关　　系

- 关系的概念
- 关系性质
- 复合关系与逆关系
- 关系的闭包
- 等价关系与集合的划分
- 偏序关系与偏序集
- 函数
- 复合函数与逆函数

关系的闭包

❖定义1　设*R*是*A*上的关系，如果*A*上的关系*R'*满足如下条件：

（1）　*R'*是自反的

（2）　$R' \supseteq R$

（3）若R''是自反的，且　$R'' \supseteq R$ 则必有　$R'' \supseteq R'$.

❖则称*R'*是*R*的自反闭包记为*r*(*R*)

传递的

传递的

传递

t(R)

关系的闭包

从关系的闭包定义可以看出，一个关系的闭包实际上就是求取满足**指定性质**（自反的，对称的，传递的）的且包含原关系中的**所有序偶并元素最少**的关系。

关系的闭包

定理1 $r(R) = R \cup I_A$

证明:

(1) $r(R) = R' = R \cup I_A$是自反的

(2) $R' \supseteq R$

(3) R'是满足条件的且序偶（元素个数）最少的

定理1 $r(R) = R \cup I_A$

证明：设$R' = R \cup I_A$对于$\forall x \in A$, $\because (x, x) \in I_A$ 且$I_A \subseteq R \cup I_A$

$\therefore (x, x) \in R'$，故R'是自反的（闭包定义的第一点）

由集合并运算可知， $R \subseteq R \cup I_A = R'$（闭包定义的第二点）

设R''是集合A上的另一个自反关系，且$R \subseteq R''$

对于$\forall x, y \in A$,且$(x, y) \in R' = R \cup I_A$

或者$(x, y) \in I_A$ 或者$(x, y) \in R$

若$(x, y) \in I_A$, 则$x=y$， $\because R''$是自反的， $\therefore (x, y) \in R''$

若$(x, y) \in R$， $\because R \subseteq R''$ $\therefore (x, y) \in R''$

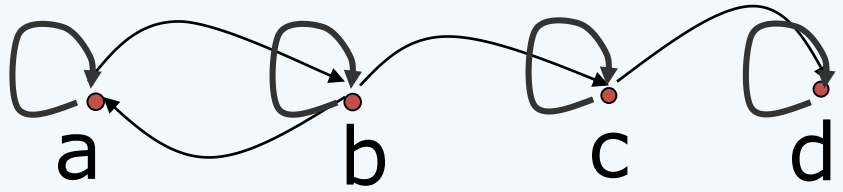
总之 $R' \subseteq R''$ （闭包定义的第三点）

应用定理1　r(R) = R ∪ I_A 求关系的自反闭包。

例:A={a,b,c,d}
R={(a,b),(b,a),(b,c),(c,d)}

r(R)={(a,b),(b,a),(b,c),(c,d),
(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)}

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{M}_{r(R)} = M_R \vee M_{I_A}$$

定理2　$s(R) = R \cup R^{-1}$

证明:

(1) $s(R) = R' = R \cup R^{-1}$是对称的

(2) $R' \supseteq R$

(3) R'是满足条件的且序偶最少的

定理2　$s(R) = R \cup R^{-1}$

证明：设$R' = R \cup R^{-1}$

对于$\forall x, y \in A$, 设$(x, y) \in R'$

则 或者$(x, y) \in R$ 或者$(x, y) \in R^{-1}$

若$(x, y) \in R$，则$(y, x) \in R^{-1}$

若$(x, y) \in R^{-1}$，则$(y, x) \in (R^{-1})^{-1} = R$

∴ $(y, x) \in R \cup R^{-1} = R'$， R′是对称的

(闭包定义的第一点)

由集合并运算可知， $R \subseteq R \cup R^{-1} = R'$

(闭包定义的第二点)

设R″是集合A上的另一个对称关系，且$R \subseteq R''$

对于$\forall x, y \in A$,且$(x, y) \in R' = R \cup R^{-1}$

或者$(x, y) \in R$ 或者$(x, y) \in R^{-1}$

若$(x, y) \in R$，∵ $R \subseteq R''$， ∴ $(x, y) \in R''$

若$(x, y) \in R^{-1}$，则 $(y, x) \in R$ ∵R 是对称的

∴ $(x, y) \in R$，则 $(x, y) \in R''$

总之 $R' \subseteq R''$ (闭包定义的第三点)

使用定理**2**使用。

例 :A={a,b,c,d}

R={(a,b),(b,a),(b,c),(c,d)}

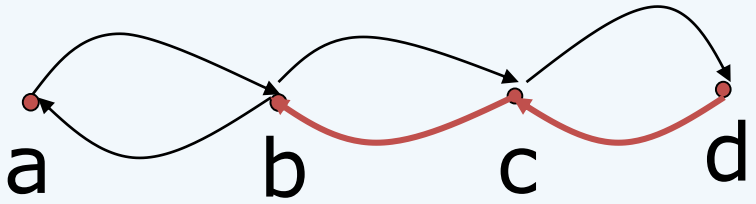
R^{-1} ={(b,a),(a,b),(c,b),(d,c)}

s(R)= R∪R^{-1}=

{(a,b),(b,a),(b,c), (c,d),(c,b),(d,c)}

M_R M^T_R

$$\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$



$$\mathbf{M}_{s(R)} = M_R \vee M^T_R \quad \begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

定理3 $t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$

证明：

(1) t(R) = $R'=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$ 是传递的

(2) $R'\supseteq R$

(3) R' 是满足条件的且序偶最少的

关系的闭包

例:A={a,b,c,d}

R={(a,b),(b,a),(b,c),(c,d)}

R^2={(a,a),(b,b),(b,d),(a,c)}

R^3= R^2 o R={(a,b),(b,a),(b,c),(a,d)}

R^4={(a,a),(b,b),(b,d),(a,c)}=R^2 ,R^5=R^3 ,R^6=R^2

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/807105132061006042