

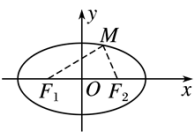
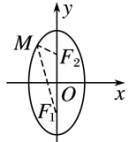
3.1.1 椭圆的标准方程

【考点梳理】

考点一：椭圆的定义

1. 定义：平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离的和等于常数(大于 $|F_1F_2|$) 的点的轨迹.
2. 焦点：两个定点 F_1, F_2 .
3. 焦距：两焦点间的距离 $|F_1F_2|$.
4. 几何表示： $|MF_1| + |MF_2| = 2a$ (常数) 且 $2a \geq |F_1F_2|$.

考点二：椭圆的标准方程

	焦点在 x 轴上	焦点在 y 轴上
标准方程	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$	$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$
图形		
焦点坐标	$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$	$F_1(0, -c), F_2(0, c)$
a, b, c 的关系	$b^2 = a^2 - c^2$	

考点三：求轨迹方程的方法

直译法——“四步一回头”，

四步：(1) 建立适当坐标系，设出动点 M 的坐标 (x, y) ；

(2) 写出适合条件的点 M 的集合 $P = \{M \mid P(M)\}$ ；

(3) 将 $P(M)$ “翻译”成代数方程 $f(x, y) = 0$ ；

(4) 化简代数方程 $f(x, y) = 0$ 为最简形式.

【题型归纳】

题型一：利用椭圆的定义求方程

1. (2023 秋·上海浦东新·高二校考) 平面内点 P 到 $F_1(-3,0)$ 、 $F_2(3,0)$ 的距离之和是 10, 则动点 P 的轨迹方程是 ()

- A. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ B. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
C. $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$ D. $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{16} = 1$

【答案】B

【分析】求出 a, b, c 即可得出动点 P 的轨迹方程.

【详解】由题意,

平面内点 P 到 $F_1(-3,0)$ 、 $F_2(3,0)$ 的距离之和是 10,

$\therefore$ 动点 P 的轨迹 E 为椭圆, 焦点在轴上,

$c=3, 2a=10$, 解得: $a=5$,

$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 16$,

$\therefore$ 轨迹方程为: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$,

故选: B.

2. (2022 秋·江苏淮安·高二校联考期中) 若动点 $P(x, y)$ 满足方程 $\sqrt{x^2 + (y+2)^2} + \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 4\sqrt{2}$, 则动点 P 的轨迹方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ B. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$
C. $\frac{y^2}{8} + \frac{x^2}{4} = 1$ D. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$

【答案】C

【分析】根据方程可以利用几何意义得到动点 P 的轨迹方程是以 $A(0, -2)$ 与 $B(0, 2)$ 为焦点的椭圆方程, 从而求出轨迹方程.

【详解】由题意得: $P(x, y)$ 到 $A(0, -2)$ 与 $B(0, 2)$ 的距离之和为 $4\sqrt{2}$, 且 $4\sqrt{2} > 4$,

故动点 P 的轨迹方程是以 $A(0, -2)$ 与 $B(0, 2)$ 为焦点的椭圆方程, 故 $2a = 4\sqrt{2}$, $c = 2$,

所以 $a = 2\sqrt{2}$, $b^2 = a^2 - c^2 = 8 - 4 = 4$, 所以椭圆方程为 $\frac{y^2}{8} + \frac{x^2}{4} = 1$.

故选: C

3. (2023·全国·高二专题练习) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过坐标原点的直线交 E 于 P, Q 两点, 且 $PF_2 \perp F_2Q$, 且 $S_{\triangle PF_2Q} = 4, |PF_2| + |F_2Q| = 6$, 则椭圆 E 的标准方程为 ()

A. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

B. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$

C. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

D. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

【答案】C

【分析】根据椭圆的定义可求 $a=3$ ，结合三角形的面积可求 c ，进而可得答案.

【详解】如图，连接 PF_1, QF_1 ，由椭圆的对称性得四边形 PF_1QF_2 为平行四边形，

所以 $|PF_2| + |F_2Q| = |PF_2| + |PF_1| = 2a = 6$ ，得 $a = 3$.

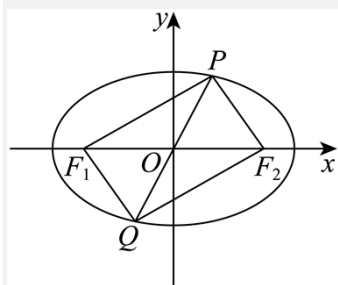
又因为 $PF_2 \perp F_2Q$ ，所以四边形 PF_1QF_2 为矩形，设 $|PF_2| = m, |QF_2| = n$ ，

则 $S_{\triangle PF_2Q} = \frac{1}{2}mn = 4$ ，所以 $\begin{cases} m+n=6, \\ mn=8, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} m=4 \\ n=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=2 \\ n=4 \end{cases}$ ；

则 $|F_1F_2| = 2\sqrt{5}$ ，则 $c = \sqrt{5}, b^2 = a^2 - c^2 = 4$ ，

椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

故选:C.



题型二：椭圆的焦点三角形问题

4. (2023 秋·河南许昌·高二统考期末) 已知 F_1, F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的两个焦点，过 F_1 的直线交椭圆于 A, B 两点，

若 $|F_2A| + |F_2B| = 10$ ，则 $|AB| = (\quad)$

A. 8

B. 6

C. 4

D. 2

【答案】B

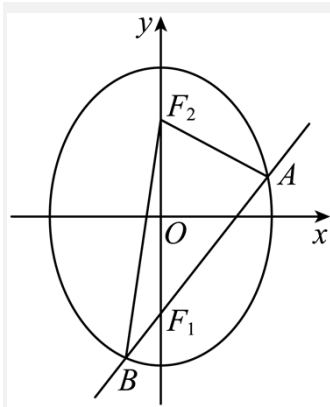
【分析】根据椭圆的定义，结合焦点三角形的周长即可求解.

【详解】由 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ ，即 $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{9} = 1$ ，可得 $a = 4$ ，

根据椭圆的定义 $|F_1A| + |F_2A| + |F_1B| + |F_2B| = 4a = 16$ ，

所以 $|AB| = |F_1A| + |F_1B| = 6$.

故选：B.



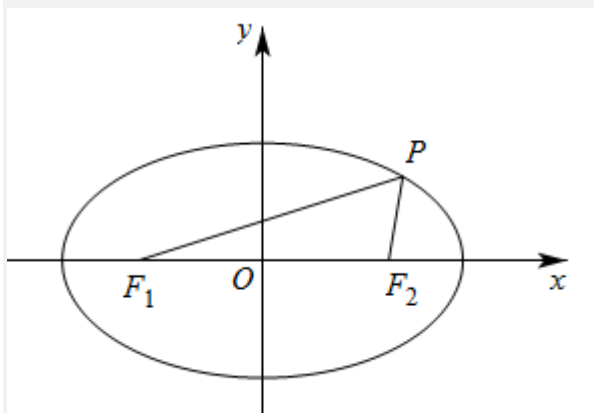
5. (2023 秋·山东菏泽·高二山东省鄄城县第一中学校考阶段练习) 已知点 P 是椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上一点, 椭圆的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 , 且 $\cos \angle F_1 P F_2 = \frac{1}{3}$, 则 $\triangle P F_1 F_2$ 的面积为 ()

- A. 6 B. 12 C. $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ D. $2\sqrt{2}$

【答案】C

【分析】设 $|P F_1| = m$, $|P F_2| = n$, 由椭圆定义得 $m + n = 10$, 由余弦定理求出 $mn = \frac{27}{2}$, 从而利用三角形面积公式求出答案.

【详解】由椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, 得 $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$.



设 $|P F_1| = m$, $|P F_2| = n$,

$\therefore m + n = 10$, 在 $\triangle P F_1 F_2$ 中, 由余弦定理可得: $(2c)^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cdot \cos \angle F_1 P F_2 = (m + n)^2 - 2mn - 2mn \cdot \frac{1}{3}$,

可得 $64 = 100 - \frac{8}{3}mn$, 得 $mn = \frac{27}{2}$,

故 $S_{\triangle P F_1 F_2} = \frac{1}{2}mn \cdot \sin \angle F_1 P F_2 = \frac{1}{2} \times \frac{27}{2} \times \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$.

故选: C.

6. (2023·全国·高二专题练习) 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点, 点 P 在椭圆 C 上. 当 $\angle F_1 P F_2$ 最大时, 求

$$S_{\triangle PF_1F_2} = (\quad)$$

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\sqrt{3}$

D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【答案】C

【分析】利用椭圆的定义结合余弦定理可得 $|PF_1|=|PF_2|$ 时 $\angle F_1PF_2$ 最大，利用三角形的面积公式即得.

【详解】由椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的方程可得 $a^2 = 4$, $b^2 = 3$, $c = 1$, 则 $|PF_1| + |PF_2| = 2a = 4$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \cos \angle F_1PF_2 &= \frac{|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|PF_1| \cdot |PF_2|} = \frac{(|PF_1| + |PF_2|)^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2| - |F_1F_2|^2}{2|PF_1| \cdot |PF_2|} \\ &= \frac{12}{2|PF_1| \cdot |PF_2|} - 1 \geq \frac{6}{\left(\frac{|PF_1| + |PF_2|}{2}\right)^2} - 1 = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

当且仅当 $|PF_1| = |PF_2|$ 时等号成立，即 P 为椭圆短轴端点时 $\angle F_1PF_2$ 最大，

$$\text{此时, } S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

故选：C.

题型三：根据方程表示椭圆求参数问题

7. (2023·江苏·高二专题练习) 已知曲线 $C: \frac{x^2}{k-5} + \frac{y^2}{3-k} = -1$ ，则“ $4 \leq k < 5$ ”是“曲线 C 表示焦点在 y 轴上的椭圆”的()

A. 必要不充分条件

B. 充分不必要条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【分析】根据曲线 C 表示焦点在 y 轴上的椭圆，列不等式求出 k 的取值范围，结合充分必要条件的定义即可判断.

【详解】将曲线 C 的方程化为 $\frac{x^2}{k-5} + \frac{y^2}{k-3} = 1$,

若曲线 C 表示焦点在 y 轴上的椭圆，则 $k-3 > 5-k > 0$ ，即 $4 < k < 5$ ，

而“ $4 \leq k < 5$ ”不能推出“ $4 < k < 5$ ”；“ $4 < k < 5$ ”可以推出“ $4 \leq k < 5$ ”，

故“ $4 \leq k < 5$ ”是“曲线 C 表示焦点在 y 轴上的椭圆”的必要不充分条件.

故选：A.

8. (2021 秋·江苏南通·高二统考期中) 已知方程 $\frac{x^2}{5-m} + \frac{y^2}{3+m} = 1$ 表示焦点在 x 轴上的椭圆，则实数 m 的取值范围是

()

A. $(-3, 1)$

B. $(-3, 5)$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/807124110144006120>