

高考仿真重难点训练 06 解三角形

一、选择题

1. 若 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径 $R = \sqrt{2}$, $A = 45^\circ$, 则 $a =$ ()

A. 1

B. $\sqrt{2}$

C. 2

D. $2\sqrt{2}$

【答案】C

【分析】根据正弦定理求解即可.

【解析】由正弦定理可得: $\frac{a}{\sin A} = 2R$,

所以 $a = 2R \sin A = 2\sqrt{2} \sin 45^\circ = 2$.

故选: C

2. 设 $\triangle ABC$ 中角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a = 4$, $b = 6$, $\cos C = -\frac{1}{2}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ().

A. $6\sqrt{2}$

B. $6\sqrt{3}$

C. 12

D. $8\sqrt{3}$

【答案】B

【分析】利用同角三角函数的基本关系计算出 $\sin C$ 的值, 然后利用三角形的面积公式可求得 $\triangle ABC$ 的面积.

【解析】 $\because 0 < C < \pi$, $\therefore \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

由三角形的面积公式可知, $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.

故选: B

3. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边, 若 $\tan A = 3$, $B = \frac{\pi}{4}$, $bc = 2\sqrt{10}$, 则 $a =$ ()

A. 2

B. 3

C. $2\sqrt{2}$

D. $3\sqrt{2}$

【答案】B

【分析】根据同角三角函数关系求得 $\sin A = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos A = \frac{\sqrt{10}}{10}$, 利用两角和的正弦公式求得 $\sin C = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 利用正弦定理求得 b, c , 进而求出 a 的值.

【解析】由 $\tan A = 3$, 可得 $A \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 根据 $\begin{cases} \sin^2 A + \cos^2 A = 1 \\ \frac{\sin A}{\cos A} = 3 \end{cases}$ 进而求出 $\sin A = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos A = \frac{\sqrt{10}}{10}$,

由 $B = \frac{\pi}{4}$ 可得 $\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\text{则 } \sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A = \frac{3\sqrt{10}}{10} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{10} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{由正弦定理可知 } \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sqrt{10}}{4},$$

$$\text{又因为 } bc = 2\sqrt{10}, \text{ 解得 } b = \sqrt{5}, c = 2\sqrt{2},$$

$$\text{由正弦定理可得 } a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{\sqrt{5} \times \frac{3\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3.$$

故选：B.

4. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为内角 A, B, C 的对边, 且 $a(\cos B - 1) - b(\cos A - 1) = 0$. 若 $a = 4$, 则 $b =$

()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】D

【分析】将已知等式利用余弦定理统一成边的形式, 化简变形可求得结果.

$$\text{【解析】} Q a(\cos B - 1) - b(\cos A - 1) = 0,$$

$$\therefore a \cdot \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - 1 \right) - b \cdot \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} - 1 \right) = 0,$$

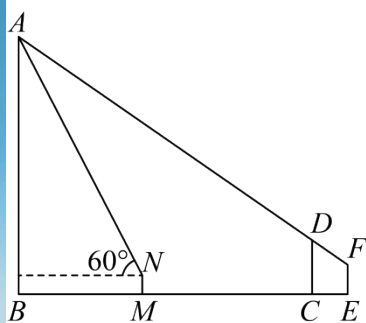
$$\therefore \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c} - a - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} + b = 0, \quad \frac{a^2 - b^2}{c} - (a - b) = 0.$$

$$\therefore a^2 - b^2 - c(a - b) = 0, \text{ 即 } (a - b)(a + b - c) = 0.$$

$$Q a + b - c > 0, \therefore a - b = 0, \text{ 即 } b = a = 4.$$

故选：D

5. 释迦塔俗称应县木塔, 建于公元 1056 年, 是世界上现存最古老最高大之木塔, 与意大利比萨斜塔、巴黎埃菲尔铁塔并称“世界三大奇塔”. 2016 年, 释迦塔被吉尼斯世界纪录认定为世界最高的木塔. 小张为测量木塔 AB 的高度, 设计了如下方案: 在木塔所在地面上取一点 M , 并垂直竖立一高度为 1m 的标杆 MN , 从点 N 处测得木塔顶端 A 的仰角为 60° , 再沿 BM 方向前进 92m 到达 C 点, 并垂直竖立一高度为 2.5m 的标杆 CD , 再沿 BC 方向前进 2m 到达点 E 处, 此时恰好发现点 A, D 在一条直线上. 若小张眼睛到地面的距离 $EF = 1.5\text{m}$, 则小张用此法测得的释迦塔的高度 AB 约为 (参考数据: $\sqrt{3} \approx 1.732$) ()



A. 64.5m

B. 67.8m

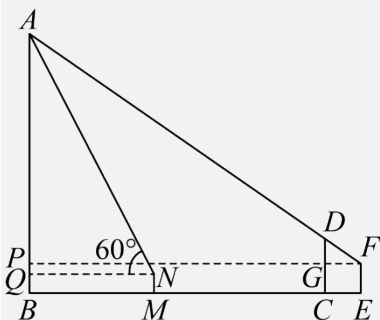
C. 70.2m

D. 72.4m

【答案】B

【分析】过点 N 作 $NQ \perp AB$ 于点 Q , 过点 F 作 $FP \perp AB$ 于点 P , 交 CD 于点 G , 利用特殊角的三角函数值以及三角形相似即可得到答案.

【解析】如图, 过点 N 作 $NQ \perp AB$ 于点 Q , 过点 F 作 $FP \perp AB$ 于点 P , 交 CD 于点 G ,



则四边形 $BMNQ$, $BCGP$, $BEFQ$ 都是矩形, 所以

$$BQ = MN = 1\text{m}, BM = QN, BP = CG = EF = 1.5\text{m}, FG = CE = 2\text{m},$$

所以 $DG = CD - EF = 2.5 - 1.5 = 1\text{m}$.

$$\text{在 Rt} \triangle AQN \text{ 中}, QN = \frac{AQ}{\tan \angle ANQ} = \frac{AB - 1}{\tan 60^\circ} = \frac{AB - 1}{\sqrt{3}},$$

$$\text{所以 } FP = BM + MC + CE = \frac{AB - 1}{\sqrt{3}} + 94,$$

$$\text{由已知得 } \triangle DFG \sim \triangle AFP, \text{ 所以 } \frac{FG}{DG} = \frac{FP}{AP},$$

$$\text{即 } 2 = \frac{\frac{AB - 1}{\sqrt{3}} + 94}{AB - 1.5}, \text{ 解得 } AB = \frac{581 + 95\sqrt{3}}{11} \approx \frac{581 + 95 \times 1.732}{11} \approx 67.8\text{m}.$$

故选: B.

6. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A , B , C 的对边分别为 a , b , c , 且 $\frac{2\sin B - \sin C}{\tan A} = \cos C$, $a = \sqrt{3}$, 则 $\triangle ABC$

周长的最大值为 ()

A. $2\sqrt{3}$

B. $3\sqrt{3}$

C. $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

D. $\sqrt{3}+2$

【答案】 B

【分析】 先将已知条件中的切分离开来且切化弦，再结合三角恒等变换公式进行整理得出角 A ，接着利用正弦定理进行边化角利用三角函数有界性即可探究周长取值范围，从而得出周长最大值.

【解析】 由题意得 $\frac{2\sin B - \sin C}{\cos C} = \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \Leftrightarrow \sin A \cos C = 2\sin B \cos A - \sin C \cos A$,

整理得 $2\sin B \cos A = \sin A \cos C + \sin C \cos A = \sin(A+C) = \sin(\pi-B) = \sin B$,

$\Rightarrow \cos A = \frac{1}{2}$, 又 $A \in (0, \pi)$, 故角 A 为 $\frac{\pi}{3}$,

所以由正弦定理得 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$,

所以 $b = 2\sin B$, $c = 2\sin C$,

所以 $\triangle ABC$ 的周长为:

$$a+b+c = \sqrt{3}+b+c = \sqrt{3}+2(\sin B + \sin C) = \sqrt{3}+2\left[\sin B + \sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)\right]$$

$$= \sqrt{3}+2\left(\frac{3}{2}\sin B + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right) = \sqrt{3}+2\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right),$$

因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 所以 $0 < B+C < \frac{2\pi}{3}$, $0 < B < \frac{\pi}{2}$, $0 < C < \frac{\pi}{2}$,

$\Rightarrow B \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $B+\frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$, 则 $\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right) \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$,

所以 $\sqrt{3}+b+c = \sqrt{3}+2\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right) \in (\sqrt{3}+3, 3\sqrt{3}]$,

故 $\triangle ABC$ 周长的最大值为 $3\sqrt{3}$.

故选: B.

7. 若 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 则下列说法正确的是 ()

A. 若 $b^2 + c^2 - a^2 > 0$, 则 $\triangle ABC$ 为锐角三角形

B. 若 $a \cos A = b \cos B$, 则此三角形为等腰三角形

C. 若 $a=1, b=2, A=30^\circ$, 则解此三角形必有两解

D. 若 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 则 $\sin A + \sin B > \cos A + \cos B$

【答案】 D

【分析】由余弦定理可判断 A；由余弦定理化简即可判断 B；由正弦定理即可判断 C；由正弦函数的单调性结合诱导公式即可判断 D.

【解析】对于 A，若 $b^2 + c^2 - a^2 > 0$ ，则 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} > 0$ ，

因为 A 为三角形内角，只能说明 A 为锐角，不能说明 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，故 A 错误；

对于 B，若 $a \cos A = b \cos B$ ，由余弦定理可得 $\frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc} = \frac{b(a^2 + c^2 - b^2)}{2ac}$ ，

整理可得 $(a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 0$ ，所以 $a = b$ 或 $a^2 + b^2 = c^2$ ，

所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形，故 B 错误；

对于 C，若 $a = 1, b = 2, A = 30^\circ$ ，由正弦定理可得 $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{2 \sin 30^\circ}{1} = 1$ ，

因为 $B \in (0, \pi)$ ，则 $B = \frac{\pi}{2}$ ，即三角形只有一解，故 C 错误；

对于 D，若 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，则 $0 < C < \frac{\pi}{2}$ ，所以 $\frac{\pi}{2} < A + B < \pi$ ，

即 $0 < \frac{\pi}{2} - B < A < \frac{\pi}{2}$ ，所以 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) < \sin A$ ，即 $\cos B < \sin A$ ，

同理可得 $\cos A < \sin B$ ，所以 $\sin A + \sin B > \cos A + \cos B$ ，故 D 正确；

故选：D.

8. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c，S 为 $\triangle ABC$ 的面积，且 $a^2 = 2S + (b - c)^2$ ，则 $\frac{2\sin^2 B + \sin^2 C}{\sin B \sin C}$ 的取值范围为 ()

- A. $\left(\frac{43}{15}, \frac{59}{15}\right)$ B. $\left[2\sqrt{2}, \frac{43}{15}\right)$ C. $\left[2\sqrt{2}, \frac{59}{15}\right)$ D. $\left[2\sqrt{2}, +\infty\right)$

【答案】C

【分析】由三角形面积公式及余弦定理得到 $1 - \frac{1}{2} \sin A = \cos A$ ，结合同角三角函数关系得到 $\sin A = \frac{4}{5}$ ， $\cos A = \frac{3}{5}$ ，由正弦定理得到 $\frac{2\sin^2 B + \sin^2 C}{\sin B \sin C} = \frac{2b}{c} + \frac{c}{b}$ ，且 $\frac{c}{b} = \frac{4}{5 \tan B} + \frac{3}{5}$ 根据三角形为锐角三角形，得到 $\tan B > \frac{3}{4}$ ，求出 $\frac{c}{b} = t \in \left(\frac{3}{5}, \frac{5}{3}\right)$ ，利用对勾函数得到 $g(t) = \frac{2}{t} + t$ 的最值，求出 $\frac{2\sin^2 B + \sin^2 C}{\sin B \sin C}$ 的取值范围.

【解析】由三角形面积公式可得： $S = \frac{1}{2} bc \sin A$ ，故 $a^2 = bc \sin A + (b - c)^2$ ，

$1 - \frac{1}{2} \sin A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ，故 $1 - \frac{1}{2} \sin A = \cos A$ ，

因为 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ ，所以 $\sin^2 A + \left(1 - \frac{1}{2} \sin A\right)^2 = 1$ ，

解得: $\sin A = \frac{4}{5}$ 或 0,

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 所以 $\sin A = 0$ 舍去,

$$\text{故 } \sin A = \frac{4}{5}, \quad \cos A = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5},$$

由正弦定理得:

$$\frac{2\sin^2 B + \sin^2 C}{\sin B \sin C} = \frac{2b^2 + c^2}{bc} = \frac{2b}{c} + \frac{c}{b},$$

$$\text{其中 } \frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\sin B} = \frac{4}{5 \tan B} + \frac{3}{5},$$

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形

$$\text{所以 } C < \frac{\pi}{2}, \text{ 故 } A + B > \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } B > \frac{\pi}{2} - A, \quad \tan B > \tan\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{3}{4},$$

$$\frac{4}{5 \tan B} \in \left(0, \frac{16}{15}\right), \quad \frac{4}{5 \tan B} + \frac{3}{5} \in \left(\frac{3}{5}, \frac{5}{3}\right),$$

令 $\frac{c}{b} = t \in \left(\frac{3}{5}, \frac{5}{3}\right)$, 则 $g(t) = \frac{2}{t} + t$ 为对勾函数, 在 $\left(\frac{3}{5}, \sqrt{2}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\sqrt{2}, \frac{5}{3}\right)$ 上单调递增,

$$\text{则 } g(t)_{\min} = g(\sqrt{2}) = \frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2},$$

$$\text{又 } g\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{10}{3} + \frac{3}{5} = \frac{59}{15}, \quad g\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{6}{5} + \frac{5}{3} = \frac{43}{15},$$

$$\text{因为 } \frac{59}{15} > \frac{43}{15}, \text{ 所以 } g(t)_{\max} = \frac{59}{15},$$

$$\text{则 } \frac{2\sin^2 B + \sin^2 C}{\sin B \sin C} = \frac{2b}{c} + \frac{c}{b} \in \left[2\sqrt{2}, \frac{59}{15}\right).$$

故选: C

【点睛】解三角形中求解取值范围问题, 通常有两种思路, 一是利用正弦定理将角转化为边, 利用基本不等式进行求解, 二是利用正弦定理将边转化为角, 结合三角函数的图象, 求出答案.

二、多选题

9. 若 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 的正弦值为 $\sin A, \sin B, \sin C$, 则 ()

A. $\sin A, \sin B, \sin C$ 一定能构成三角形的三条边

B. $\frac{1}{\sin A}, \frac{1}{\sin B}, \frac{1}{\sin C}$ 一定能构成三角形的三条边

C. $\sin^2 A, \sin^2 B, \sin^2 C$ 一定能构成三角形的三条边

D. $\sqrt{\sin A}, \sqrt{\sin B}, \sqrt{\sin C}$ 一定能构成三角形的三条边

【答案】AD

【分析】根据正弦定理边角化，结合三角形三边满足的关系即可根据选项逐一求解。

【解析】对于 A，由正弦定理得 $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$ ，

所以 $\sin A$ ， $\sin B$ ， $\sin C$ 作为三条线段的长一定能构成三角形，A 正确，

对于 B，由正弦定理得 $\frac{1}{\sin A} : \frac{1}{\sin B} : \frac{1}{\sin C} = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$ ，

例如 $a=5, b=12, c=13$ ，则 $\frac{1}{a} = \frac{1}{5}, \frac{1}{b} = \frac{1}{12}, \frac{1}{c} = \frac{1}{13}$ ，

由于 $\frac{1}{a} = \frac{1}{5} = \frac{25}{125}, \frac{1}{c} + \frac{1}{b} = \frac{1}{12} + \frac{1}{13} = \frac{25}{156}, \frac{1}{c} + \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ ，故不能构成三角形的三条边长，故 B 错误，

对于 C，由正弦定理得 $\sin^2 A : \sin^2 B : \sin^2 C = a^2 : b^2 : c^2$ ，

例如： $a=3, b=4, c=5$ ，则 $a^2=9, b^2=16, c^2=25$ ，

则 $a^2 + b^2 = 25 = c^2$ ， $\sin^2 A, \sin^2 B, \sin^2 C$ 作为三条线段的长不能构成三角形，C 不正确；

对于 D，由正弦定理可得 $\sqrt{\sin A} : \sqrt{\sin B} : \sqrt{\sin C} = \sqrt{a} : \sqrt{b} : \sqrt{c}$ ，不妨设 $a < b < c$ ，则 $a + b > c$ ，故

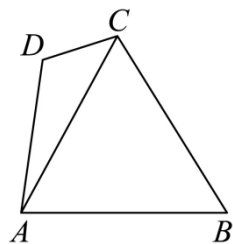
$\sqrt{a} < \sqrt{b} < \sqrt{c}$ ，且 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{c})^2 = a + b - c + 2\sqrt{ab} > 2\sqrt{ab} > 0$ ，

所以 $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) > \sqrt{c}$ ，故 D 正确，

故选：AD

10. 如图，在锐角 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，若 $\sin A = \sin B$ ，且

$\sqrt{3}(a \cos B + b \cos A) = 2c \sin C$ ， D 是 $\triangle ABC$ 外一点且 B, D 在直线 AC 异侧， $DC=2, DA=6$ ，则下列说法正确的是（ ）



- A. $\triangle ABC$ 是等边三角形
- B. 若 $AC = 2\sqrt{13}$ ，则 A, B, C, D 四点共圆
- C. 四边形 $ABCD$ 面积的最小值为 $10\sqrt{3} - 12$
- D. 四边形 $ABCD$ 面积的最大值为 $10\sqrt{3} + 12$

【答案】ABD

【分析】由正弦定理的边角互化即可得到 $C = \frac{\pi}{3}$ ，从而判断 A，由余弦定理即可得到 $D = \frac{2\pi}{3}$

, 从而判断 B, 由三角形的面积公式代入计算, 即可判断 CD.

【解析】 $Q \sqrt{3}(a \cos B + b \cos A) = 2c \sin C$,

$\therefore$ 根据正弦定理得 $\sqrt{3}(\sin A \cos B + \sin B \cos A) = 2 \sin^2 C$,

即 $\sqrt{3} \sin(A+B) = 2 \sin^2 C$,

$\therefore \sqrt{3} \sin C = 2 \sin^2 C$, 显然 $\sin C \neq 0$, 则 $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 根据题意, 有 $C = \frac{\pi}{3}$,

又 $\sin A = \sin B$, 可得 $a = b$, $\therefore A = B = C = \frac{\pi}{3}$, $\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形, 故 A 正确;

$Q DC = 2, DA = 6$, 在 $\triangle ADC$ 中, $AC^2 = 6^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 6 \cos D = 40 - 24 \cos D$,

当 $AC = 2\sqrt{13}$ 时, $\cos D = -\frac{1}{2}$, $\therefore D = \frac{2\pi}{3}$, 即 $B + D = \pi$,

$\therefore A, B, C, D$ 共圆, B 正确.

又 $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} AD \cdot CD \sin D = 6 \sin D$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 面积, $S = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC} = \frac{\sqrt{3}}{4} AC^2 + 6 \sin D = \frac{\sqrt{3}}{4} (40 - 24 \cos D) + 6 \sin D$

$= 10\sqrt{3} + 12 \sin\left(D - \frac{\pi}{3}\right)$, $0 < D < \pi$,

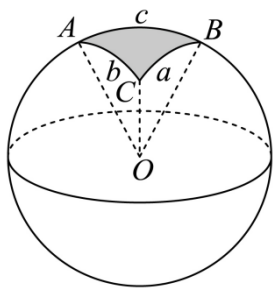
$\therefore D - \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$, 则 $\sin\left(D - \frac{\pi}{3}\right) \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$,

所以四边形 $ABCD$ 的面积没有最小值, C 错误.

当 $D - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, 即 $D = \frac{5\pi}{6}$ 时, 四边形 $ABCD$ 面积取最大值 $10\sqrt{3} + 12$, 故 D 正确.

故选: ABD.

11. 球面三角学是研究球面三角形的边、角关系的一门学科. 如图, 球 O 的半径为 R , A, B, C 为球面上三点, 劣弧 BC 的弧长记为 a , 设 O_a 表示以 O 为圆心, 且过 B, C 的圆, 同理, 圆 O_b, O_c 的劣弧 AC, AB 的弧长分别记为 b, c , 曲面 ABC (阴影部分) 叫做曲面三角形, $a = b = c$, 则称其为曲面等边三角形, 线段 OA, OB, OC 与曲面 $VABC$ 围成的封闭几何体叫做球面三棱锥, 记为球面 $O-ABC$. 设 $\angle BOC = \alpha, \angle AOC = \beta, \angle AOB = \gamma$, 则下列结论正确的是 ()



- A. 若平面 $VABC$ 是面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}R^2$ 的等边三角形, 则 $a=b=c=R$
- B. 若 $a^2+b^2=c^2$, 则 $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$
- C. 若 $a=b=c=\frac{\pi}{3}R$, 则球面 $O-ABC$ 的体积 $V>\frac{\sqrt{2}}{12}R^3$
- D. 若平面 $VABC$ 为直角三角形, 且 $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$, 则 $a^2+b^2=c^2$

【答案】BC

【分析】对于 B, 利用 $a=\alpha R, b=\beta R, c=\gamma R$ 代入易得; 对于 C, 先求得三棱锥 $O-ABC$ 的体积

$V_{O-ABC}=\frac{\sqrt{2}}{12}R^3$, 由球面 $O-ABC$ 的体积 $V>V_{O-ABC}$ 即得; 对于 A, 由条件知 $VABC$ 三边为 R , 推得

$a=b=c=\frac{\pi}{3}R$ 排除 A, 对于 D, 由余弦定理和题设可得 $\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma=1$, 取特殊值即可排除 D.

【解析】对于 A, 因等边三角形 $VABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}R^2$, 则 $AB=BC=AC=R$,

又 $OA=OB=OC=R$, 故 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$, 则 $a=b=c=\frac{\pi}{3}R$, 故 A 错误;

对于 B, 由 $a^2+b^2=c^2$ 可得 $(\alpha R)^2+(\beta R)^2=(\gamma R)^2$, 故 $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$, 即 B 正确;

对于 C, 由 $a=b=c=\frac{\pi}{3}R$ 可得, $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$, 故 $AB=BC=AC=R$.

由正弦定理, $VABC$ 的外接圆半径为 $\frac{1}{2}\frac{R}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}R}{3}$, 点 O 到平面 ABC 的距离 $h=\sqrt{R^2-\left(\frac{\sqrt{3}R}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}R$,

则三棱锥 $O-ABC$ 的体积 $V_{O-ABC}=\frac{1}{3}S_{VABC}\cdot h=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}R^2\times\frac{\sqrt{6}}{3}R=\frac{\sqrt{2}}{12}R^3$,

而球面 $O-ABC$ 的体积 $V>V_{O-ABC}=\frac{\sqrt{2}}{12}R^3$, 故 C 正确;

对于 D, 由余弦定理可知 $\begin{cases} BC^2=2R^2-2R^2\cos\alpha, \\ AC^2=2R^2-2R^2\cos\beta, \\ AB^2=2R^2-2R^2\cos\gamma, \end{cases}$ 由 $C=\frac{\pi}{2}$ 可得, $BC^2+AC^2=AB^2$,

即 $4R^2-2R^2\cos\alpha-2R^2\cos\beta=2R^2-2R^2\cos\gamma$, 化简得, $\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma=1$.

取 $\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}, \gamma = \frac{\pi}{2}$, 则 $a = b = \frac{\pi}{3}R, c = \frac{\pi}{2}R$, 则 $a^2 + b^2 = \frac{2\pi^2}{9}R^2 < \frac{\pi^2}{4}R^2 = c^2$, 故 D 错误.

故选: BC

三、填空题

12. 在 $\triangle ABC$ 中, $3\sin A = 2\sin C$, $\cos B = \frac{1}{3}$. 则 $\sin A =$ _____.

【答案】 $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

【分析】 根据正弦定理及余弦定理可得 $b = c$, 再由诱导公式及二倍角正弦公式求解.

【解析】 由正弦定理, $3\sin A = 2\sin C \Rightarrow 3a = 2c$,

所以由 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{3}$ 可得 $3a = 2b$,

所以 $b = c$, 所以 $B = C$,

所以 $\sin A = \sin(\pi - 2B) = \sin 2B = 2\sin B \cos B = 2 \times \sqrt{1 - \frac{1}{9}} \times \frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$.

故答案为: $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

13. 在锐角三角形 ABC 中, $A = B - \frac{\pi}{3}$, $\frac{BC}{AC} \in (\lambda, \mu)$, 则 $\mu - \lambda$ 的最小值为 _____.

【答案】 $\sqrt{3} - \frac{3}{2}$

【分析】 利用 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 求出角 B 的范围, 再利用正弦定理求出 $\frac{BC}{AC}$ 的范围即可得解.

【解析】 因 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 则 $\begin{cases} 0 < B - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} \\ 0 < B < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \pi - (2B - \frac{\pi}{3}) < \frac{\pi}{2} \end{cases}$, 解得 $\frac{5\pi}{12} < B < \frac{\pi}{2}$,

由正弦定理得 $\frac{BC}{AC} = \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin(B - \frac{\pi}{3})}{\sin B} = \frac{\sin B \cos \frac{\pi}{3} - \cos B \sin \frac{\pi}{3}}{\sin B} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\tan B}$,

$\tan \frac{5\pi}{12} = \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 + \sqrt{3}$, $\tan B$ 在 $(\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2})$ 上递增,

$\tan B > \tan \frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$, $0 < \frac{1}{\tan B} < 2 - \sqrt{3}$, 则 $2 - \sqrt{3} < \frac{BC}{AC} < \frac{1}{2}$,

依题意 $(2 - \sqrt{3}, \frac{1}{2}) \subseteq (\lambda, \mu)$, 即 $\lambda \leq 2 - \sqrt{3}, \mu \geq \frac{1}{2}$, 则 $\mu - \lambda \geq \frac{1}{2} - (2 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - \frac{3}{2}$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/807004023015010050>