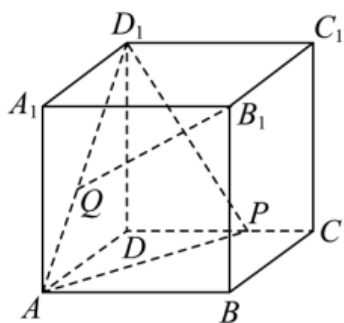


专题 18 立体几何中的正方体

一、单选题

1. (2024 届江西省全南中学高三上学期开学考试) 棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 在棱 CD 上运动, 点 Q 在侧面 ADD_1A_1 上运动, 满足 $B_1Q \perp$ 平面 AD_1P , 则线段 PQ 的最小值为 ()



A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

B. 1

C. $\sqrt{2}$

D. $\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】以 D 为坐标原点, DA, DC, DD_1 分别为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系,

则 $A(1, 0, 0), D_1(0, 0, 1), B_1(1, 1, 1)$, 设 $P(0, m, 0), 0 \leq m \leq 1, Q(n, 0, t)$,

所以 $\vec{B_1Q} = (n, 0, t) - (1, 1, 1) = (n-1, -1, t-1)$, $\vec{AD_1} = (-1, 0, 1), \vec{AP} = (0, m, 0) - (1, 0, 0) = (-1, m, 0)$,

因为 $B_1Q \perp$ 平面 AD_1P , 所以 $\vec{B_1Q} \cdot \vec{AD_1} = (n-1, -1, t-1) \cdot (-1, 0, 1) = 1-n+t-1 = t-n = 0$, 故 $t = n$,

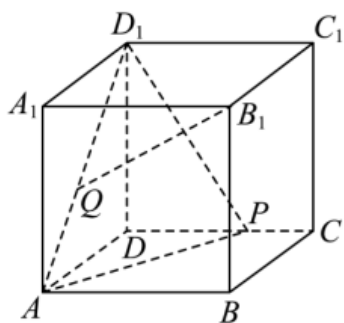
$\vec{B_1Q} \cdot \vec{AP} = (n-1, -1, t-1) \cdot (-1, m, 0) = 1-n-m = 0$, 故 $m = 1-n$, 其中 $\vec{PQ} = (n, 0, t) - (0, m, 0) = (n, -m, t)$,

故 $|\vec{PQ}|^2 = n^2 + m^2 + t^2 = 2n^2 + (1-n)^2 = 3n^2 - 2n + 1 = 3\left(n - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$, 故当 $n = \frac{1}{3}$ 时, $|\vec{PQ}|_{\min}^2 = \frac{2}{3}$, 此时

专题 18 立体几何中的正方体

一、单选题

1. (2024 届江西省全南中学高三上学期开学考试) 棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 在棱 CD 上运动, 点 Q 在侧面 ADD_1A_1 上运动, 满足 $B_1Q \perp$ 平面 AD_1P , 则线段 PQ 的最小值为 ()



A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

B. 1

C. $\sqrt{2}$

D. $\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】以 D 为坐标原点, DA, DC, DD_1 分别为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系,

则 $A(1, 0, 0), D_1(0, 0, 1), B_1(1, 1, 1)$, 设 $P(0, m, 0), 0 \leq m \leq 1, Q(n, 0, t)$,

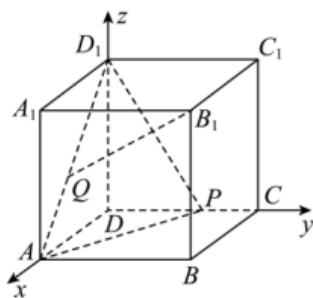
所以 $\vec{B_1Q} = (n, 0, t) - (1, 1, 1) = (n-1, -1, t-1)$, $\vec{AD_1} = (-1, 0, 1), \vec{AP} = (0, m, 0) - (1, 0, 0) = (-1, m, 0)$,

因为 $B_1Q \perp$ 平面 AD_1P , 所以 $\vec{B_1Q} \cdot \vec{AD_1} = (n-1, -1, t-1) \cdot (-1, 0, 1) = 1-n+t-1 = t-n = 0$, 故 $t = n$,

$\vec{B_1Q} \cdot \vec{AP} = (n-1, -1, t-1) \cdot (-1, m, 0) = 1-n-m = 0$, 故 $m = 1-n$, 其中 $\vec{PQ} = (n, 0, t) - (0, m, 0) = (n, -m, t)$,

故 $|\vec{PQ}|^2 = n^2 + m^2 + t^2 = 2n^2 + (1-n)^2 = 3n^2 - 2n + 1 = 3\left(n - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$, 故当 $n = \frac{1}{3}$ 时, $|\vec{PQ}|_{\min}^2 = \frac{2}{3}$, 此时

$m=1-n=\frac{2}{3}$ 满足要求，所以线段 PQ 的最小值为 $\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. 故选 A

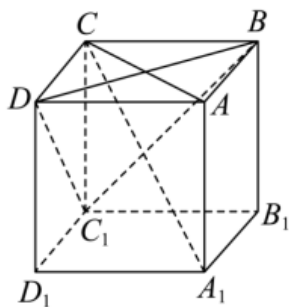


2. (2024 届江苏省南京市高三上学期 9 月学情调研) 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 过点 B 的平面 α 与直线 A_1C 垂直, 则 α 截该正方体所得截面的形状为 ()

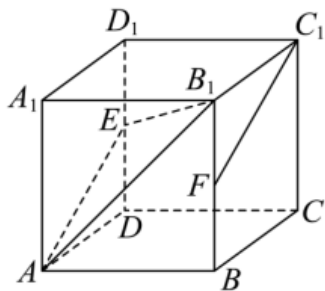
- A. 三角形 B. 四边形 C. 五边形 D. 六边形

【答案】A

【解析】连接 BD, BC_1, C_1D, AC , 因为 $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$, $BD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $AA_1 \perp BD$, 又四边形 $ABCD$ 为正方形, 所以 $AC \perp BD$, 又 $AA_1 \cap AC = A$, $AA_1, AC \subset$ 平面 AA_1C , 所以 $BD \perp$ 平面 AA_1C , 因为 $A_1C \subset$ 平面 AA_1C , 所以 $BD \perp A_1C$, 同理可证明 $BC_1 \perp A_1C$, 因为 $BC_1 \cap BD = B$, $BC_1, BD \subset$ 平面 BC_1D , 故 $A_1C \perp$ 平面 BC_1D , 故平面 α 即为平面 BC_1D , 则 α 截该正方体所得截面的形状为三角形. 故选 A



3. (2024 届江西省万安中学高三上学期开学考试) 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为线段 DD_1 的中点, F 为线段 BB_1 的中点. 直线 FC_1 到平面 AB_1E 的距离为 ().



A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

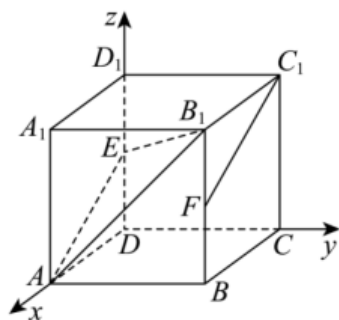
B. $\frac{\sqrt{30}}{5}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{1}{3}$

【答案】D

【解析】Q $AE \subset \text{平面 } FC_1$, $FC_1 \not\subset \text{平面 } AB_1E$, $AE \subset \text{平面 } AB_1E$, $\therefore FC_1 \not\subset \text{平面 } AB_1E$, 因此直线 FC_1 到平面 AB_1E 的距离等于点 C_1 到平面 AB_1E 的距离, 如图, 以 D 点为坐标原点, DA 所在的直线为 x 轴, DC 所在的直线为 y 轴, DD_1 所在的直线为 z 轴, 建立直角坐标系.



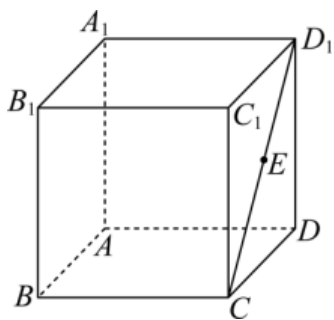
则 $A(1,0,0), B_1(1,1,1), C_1(0,1,1), E(0,0,\frac{1}{2}), F(1,1,\frac{1}{2})$, $\overrightarrow{FC_1} = (-1,0,\frac{1}{2}), \overrightarrow{AE} = (-1,0,\frac{1}{2}), \overrightarrow{AB_1} = (0,1,1), \overrightarrow{C_1B_1} = (1,0,0)$

设平面 AB_1E 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AE} = -x + \frac{1}{2}z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB_1} = y + z = 0 \end{cases}, \text{ 令 } z = 2, \text{ 则 } \vec{n} = (1, -2, 2), \text{ 设点 } C_1 \text{ 到平面 } AB_1E \text{ 的距离为 } d, \text{ 则 } d = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{C_1B_1}|}{|\vec{n}|} = \frac{1}{3}$$

故直线 FC_1 到平面 AB_1E 的距离为 $\frac{1}{3}$. 故选 D.

4. (2023 届山西省百师联盟高三下学期联考) 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为 CD_1 上的动点, 则 AE 与平面 AA_1B_1B 所成角的正切值不可能为 ()



A. 1

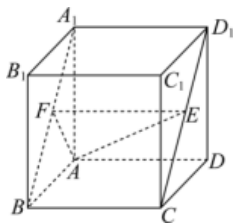
B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

C. $\sqrt{2}$

D. $\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】如图,



在 A_1B 上取点 F ，使得 $A_1F = D_1E$ ，连接 EF ，由 $BF = CE$ ， $BF \parallel CE$ 可知四边形 $FBCE$ 为平行四边形，则

$EF = BC = 2$ ，因为 $BC \perp$ 平面 AA_1B_1B ， $BC \parallel EF$ ，所以 $EF \perp$ 平面 AA_1B_1B ，

所以 AE 与平面 AA_1B_1B 所成角为 $\angle EAF$ ， $\tan \angle EAF = \frac{EF}{AF} = \frac{2}{AF}$ ，而 $AF \in [\sqrt{2}, 2]$ 。

所以 $\tan \angle EAF \in [1, \sqrt{2}]$ 。显然 $\sqrt{3} \notin [1, \sqrt{2}]$ ，故 D 不可能。故选 D

5. (2024 届湖北省荆州市沙市中学高三上学期 9 月月考) 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4， E, F 分别为 BC_1 和 C_1D_1 的中点， P 为线段 BD_1 上的动点， Q 为上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 内的动点，下列判断正确的是 ()

①三棱锥 $P-B_1EF$ 的体积是定值；②若 $FQ \perp DP$ 恒成立，则线段 FQ 的最大值为 $2\sqrt{2}$ ；③当 DQ 与 DA_1 所成的角为 45° 时，点 Q 的轨迹为双曲线的一部分；

A. ①②

B. ②③

C. ①③

D. ①②③

【答案】A

【解析】如图 (1) 所示，因为点 E 为 BC_1 的中点，又由 F 是 C_1D_1 的中点，可得 $EF \parallel BD_1$ ，

又因为点 P 为 BD_1 上的动点，所以点 P 到直线 EF 的距离等于点 E 到 BD_1 的距离，

所以点 P 到直线 EF 的距离等于点 C_1 到直线 BD_1 的距离的一半，

因为正方体的棱长为 4，可得 $C_1D_1 = 4, BC_1 = 4\sqrt{2}, BD_1 = 4\sqrt{3}$ ，

因为 $C_1D_1 \perp$ 面 BB_1C_1C ，且 $BC_1 \subset$ 面 BB_1C_1C ，所以 $C_1D_1 \perp BC_1$ ，

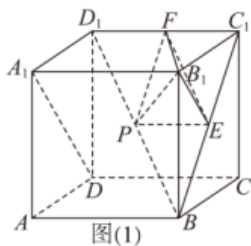
可得点 C_1 到直线 BD_1 的距离为 $\frac{4 \times 4\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ ，所以点 P 到直线 EF 的距离 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ，

所以 $\triangle EFP$ 的面积为 $S_{\triangle EFP} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{2}$ ，

由 $B_1E \perp BC_1, C_1D_1 \perp B_1E$ ，且 $BC_1 \cap C_1D_1 = C_1$ ， $BC_1, C_1D_1 \subset$ 平面 EFP ，

所以 $B_1E \perp$ 平面 EFP ，且 $B_1E = 2\sqrt{2}$ ，

所以三棱锥 $P-B_1EF$ 的体积为 $V_{P-B_1EF} = V_{B_1-EFP} = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = \frac{8}{3}$ (定值)，所以①正确；



图(1)

如图(2)所示，以 D 为原点，以 DA, DC, DD_1 所在的直线分别为 x 轴、 y 轴和 z 轴，建立空间直角坐标系，

可得 $D(0,0,0), B(4,4,0), F(0,2,4)$ ，设 $\vec{BP} = \lambda \vec{BD_1} = (-4\lambda, -4\lambda, 4\lambda), 0 < \lambda < 1$ ，由

$\vec{DP} = \vec{DB} + \vec{BP} = (4-4\lambda, 4-4\lambda, 4\lambda)$ ，设 $Q(x, y, 4)$ ，则 $\vec{FQ} = (x, y-2, 0)$ ，

因为 $FQ \perp DP$ ，所以 $(4-4\lambda)x + (4-4\lambda)(y-2) = 0$ ，可得 $x + y = 2$ ，

所以 $|\vec{FQ}| = \sqrt{x^2 + (y-2)^2 + 0} = \sqrt{2}|y-2|$ ，

又因为 $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4$ 且 $x + y = 2$ ，可得 $0 \leq y \leq 2$ ，

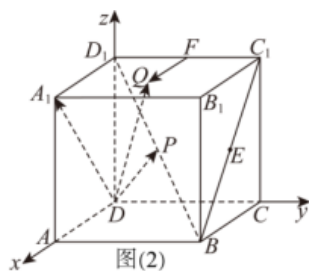
所以当 $y = 0$ 时，线段 FQ 取得最大值，最大值为 $2\sqrt{2}$ ，所以②正确；

因为 $\vec{DQ} = (x, y, 4), \vec{DA_1} = (4, 0, 4)$ ，又因为 DQ 与 DA_1 的所成的角为 45° ，

所以 $\cos 45^\circ = \frac{|\vec{DQ} \cdot \vec{DA_1}|}{|\vec{DQ}| |\vec{DA_1}|} = \frac{|4x + 16|}{\sqrt{x^2 + y^2 + 16} \times \sqrt{32}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

整理得 $y^2 = 8x$ 且 $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4$ ，所以点 Q 的轨迹为抛物线的一部分，所以③错误。

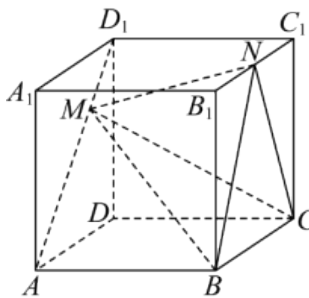
故选 A.



图(2)

6. (2024 届四川省成都外国语学校高三上学期入学考试) 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

点 M, N 分别在线段 AD_1 和 B_1C_1 上. 给出下列四个结论中所有正确结论的个数有 () 个



① MN 的最小值为 1

② 四面体 $NMBC$ 的体积为 $\frac{1}{3}$

③ 存在无数条直线 MN 与 AD_1 垂直

④ 点 M, N 为所在边中点时, 四面体 $NMBC$ 的外接球半径为 $\frac{3}{4}$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】B

【解析】对于①:因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正方体, 所以 $C_1D_1 \perp$ 平面 ADD_1A_1 , $C_1D_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1 ,

又因为 $AD_1 \subset$ 平面 ADD_1A_1 , $B_1C_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1 , 所以 $C_1D_1 \perp AD_1$, $C_1D_1 \perp B_1C_1$, 即 C_1D_1 是 AD_1 与 B_1C_1 的公垂线段, 因为公垂线段是异面直线上两点间的最短距离,

所以当 M, N 分别与 D_1, C_1 重合时, MN 最短为 1, 故①正确;

对于②, 因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正方体,

所以平面 $ADD_1A_1 \parallel$ 平面 BCC_1B_1 , 且 $AD_1 \subset$ 平面 ADD_1A_1 , 所以 $AD_1 \parallel$ 平面 NBC ,

当点 M 在 AD_1 上运动时, 点 M 到平面 NBC 的距离不变, 距离 $h=1$,

由 $B_1C_1 \parallel BC$ 可知, 当点 N 在 B_1C_1 上运动时, N 到 BC 的距离不变,

所以 $S_{\triangle NBC}$ 的面积不变,

所以 $V_{M-NBC} = \frac{1}{3} S_{\triangle NBC} \times h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{6}$. 所以②错误;

对于③, 连接 A_1D, B_1C , 因为 $A_1B_1 \perp$ 平面 ADD_1A_1 , $AD_1 \subset$ 平面 ADD_1A_1 ,

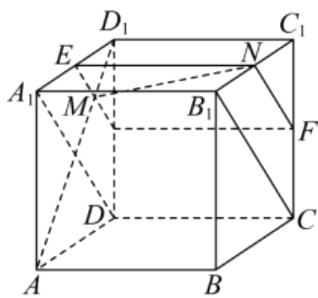
且 $A_1B_1 \parallel C_1D_1$, 所以 $AD_1 \perp C_1D_1$,

又 $A_1D \perp AD_1$, $A_1D \perp A_1B_1 = A_1$, $A_1D, A_1B_1 \subset$ 平面 A_1B_1CD ,

所以 $AD_1 \perp$ 平面 A_1B_1CD , 当 N 不在线段 B_1C_1 端点时,

过 N 作 $NE \parallel A_1B_1$ 交 A_1D_1 于 E , 过 N 作 $NF \parallel B_1C$ 交 CC_1 于 F ,

平面 NEF 交线段 AD_1 于 M ,



因为 $NE \not\subset$ 平面 A_1B_1CD , $A_1B_1 \subset$ 平面 A_1B_1CD ,

故 $NE \parallel$ 平面 A_1B_1CD , 同理 $NF \parallel$ 平面 A_1B_1CD ,

又 $NE \cap NF = N, NE, NF \subset$ 平面 NEF ,

所以平面 $NEF \parallel$ 平面 A_1B_1CD ,

故 $AD_1 \perp$ 平面 NEF , 又 $MN \subset$ 平面 NEF ,

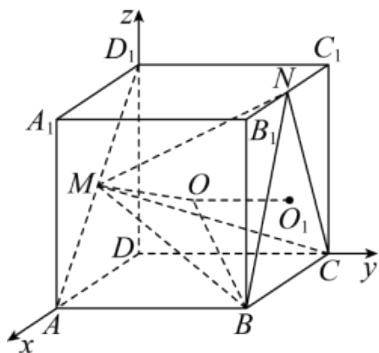
所以 $MN \perp AD_1$, 因为点 N 在线段 B_1C_1 上,

所以存在无数条直线 $MN \perp AD_1$, 故③正确;

对于④,如图,以点 D 为原点, 以 DA, DC, DD_1 所在直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系,

则 $M(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), N(\frac{1}{2}, 1, 1), B(1, 1, 0), C(0, 1, 0)$,

所以 $NB = BC = \frac{\sqrt{5}}{2}, \sin \angle NBC = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,



则 $\triangle NBC$ 的外接圆的半径为 $r = \frac{NC}{2 \sin \angle NBC} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{2 \times \frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{5}{8}$.

所以可得等腰 $\triangle NBC$ 的外接圆圆心为 $O_1(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{8})$,

设四面体 $NMBC$ 的外接球球心为 O , 则 $OO_1 \perp$ 平面 NBC ,

所以可设四面体 $NMBC$ 的外接球球心为 $O(\frac{1}{2}, t, \frac{3}{8})$,

由 $OM = OC = OB$, 可得 $t^2 + (\frac{3}{8} - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} + (t-1)^2 + (\frac{3}{8})^2$, 解得 $t = \frac{11}{16}$,

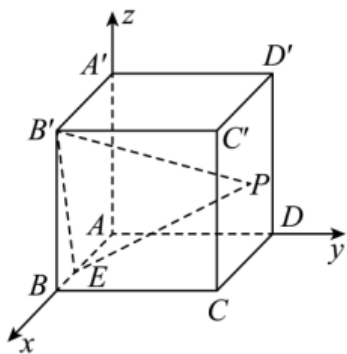
所以四面体 $NMBC$ 的外接球的半径为 $R = \sqrt{(\frac{11}{16})^2 + (\frac{3}{8} - \frac{1}{2})^2} = \frac{5\sqrt{5}}{16}$, 故④错误. 故选 B.

7. 已知正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱长为 3, E 为棱 AB 上的靠近点 B 的三等分点, 点 P 在侧面 $CC'D'D$ 上运动, 当平面 $B'EP$ 与平面 $ABCD$ 和平面 $CC'D'D$ 所成的角相等时, 则 $D'P$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ B. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ C. $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ D. $\frac{7\sqrt{10}}{10}$

【答案】A

【解析】如图, 以 A 为原点建立空间直角坐标系, 正方体棱长为 3,



则 $E(2, 0, 0)$, $B'(3, 0, 3)$, $D'(0, 3, 3)$, 设 $P(x, 3, z)$, 则 $\vec{EB'} = (1, 0, 3)$, $\vec{EP} = (x-2, 3, z)$,

由正方体的性质可得平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\vec{n_1} = (0, 0, 1)$, 平面 $CC'D'D$ 的一个法向量 $\vec{n_2} = (0, 1, 0)$,

设平面 $B'EP$ 的法向量 $\vec{n_3} = (a, b, c)$, 则 $\begin{cases} \vec{EB'} \cdot \vec{n_3} = 0 \\ \vec{EP} \cdot \vec{n_3} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} a + 3c = 0 \\ (x-2)a + 3b + zc = 0 \end{cases}$,

取 $c = 1$, 则 $a = -3$, $b = x - \frac{z}{3} - 2$, 故 $\vec{n_3} = (-3, x - \frac{z}{3} - 2, 1)$,

又平面 $B'EP$ 与平面 $ABCD$ 和平面 $CC'D'D$ 所成的角相等, 故 $|\cos \langle \vec{n_1}, \vec{n_3} \rangle| = |\cos \langle \vec{n_2}, \vec{n_3} \rangle|$, 即 $\frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_3}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_3}|} = \frac{|\vec{n_2} \cdot \vec{n_3}|}{|\vec{n_2}| \cdot |\vec{n_3}|}$,

故 $1 = |x - \frac{z}{3} - 2|$, 即 $x - \frac{z}{3} - 2 = 1$, $x - \frac{z}{3} - 2 = -1$.

①当 $x - \frac{z}{3} - 2 = 1$, 即 $x = \frac{z}{3} + 3$ 时, 因为 $x \in [0, 3]$, 所以 $z \in [-9, 0]$,

又 $z \in [0, 3]$, 则 $z = 0$, $x = 3$, 此时 $PD' = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$.

②当 $x - \frac{z}{3} - 2 = -1$ ，即 $x = \frac{z}{3} + 1$ 时，因为 $x \in [0, 3]$ ，所以 $z \in [-3, 6]$ ，

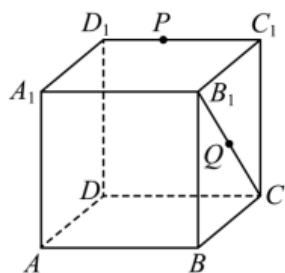
又 $z \in [0, 3]$ ，故 $z \in [0, 3]$ ，

$$\text{此时 } PD' = \sqrt{x^2 + (z-3)^2} = \sqrt{\left(\frac{z}{3} + 1\right)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{\frac{10}{9}z^2 - \frac{16}{3}z + 10},$$

$$\text{故当 } z = \frac{-\frac{16}{3}}{-2 \times \frac{10}{9}} = \frac{12}{5} \in [0, 3] \text{ 时 } PD' = \sqrt{\frac{10}{9}z^2 - \frac{16}{3}z + 10} \text{ 取最小值 } \frac{3\sqrt{10}}{5}.$$

综上 PD' 的最小值为 $\frac{3\sqrt{10}}{5}$. 故选 A

8. (2024 届安徽省安庆、池州、铜陵三市部分学校高三上学期开学联考) 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, P, Q 分别为棱 C_1D_1 , B_1C 上的动点, 则四面体 $PQAD$ 的体积最大值为 ()



A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{2}$

【答案】A

【解析】过点 Q 作 $QG \parallel B_1C_1$ 交 CC_1 于 G ，连接 PG, GD, DP ，

又 $Q B_1C_1 \parallel BC \parallel AD$

$\therefore QG \parallel AD$ ，又 $QG \not\subset$ 平面 PAD ，且 $AD \subset$ 平面 PAD ，

$\therefore QG \parallel$ 平面 PAD ，

$$\text{则 } V_{Q-PAD} = V_{G-PAD} = V_{A-PGD},$$

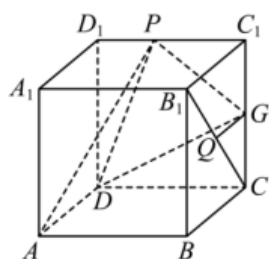
设 $CG = t$ ， $PD_1 = s$ ，则 $t, s \in [0, 1]$ ，

$$S_{\triangle PGD} = 1 - \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}(1-s)(1-t) = \frac{1}{2}(1-st),$$

故四面体 $PQAD$ 的体积

$$V_{Q-PAD} = V_{A-PGD} = \frac{1}{3} S_{\triangle PGD} \cdot AD = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}(1-st) = \frac{1}{6}(1-st),$$

当 $st=0$ 时，其最大值为 $\frac{1}{6}$. 故选 A.



9 (2023 届河南省 TOP 二十名校高三下学期 3 月调研模拟) 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a ， M 为

A_1B_1 中点， P 为平面 $ABCD$ 内一动点，若平面 MPC_1 与平面 ABB_1A_1 和平面 $ABCD$ 所成锐二面角相等，则点 P 到 C 的最短距离是 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ B. $\frac{1}{2}a$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}a$ D. a

【答案】C

【解析】先证明一个结论：若平面 ABC 与平面 PBC 所成二面角为 θ ，且 $PA \perp$ 平面 ABC ，则

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle PBC} \cdot \cos \theta.$$

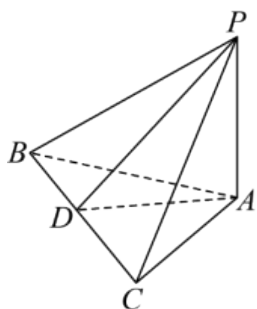
证明：作 $AD \perp BC$ ，垂足为 D ，连 PD ，

因为 $PA \perp$ 平面 ABC ， $BC \subset$ 平面 ABC ，所以 $PA \perp BC$ ，

又 $PA, AD \subset$ 平面 PAD ， $PA \cap AD = A$ ，所以 $BC \perp$ 平面 PAD ，

因为 $PD \subset$ 平面 PAD ，所以 $BC \perp PD$ ，所以 $\angle PDA = \theta$ ，

在直角三角形 PAD 中， $\cos \theta = \frac{AD}{PD} = \frac{\frac{1}{2}AD \cdot BC}{\frac{1}{2}PD \cdot BC} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle PBC}}$ ，即 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle PBC} \cdot \cos \theta$ 。



设平面 MPC_1 与平面 ABB_1A_1 和平面 $ABCD$ 所成锐二面角为 θ ，取 AB 的中点 N ，作 $PH \perp AB$ ，垂足为 H ，

则三角形 MPC_1 在平面 $ABCD$ 内的射影是三角形 NPC ，在平面 ABB_1A_1 内的射影是三角形 MHB_1 ，

又 $A_1D_1 \perp BA_1 = A_1$, $A_1D_1, BA_1 \subset \text{面 } BA_1D_1$, 则 $AB_1 \perp \text{面 } BA_1D_1$,

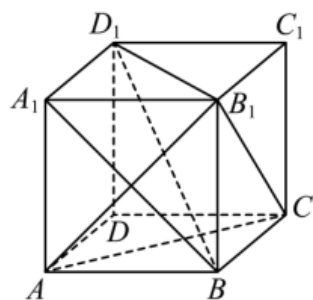
由 $BD_1 \subset \text{面 } BA_1D_1$, 则 $AB_1 \perp BD_1$, 同理 $AC \perp BD_1$,

$AB_1 \perp AC = A$, $AB_1, AC \subset \text{面 } ACB_1$, 则 $BD_1 \perp \text{面 } ACB_1$,

所以 BD_1 垂直于面 ACB_1 所有直线, 且 $A \in \text{面 } ACB_1$,

若 $AM \perp BD_1$, 则 M 在边长为 $\sqrt{2}$ 的正 $\triangle ACB_1$ 的边上,

故轨迹图形面积为 $\frac{1}{2} \times (\sqrt{2})^2 \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ①对;



若 F, G 分别为 CD, AB 中点, 连接 AF, FC_1, B_1G, GC, CB_1 ,

由正方体的性质易得 $AE \parallel B_1G \parallel FC_1$, $AE = B_1G = FC_1$,

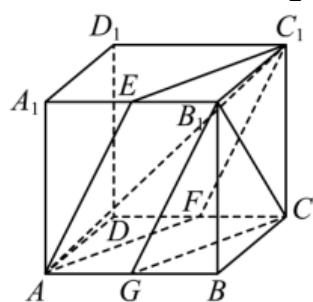
所以 A, E, C_1, F 共面, 且 AEC_1F 为平行四边形, 故面 AEC_1 即为面 AEC_1F ,

由 $AE \subset \text{面 } AEC_1F$, $B_1G \not\subset \text{面 } AEC_1F$, 则 $B_1G \parallel \text{面 } AEC_1F$,

同理可得 $CG \parallel \text{面 } AEC_1F$, $B_1G \cap CG = G$, $B_1G, CG \subset \text{面 } B_1CG$,

所以面 $B_1CG \parallel \text{面 } AEC_1F$, 要使 $B_1M \parallel \text{面 } AEC_1$, 则 M 在 $\triangle B_1CG$ 的边上,

所以轨迹长为 $\sqrt{2} + 2 \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{2} + \sqrt{5}$, ②错;



若 G, I, J 分别为 AB, AD, A_1D_1 的中点, 连接 EG, GI, IJ, JE , 显然 $EG \parallel IJ$,

所以 E, G, I, J 共面, 即 $E, G, I, J \in \text{面 } EGIJ$,

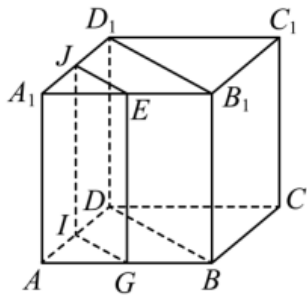
由 $EG \parallel BB_1$, $EG \not\subset \text{面 } D_1B_1BD$, $BB_1 \subset \text{面 } D_1B_1BD$, 则 $EG \parallel \text{面 } D_1B_1BD$,

又 $IG \parallel BD$, 同理可得 $IG \parallel \text{面 } D_1B_1BD$, $EG \cap IG = G$, $EG, IG \subset \text{面 } EGIJ$,

所以面 $D_1B_1BD \parallel$ 面 $EGIJ$ ，故面 $EGIJ$ 内任意直线都与面 D_1B_1BD 平行，

要使 $EM \parallel$ 平面 D_1B_1BD ，则 M 在四边形 $EGIJ$ 的边上运动，

此时轨迹长为 $2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \times 1 = \sqrt{2} + 2$ ，③对；



若 H, I, K, L, N 分别是 $AA_1, A_1B_1, B_1C_1, CC_1, CD$ 的中点，并依次连接，

易知 $ENLKI H$ 为正六边形，显然 $EH \parallel AB_1$ ， $EN \parallel IK \parallel AC$ ，

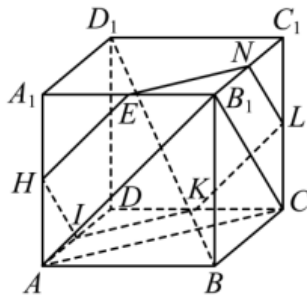
由 $EH \not\subset$ 面 ACB_1 ， $AB_1 \subset$ 面 ACB_1 ，则 $EH \parallel$ 面 ACB_1 ，同理可得 $EN \parallel$ 面 ACB_1 ，

$EH \cap EN = E$ ， $EH, EN \subset$ 面 $ENLKI H$ ，所以面 $ENLKI H \parallel$ 面 ACB_1 ，

由 $BD_1 \perp$ 面 ACB_1 ，则 $BD_1 \perp$ 面 $ENLKI H$ ，故 BD_1 垂直于面 $ENLKI H$ 所有直线，

要使 $EN \perp BD_1$ ，则 M 在边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的正六边形 $ENLKI H$ 边上运动，

所以轨迹图形面积为 $6 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ，④对；



故选 C

11. (2024 届辽宁省十校联合体高三上学期八月调研) 已知一个棱长为 2 的正方体，点 A, C 是其内切球上两点， B, D 是其外接球上两点，连接 AB, CD ，且线段 AB, CD 均不穿过内切球内部，当四面体 $A-BCD$ 的体积取得最大值时，异面直线 AD 与 BC 的夹角的余弦值为 () .

A. $\frac{\sqrt{2}}{13}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{12}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

D. $\frac{2}{3}$

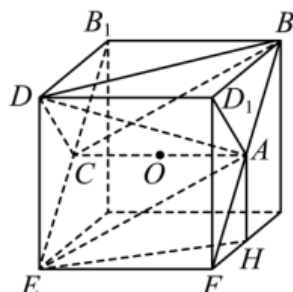
【答案】D

【解析】由正方体棱长为 2，知其内切球的半径为 1，外接球的半径 $\frac{\sqrt{2^2+2^2+2^2}}{2} = \sqrt{3}$ ，

依题意知， AB, CD 最长为 $\sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1} = \sqrt{2}$ ， AC 最长为内切球的直径 2，

由三角形面积公式 $S = \frac{1}{2}ab\sin C$ ，若 a, b 为定值时， $C = \frac{\pi}{2}$ 时面积最大，

画出图形如图所示，其中 A, C 分别是所在正方形的中心， O 是内切球与外接球的球心，



由正方体性质知 $CD \parallel AD_1$ ， $CD = AD_1$ ， $CB_1 \parallel AB$ ， $CB_1 = AB$ ，

又 $V_{A-BCD} = \frac{1}{3}V_{ABD_1-CB_1D} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABD_1} \cdot AC$ ，故此时四面体 $A-BCD$ 的体积取得最大，

因为 $CE \parallel AB$ ， $CE = AB$ ，所以四边形 $ABCE$ 是平行四边形，

所以 $BC \parallel AE$ ，所以 $\angle DAE$ 异面直线 AD 与 BC 所成的角，

在 $\triangle DAE$ 中， $DA = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6}$ ， $EA = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

由余弦定理得 $\cos \angle DAE = \frac{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{6})^2 - 2^2}{2 \times \sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{2}{3}$ ，故选 D

12. (2023 届浙江省金丽衢十二校、“七彩阳光”高三下学期 3 月联考) 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 α 经过点 B, D ，平面 β 经过点 A, D_1 ，当平面 α, β 分别截正方体所得截面面积最大时，平面 α, β 所成的锐二面角大小为 ()

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 75°

【答案】C

【解析】平面 α 经过点 B, D 且截正方体所得截面面积最大时，平面 α 与面 BDB_1D_1 重合，

证明：设平面 α 与面 BCD 所成的二面角为 θ ，二面角 C_1-BD-C 为 γ ，

当 $\theta \in \left[\gamma, \frac{\pi}{2}\right]$ 时，记平面 α 截正方体所得截面为面 $BDEF$ ， $\frac{C_1E}{C_1D_1} = \frac{C_1F}{C_1B_1} = \lambda, \lambda \in (0, 1], AB = 1$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/807024021142006141>

