时，用变量 X 和 Y 的无穷小改变量作为求导数的手段。当他在求瞬时速度时，用位移的改变量ΔS 与时间的改变量ΔT 的比ΔS／ΔT，当时间变化量ΔT 变成零时的值表示[1]。改变量ΔT 是否为零？能不能取为零值？在当时引起了很大的争论。同时，德国数学家莱布尼兹也在几何学研究方面用变量 X 和 Y 的无穷小的微分增量 dy 和 dx 来研究面积和体积的计算。这时无穷小才开始被广泛地讨论和研究。

〔二〕牛顿和莱布尼茨对无穷小量的认识

1. 牛顿与无穷小量

什么是无穷小？牛顿在他的早期和晚期著作里有不同的解释。牛顿微积分的根本特点是基于直观(面积、流量)的有效、普遍算法。牛顿在处理微积分问题时，一方面追求解题方法的普遍性；另一方面这种普遍的解题方法又是建立在有关物理学意义的“量”的根底上的。他和前人一样，尽可能地利用变量的直观意义，而与欧拉的思想把微积分演算看成是一种完全形式的推演不同的是他把各种具体的问题概括为一般的普遍算法。

在早期第一阶段，他根本上是实无穷小(常常以“瞬”的形式表现出来，瞬是无穷小的量，不可分的量，也叫做微元)观点。他认为无穷小就像构成物质的元素一样，也是最小的、不可分的。求面积是利用无穷小面积的和得到的，求体积、位移也都利用的是它们各自的微元求和得到的。

例如:1669 年牛顿在第一篇流数法的论文《运用无限多项方程的分析》中，为解决曲边梯形的面积公式是[3]

$$Z = a(\frac{n}{m+n})x^{\frac{m+n}{n}}$$

要求它的曲线公式的问题，他用字母 o 表示横坐标 x 的无穷小增量，称之为 x 的瞬，于是新的横坐标就是 $x+o$，全部面积是

$$Z + oy = a\left(\frac{n}{m+n}\right)(x+o)^{\frac{m+n}{n}}$$

按二项式定理展开之后，减去

$$Z = a(\frac{n}{m+n})(x+o)^{\frac{m+n}{n}}$$

并且在等式两边除以o，最后舍掉含有o的各项，结果就得到曲线公式

$$y = ax^{\frac{m}{n}}$$

在整个运算过程中，牛顿用的o，先把它表示成≠0 的无穷小增量，然后又使它=0 舍掉。他把瞬或无穷小o看成是实无穷小量，就是说他只是从变量变化的间断性，变量变化的结果这个角度，而不是从连续和间断、过程和结果辩证的统一的角度来考察无穷小的。这个观点是从费尔马与巴罗等那里得来的，并且进行了初步理论上的概括。牛顿使用符号o与格雷戈里等使用符号o是一致的。同时牛顿还成认在他的方法中关于丢弃含o各项的说明和费尔马、巴罗关于丢弃 E 和 e 的说明同样是不清楚的。正如牛顿所讲的那样,他的方法只是“简略的说明,而不是正确的论证。”[4]

而在他写于 1671 年直到 1736 年才发表的《流数法和无穷级数》中，他认为变量是由“点、线和面的连续运动产生的”。所以他把变量叫做“流量”，并把变化率叫做“流数”。把流量的变化总是和时间的流逝联系起来，就是说流量总是随着时间的变化而变化的。

当他将这种根本概念(瞬或无穷小o)运用到流数法的根本方法中时，必然会产生逻辑矛盾。实无穷小量一方面是常量，另一方面既可以是非 0，又可以是 0，这怎么可能呢?为了摆脱这种逻辑上的矛盾，合理地解释流数法，牛顿从 1671 年《流数法》开始，从实无穷小量的观点转变为潜无穷小的观点。这一著作的发表标志着牛顿的根本观点已经开始进入第二个阶段。

在这本著作中，牛顿已经开始从第一阶段的早期观点开始向晚期的观点过渡，这表现在他对瞬这个重要概念的解释上，主要的变化在于早期他是从静力学的观点、不可分量的形式来解释的，而现在是从动力学的观点、连续量的形式来解释的了。但是在计算方法上那么仍然按照实无穷小方法来计算。而后一种观点最后开展成为所谓最初比和最终比方法，这个方法实质上可以认为是后来哥西提出的极限理论的雏形。

事实上牛顿在他的 1669 年的《分析学》中的思想更接近于卡瓦列里的不可分量或者静力学式的不可分法，而在较晚的 1671 年(1736 年出版)《流数法和无穷级数》中那么更倾向于伽力略的动力学思想，因而更多地使他的流数法依附于他的时空连续统的直观解释。

牛顿在1676年写的论文《曲线与求积》，标志着他的观点进人了第三个阶段，即后期阶段。在这篇文章里，牛顿正式宣布他放弃早期对无穷小的观点，不再把数量看成是由不可分割的最小单元构成的，而是把它们看成是由几何元素经过连续运动生成的。他说:“在这里我认为数学量不是由最小单元构成的，而是由连续运动生成的。直线并不是由最小单元构成的，而是由点运动而成的，面由直线运动而成，立体由面运动而成，角由边旋转而成，时间由连续运动而成等等。”

与早期不同的是，这时牛顿不再把流数看成是两个实无穷小量的比，而是把它理解为初生量的最初比或消失量的最终比。在《曲线求积术》中，他写道:“流数很接近在等长而又非常小的时间元里所生的增量(之比)非常接近，说得确切些，它们是初生增量的最初比”。就是说流数是初生量的最初比。又说:“如果流数被看成是消失量的最终比，那么等于是同一事”。这里牛顿又把流数理解为消失量的最终比。

2.莱布尼茨与无穷小量

在建立微积分中和牛顿并列在一起的还有德国的博学巨人莱布尼茨(Leibniz，1646-1716)，莱布尼茨是哲学家、法学家、历史学家、语言学家和先驱的地质学家，他在逻辑学、力学、光学、数学、流体静力学、气体学、航海学和计算机方面都做出了重要的奉献，他还是数理逻辑的创始人。

莱布尼茨的微积分主要于1672-1676年在巴黎期间完成。在惠更斯的鼓励下，莱布尼茨于1672年开始深入研究数学，1674年开创了微积分的方法，1687年第一次公开发表了微积分的文章。莱布尼茨集中研读了开普勒、卡瓦列利、笛卡尔、帕斯卡和沃利斯等人有关面积、体积和曲线弧长的大量文献，吸取了他们的成果，而且可以看到他在创立微积分时的思想开展过程。

莱布尼茨创立微积分首先是出于几何问题的思考，尤其是特征三角形的研究。1684年，莱布尼茨整理、概括自己1673年以来微积分研究的成果，发表了第一篇微分学论文《一种求极大值与极小值以及求切线的新方法》(简称《新方法》)，它包含了微分记号以及函数和、差、积、商、乘幂与方根的微分法那么，还包含了微分法在求极值、拐点以及光学等方面的广泛应用。1686年，莱布尼茨又发表了他的第一篇积分学论文《潜在的几何与分析不可分和无限》，这篇论文初步论述了积分或求积问题与微分或切线问题的互逆关系，包含积分符号，并给出了摆线方程。莱布尼茨当时把微积分称为“无穷小算法”。他建立的微积分也是以无穷小为根底的。在他的工作中，对产生微积分的主要问题之一——切线的求法，是以两个微分比，即$\dfrac{dx}{dy}$为根底的，而dx、dy分别是曲线上两个距离为“无穷小”的点的横坐标之差和纵坐标之差，可见dx、dy是无穷小量。

莱布尼茨第一次用“瞬”(moment)来表示无穷小量(infinitesmall)是在1675年10月25日的手稿《依据重心求面积的分析法》中，在这里他用moment一词表示一小块面积(可以看作是面积微元)。[5]在他的微积分手稿和有关论述中，莱布尼茨也用到“基元”(element)或“不可分量”(indivisible)，他但绝大多数都用“瞬”表示无穷小量。编辑莱布尼茨早期数学手稿的作者认为，他的moment很可能是从惠更斯那里继承来的。而moment源于拉丁语momentum，其根本意义是运动和变化，而且，更倾向于表示微小的变化，特别是微小的时间段，这是它在力学或当时的自然哲学中的根本意义。当然，莱布尼茨对“无穷小量”概念本身并没有给出明确的界定，他的理解和表述也存在着混乱和矛盾。例如，他频繁运用“瞬”、微分，有时直接称为“无穷小量”。不过，有一点是确定的，他的手稿中绝大局部地方都用moment表示无穷小量，并且他的无穷小量根本上是一个变量——他这样说过:“对于数学家，为了他们的证明的严格起见，只要不取`无穷小’而取`要多么小有多么小’就够了。”总的说来，他引入无穷小量完全是一种权宜之计，是确立导数的一种手段而已。尽管他没有对无穷小量的存在性和确定性过多地考虑，但他认为由无穷小量表示的导数是确定的。

莱布尼茨微积分工作的另一个特点是灵活应用“微分三角形”这个工具，这使得他从形式上有效地绕过了无穷小量的存在性这一时代的难题。有了“微分三角形”切线就不再是和曲线只有一个公共点的静态的线，而

是由割线变来的，运动的产物。特别重要的是，当微分三角形的边作为无穷小量而趋于零时，所谓“微分三角形作为一种形式被保存下来”——从直观上为“曲线”与直线的统一做了解释，本质上是“曲”与“直”(在同一邻域内)的拓扑等价性——这正是后来的极限概念根底。

莱布尼茨努力给无穷小下一个清楚的定义。他用了“有界量”(terminata)和“无界量”

(interminata)来解释无穷大和无穷小的概念:一个无穷的量是一个比任何指定的量或任何可由数表示的量还大的，有界的或无界的量。这里有界和无界的区别在于:一个无界的无穷量是找不出边界上的最后一点的，而一个有界无穷量是一种虚构的量，是用来度量无限长度的。莱布尼茨认为有界的无穷，而不是无界的无穷，才是数学的对象，这似乎说明了他在数学上倾向于成认所谓“实无穷”的概念。

但他对微积分学根底的解释和牛顿一样也是含混不清的，有时他把无穷小微分作为有限确实定的量，有时又作为无穷小舍去。由于缺少严密的定义，莱布尼茨经常求助于类比来说明其无穷小微分的性质，他说可以把一个量的微分与这个量本身的关系，想象为类似于一个质点与地球的关系，地球的半径与宇宙的半径的关系。在另一个地方他又说，就象对于握在手中的球一样，地球是无穷大一样，恒星之间的距离相对于这个小球来说就是双重无穷大。由于其微分运算法获得极大成功，尽管他似乎对其逻辑合理性也抱有很大的疑心，但他对无穷小概念的运用坚信不移。

〔三〕莱布尼茨和牛顿对无穷小的异同

有关莱布尼茨的数学工作和哲学思想的关系的论述就存在着某种简单的附会和歧义。例如，M·克莱因在论及莱布尼茨和牛顿创立微积分的不同特点时认为:“两个人的工作的主要差异是，牛顿把 x 和 y 的无穷小增量作为求流数或导数的手段……而莱布尼茨却直接用 x 和 y 的无穷小增量(即微分)求出它们之间的关系。这个差异反映了牛顿的物理学方向和莱布尼茨的哲学方向。

在物理方向中，速度之类是中心的概念，而哲学那么着眼于物质的最终微粒；这些微粒，莱布尼茨称作“单子”。

1.在另一部重要的微积分史著作中有相似的说法，它认为:“科学家牛顿，在速度概念中找到了在他看来很满意的根底;而哲学家莱布尼茨，……那么宁可从微分—在他的哲学体系中起极大作用的单子在思维中的对应物—中去寻找这个根底。”

2.这两位作者强调莱布尼茨的微积分工作受其哲学思想，特别是单子论的影响，并且把这种影响具体到“单子”和“无穷小量”的类比。而编辑莱布尼茨数学手稿的作者那么提出了相反的看法，他认为:“莱布尼茨的哲学思想是以其数学工作为根底的，而不是相反”。

3.也就是只成认莱布尼茨的数学工作对其哲学思想的影响，而否认其哲学思想对数学工作的影响。