6.4　平面向量的应用

6.4.1　平面几何中的向量方法

6.4.2　向量在物理中的应用举例

自主预习·新知导学

合作探究·释疑解惑

易　错　辨　析

自主预习・新知导学

一、用向量方法解决平面几何问题

1.想一想:向量可以解决哪些常见的平面几何问题?

提示:(1)解决有关夹角、长度等的计算或度量问题;(2)解决直线平行、垂直、三点共线、三线共点等位置关系的判断与证明问题.

2.由于向量的线性运算和数量积运算具有鲜明的几何背景,平面几何图形的许多性质,如全等、相似、长度、夹角等都可以由向量的__________及________表示出来,因此平面几何中的许多问题都可用向量运算的方法加以解决.

3.平面几何问题与平面向量之间的对应关系:

几何元素及其表示	向量及其运算
点 A	$\vec{\mathbf{OA}}$
线段 AB,A,B 两点间的距离	$\lvert\vec{\mathbf{AB}}\rvert$,$\lvert\vec{\mathbf{AB}}\rvert^2=\vec{\mathbf{AB}}^2$
夹角 $\angle AOB$	$\cos\angle AOB=\frac{\vec{\mathbf{OA}}\cdot\vec{\mathbf{OB}}}{\lvert\vec{\mathbf{OA}}\rvert\lvert\vec{\mathbf{OB}}\rvert}$
直线 $a\parallel b$	$\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$,$\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}(\lambda\in\mathbf{R})$
A,B,C 三点共线	$\vec{AB}=\lambda\vec{AC}(\lambda\in\mathbf{R})$
直线 $a\perp b$	$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$,$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$

4.用向量方法解决平面几何问题的“三步曲”:

(1)建立平面几何与向量的联系,用_____表示问题中涉及的几何元素,将平面几何问题转化为_____问题;

(2)通过_____运算,研究几何元素之间的关系,如距离、夹角等问题;

(3)把__________“翻译”成几何关系.

5.在平面直角坐标系Oxy中,已知点$A(-1,-2)$,$B(2,3)$,$C(-2,-1)$,以线段AB,AC为邻边的平行四边形的两条对角线的长分别是________,__________.

解析:以线段 AB,AC 为邻边的平行四边形的两条对角线长分别是$|\vec{AB}+\vec{AC}|$和$|\vec{AB}-\vec{AC}|$.

∵$\vec{AB}=(3,5)$,$\vec{AC}=(-1,1)$,

∴$\vec{AB}+\vec{AC}=(2,6)$,$\vec{AB}-\vec{AC}=(4,4)$,

∴$|\vec{AB}+\vec{AC}|=\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}$,$|\vec{AB}-\vec{AC}|=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$.

答案:$2\sqrt{10}$ $4\sqrt{2}$

二、向量在物理中的应用

1.物理中的动量mv,功$F\cdot s$是向量中的什么运算?

提示: 因为m是标量,v是矢量,所以mv为数乘运算;因为F和s均为矢量,所以$F\cdot s$为数量积运算.

2.(1)物理学中的许多量,如力、速度、加速度、位移都是_____.

(2)物理学中的力、速度、加速度、位移的合成与分解就是向量的_____运算.

3.利用向量方法解决物理问题的基本步骤:

①问题转化,即把物理问题转化为数学问题;

②建立模型,即建立以向量为载体的数学模型;

③求解参数,即求向量的模、夹角、数量积等;

④回答问题,即把所得的数学结论回归到物理问题.

4.(1)已知三个力F_1=(-2,-1),F_2=(-3,2),F_3=(4,-3)同时作用于某物体上一点,为使物体保持平衡,现加上一个力F_4,则F_4等于(　　)

A.(-1,-2)　B.(1,-2)

C.(-1,2)　D.(1,2)

(2)已知速度$|v_1|$=10 m/s,$|v_2|$=12 m/s,且v_1与v_2的夹角为60°,则v_1与v_2的合速度的大小是(　　)

A.2 m/s　B.10 m/s $2\sqrt{91}$ m/s

C.12 m/s　D.

解析:(1)由已知$F_1+F_2+F_3+F_4=0$,

故$F_4=-(F_1+F_2+F_3)=-[(-2,-1)+(-3,2)+(4,-3)]=-(-1,-2)=(1,2)$.

(2) ∵$|v_1+v_2|^2=|v_1|^2+2v_1\cdot v_2+|v_2|^2$

$=100+2\times10\times12\cos 60°+144=364$,

∴$|v|=2\sqrt{91}$(m/s).

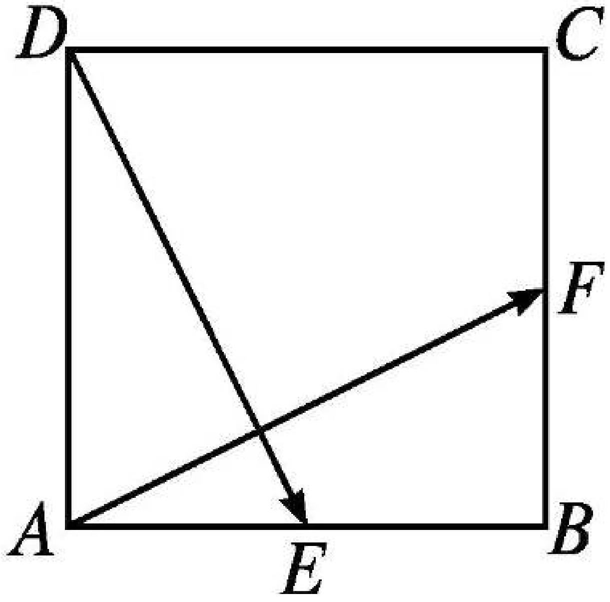
答案:(1)D　(2)D

合作探究·释疑解惑

探究一　探究二　探究三

探究一 平面向量在几何证明中的应用

【例1】 如图所示,在正方形$ABCD$中,E,F分别是AB,BC的中点,求证:$AF\perp DE$.



证法一:设$\vec{AD}$=a,$\vec{AB}$=b,

则|a|=|b|,a·b=0.

因为$\vec{DE}=\vec{DA}+\vec{AE}$=-a+$\frac{b}{2}$,$\vec{AF}=\vec{AB}+\vec{BF}$=b+$\frac{a}{2}$,

所以$\vec{AF}\cdot\vec{DE}=\quad b+\frac{a}{2}\quad\cdot\quad -a+\frac{b}{2}$

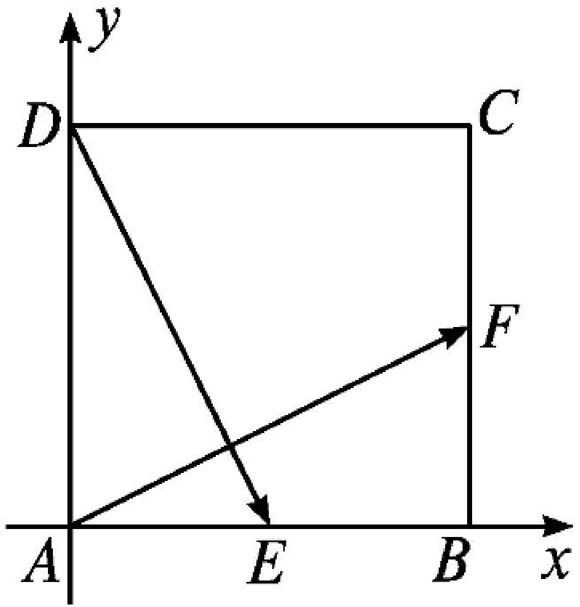
$=-\frac{1}{2}a^2-\frac{3}{4}a\cdot b+\frac{b^2}{2}=-\frac{1}{2}|a|^2+\frac{1}{2}|b|^2=0.$

故$\vec{AF}\perp\vec{DE}$,

即 $AF\perp DE$.

证法二:如图所示,建立平面直角坐标系,设正方形的边长为2,

则$A(0,0)$,$D(0,2)$,$E(1,0)$,$F(2,1)$,



则$\vec{AF}=(2,1)$,$\vec{DE}=(1,-2)$.

因为$\vec{AF}\cdot\vec{DE}=2\times1+1\times(-2)=0$,所以$\vec{AF}\perp\vec{DE}$,即 $AF\perp DE$.

方法总结

用向量证明平面几何问题的两种基本方法

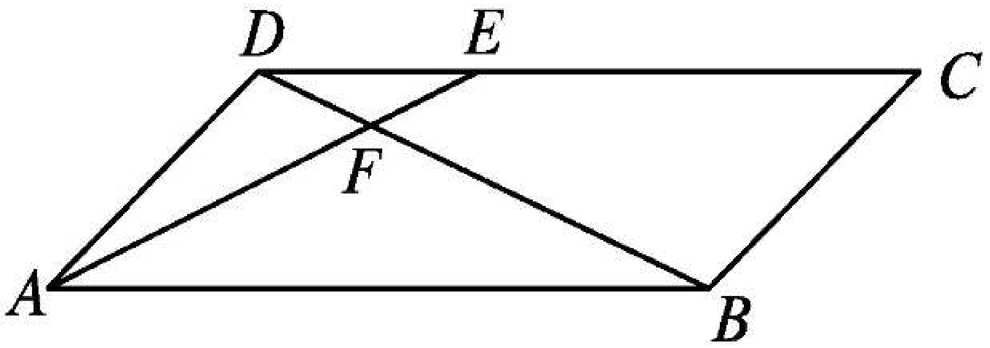
(1)基向量法:

步骤为:①选取基底;②用基底表示相关向量;③利用向量的线性运算或数量积找相应关系;④把计算所得结果转化为几何问题.

(2)坐标法:

步骤为:①建立适当的平面直角坐标系;②把相关向量坐标化;③用向量的坐标运算找相应关系;④利用向量关系回答几何问题.

【变式训练 1】 如图,在平行四边形 $ABCD$ 中,已知 $DE=\frac{1}{3}AB$, $DF=\frac{1}{4}DB$,求证:A,E,F 三点共线.



证明:因为 $DE=\frac{1}{3}AB,DF=\frac{1}{4}DB$,

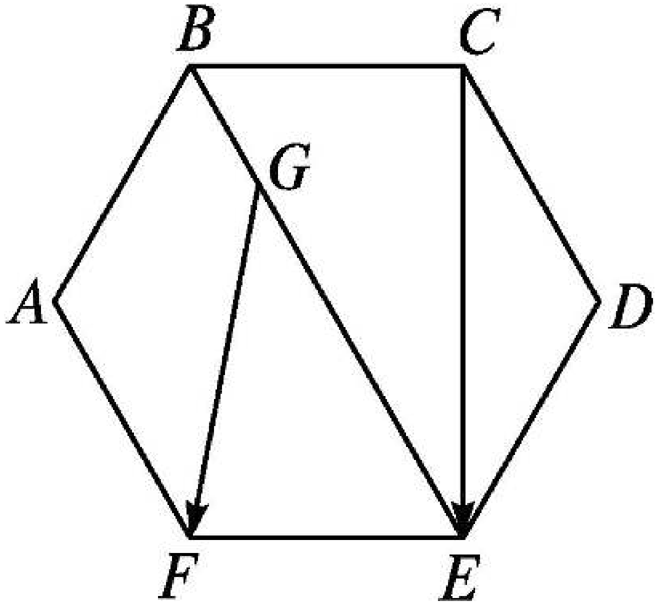
所以$\vec{DE}=\frac{1}{3}\vec{AB},\vec{DF}=\frac{1}{4}\vec{DB}=\frac{1}{3}\vec{FB}$.

于是$\vec{EF}=\vec{DF}-\vec{DE}=\frac{1}{3}\vec{FB}-\frac{1}{3}\vec{AB}=\frac{1}{3}\vec{FB}+\frac{1}{3}\vec{BA}=\frac{1}{3}\vec{FA}$,

因此$\vec{EF}\parallel\vec{FA}$,又因为$\vec{EF},\vec{FA}$有公共点 F,所以 A,E,F 三点共线.

探究二　平面向量在几何求值中的应用

【例2】 (1)已知边长为2的正六边形$ABCDEF$,连接BE,CE,点G是线段BE上靠近点B的四等分点,连接GF,则 $\vec{GF}\cdot\vec{CE}$等于(　　)



A.-6　　B.-9

C.6　　D.9