

C. 存在 $m > 0$, 使方程 $x^2 + x - m = 0$ 无实根

D. 存在 $m \leq 0$ ，使方程 $x^2 + x - m = 0$ 有实根

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x \geq 0 \\ x^2 - 2x, & x < 0 \end{cases}$ ，若关于 x 的不等式 $[f(x)]^2 + af(x) < 0$ 恰有 1 个整数解，则实数 a 的最大值

为 ()

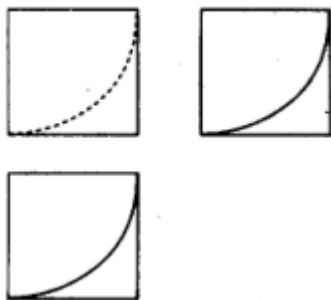
A. 2

B. 3

C. 5

D. 8

7. 一个几何体的三视图如图所示，正视图、侧视图和俯视图都是由一个边长为 a 的正方形及正方形内一段圆弧组成，则这个几何体的表面积是 ()



A. $\left(3 - \frac{\pi}{4}\right)a^2$

B. $\left(6 - \frac{\pi}{2}\right)a^2$

C. $\left(6 - \frac{\pi}{4}\right)a^2$

D. $\left(6 - \frac{3\pi}{4}\right)a^2$

8. 计算 $\log_2 \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{5\pi}{3} \right)$ 等于 ()

A. $-\frac{3}{2}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $-\frac{2}{3}$

D. $\frac{2}{3}$

9. 函数 $f(x) = \sin 2x + m \sin x + 3x$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减的充要条件是 ()

A. $m \leq -3$

B. $m \leq -4$

C. $m \leq -\frac{8\sqrt{3}}{3}$

D. $m \leq 4$

10. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$ ，则不等式 $f(e^{1-x}) > f(e^{2x-1})$ 的解集是 ()

A. $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$

B. $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$

C. $(-\infty, 0)$

D. $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$

11. 已知 $i(1 - ai) = 2 + bi$ (i 为虚数单位, $a, b \in \mathbf{R}$), 则 ab 等于 ()

A. 2

B. -2

C. $\frac{1}{2}$

D. $-\frac{1}{2}$

12.

百年双中的校训是“仁”、“智”、“雅”、“和”.在 2019 年 5 月 18 日的高三趣味运动会中有这样一个小游戏.袋子中有大小、形状完全相同的四个小球,分别写有“仁”、“智”、“雅”、“和”四个字,有放回地从中任意摸出一个小球,直到“仁”、“智”两个字都摸到就停止摸球.小明同学用随机模拟的方法恰好在第三次停止摸球的概率.利用电脑随机产生 1 到 4 之间(含 1 和 4)取整数值的随机数,分别用 1, 2, 3, 4 代表“仁”、“智”、“雅”、“和”这四个字,以每三个随机数为一组,表示摸球三次的结果,经随机模拟产生了以下 20 组随机数:

141 432 341 342 234 142 243 331 112 322

342 241 244 431 233 214 344 142 134 412

由此可以估计,恰好第三次就停止摸球的概率为()

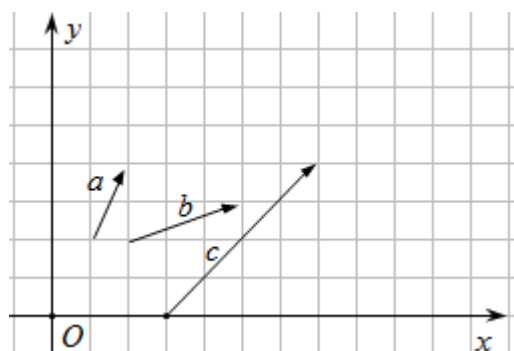
- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + 9, & x \leq 1, \\ x + \frac{4}{x} + a, & x > 1, \end{cases}$, 若 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)$, 则实数 a 的取值范围是_____

14. (5 分) 已知 x 为实数, 向量 $a = (2, -1)$, $b = (1, x)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $|2a + b| =$ _____.

15. 如图所示, 直角坐标系中网格小正方形的边长为 1, 若向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 满足 $(2\vec{a} + t\vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$, 则实数 t 的值为_____.



16. 在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = -8 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \frac{t}{2} \end{cases}$ (t 为参数), 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3s^2 \\ y = 2\sqrt{3}s \end{cases}$ (s 为

参数)。

(1) 求直线 l 和曲线 C 的普通方程;

(2) 设 P 为曲线 C 上的动点, 求点 P 到直线 l 距离的最小值及此时 P 点的坐标.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 设函数 $f(x) = 2\ln(x+1) + \frac{x^2}{x+1}$.

(I) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(II) 如果对所有的 $x \geq 0$, 都有 $f(x) \leq ax$, 求 a 的最小值;

(III) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 且 $(1 - a_{n+1})(1 + a_n) = 1$, 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求证:

$$S_n > \frac{a_{n+1}}{2a_n} - \ln a_{n+1}.$$

18. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos\alpha \\ y = 2 + 2\sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数, 以坐标原点 O 为极点, x 轴

的正半轴为极轴, 取相同长度单位建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 4\cos\theta$.

(1) 求曲线 C_1 的极坐标方程和曲线 C_2 的普通方程;

(2) 设射线 $OP: \theta = \frac{\pi}{6}$ 与曲线 C_1 交于不同于极点的点 A , 与曲线 C_2 交于不同于极点的点 B , 求线段 AB 的长.

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = 2x^3 + mx^2 + m + 1$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上的最小值为 -3 , 求 m 的值.

20. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(1, \frac{3}{2})$ 且椭圆的左、右焦点与短轴的端点构成的四边形的面积为

$$2\sqrt{3}.$$

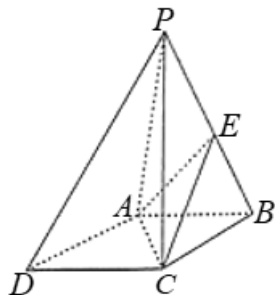
(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 设 A 是椭圆的左顶点, 过右焦点 F 的直线 l_1 , 与椭圆交于 P, Q , 直线 AP, AQ 与直线 $l_2: x = 4$ 交于 M, N , 线段 MN 的中点为 E .

①求证: $EF \perp PQ$;

②记 $\triangle VPQE$, $\triangle PME$, $\triangle VONE$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3 , 求证: $\frac{S_1}{S_2 + S_3}$ 为定值.

21. (12 分) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $\angle BAD = 120^\circ$, $PA = 2, PB = PC = PD$, E 是 PB 的中点.



(1) 证明: $PD \parallel$ 平面 AEC ;

(2) 设 F 是线段 DC 上的动点, 当点 E 到平面 PAF 距离最大时, 求三棱锥 $P-AFE$ 的体积.

22. (10 分) 已知在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a=1, A=\frac{\pi}{6}$, 且 $\sqrt{3}c-2b=1$.

(1) 求 $\cos C$ 的值;

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. A

【解析】

设 $\begin{cases} a = \cos \alpha \\ b = \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow a \sin \theta + b \cos \theta = \sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha = \sin(\theta + \alpha) \leq 1$ 成立; 反之, $a = b = 0$ 满足

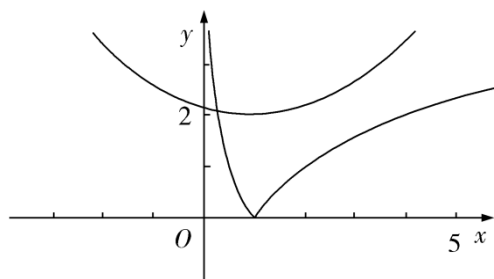
$a \sin \theta + b \cos \theta \leq 1$, 但 $a^2 + b^2 \neq 1$, 故选 A.

2. D

【解析】

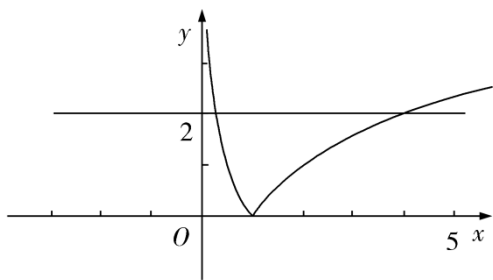
由题意得, $N\{f(x) \otimes g(x)\} = 6$ 表示不等式 $|\log_2 x| < a(x-1)^2 + 2$ 的解集中整数解之和为 6.

当 $a > 0$ 时, 数形结合 (如图) 得 $|\log_2 x| < a(x-1)^2 + 2$ 的解集中的整数解有无数多个, $|\log_2 x| < a(x-1)^2 + 2$ 解集中的整数解之和一定大于 6.

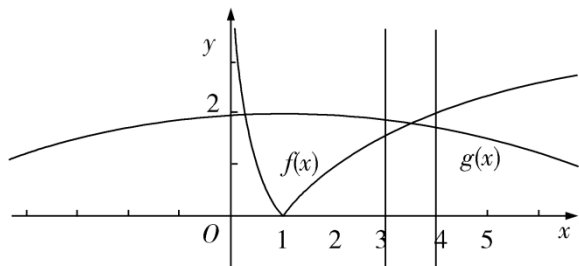


当 $a = 0$ 时, $g(x) = 2$, 数形结合 (如图), 由 $f(x) < 2$ 解得 $\frac{1}{4} < x < 4$. 在 $(\frac{1}{4}, 4)$ 内有 3 个整数解, 为 1, 2, 3, 满足

$N\{f(x) \otimes g(x)\} = 6$, 所以 $a = 0$ 符合题意.



当 $a < 0$ 时，作出函数 $f(x) = |\log_2 x|$ 和 $g(x) = a(x-1)^2 + 2$ 的图象，如图所示.



若 $N\{f(x) \otimes g(x)\} = 6$ ，即 $|\log_2 x| < a(x-1)^2 + 2$ 的整数解只有 1, 2, 3.

只需满足 $\begin{cases} f(3) < g(3) \\ f(4) \geq g(4) \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} \log_2 3 < 4a + 2 \\ 2 \geq 9a + 2 \end{cases}$ ，解得 $\frac{\log_2 3 - 2}{4} < a \leq 0$ ，所以 $\frac{\log_2 3 - 2}{4} < a < 0$.

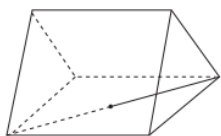
综上，当 $N\{f(x) \otimes g(x)\} = 6$ 时，实数 a 的取值范围是 $(\frac{\log_2 3 - 2}{4}, 0]$. 故选 D.

3. C

【解析】

作出三视图所表示几何体的直观图，可得直观图为直三棱柱，并且底面为等腰直角三角形，即可求得外接球的半径，即可得外接球的体积.

【详解】



如图为几何体的直观图，上下底面为腰长为 $\sqrt{2}$ 的等腰直角三角形，三棱柱的高为 4，其外接球半径为 $r = 2\sqrt{2}$ ，所以

$$\text{体积为 } V = \frac{4}{3} \pi \times (2\sqrt{2})^3 = \frac{64\sqrt{2}}{3} \pi.$$

故选：C

【点睛】

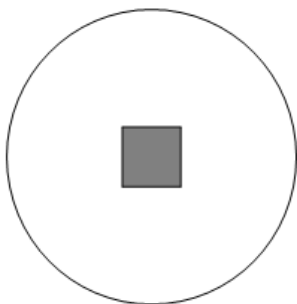
本题考查三视图还原几何体的直观图、球的体积公式，考查空间想象能力、运算求解能力，求解时注意球心的确定.

4. B

【解析】

结合随机模拟概念和几何概型公式计算即可

【详解】



如图，由几何概型公式可知： $\frac{S_{\text{正}}}{S_{\text{圆}}} = \frac{4^2}{\pi \cdot 10^2} \approx \frac{51}{1000} \Rightarrow \pi \approx 3.137$.

故选：B

【点睛】

本题考查随机模拟的概念和几何概型，属于基础题

5. A

【解析】

只需将“存在”改成“任意”，有实根改成无实根即可.

【详解】

由特称命题的否定是全称命题，知“存在 $m > 0$ ，使方程 $x^2 + x - m = 0$ 有实根”的否定是

“任意 $m > 0$ ，使方程 $x^2 + x - m = 0$ 无实根”.

故选：A

【点睛】

本题考查含有一个量词的命题的否定，此类问题要注意在两个方面作出变化：1.量词，2.结论，是一道基础题.

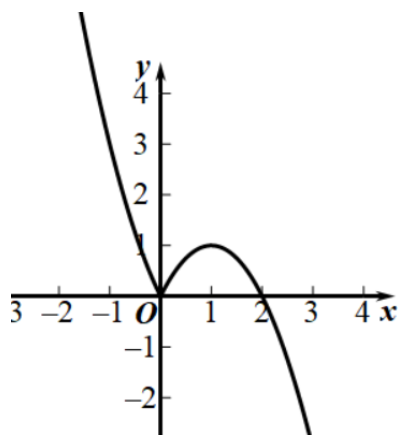
6. D

【解析】

画出函数 $f(x)$ 的图象，利用一元二次不等式解法可得解集，再利用数形结合即可得出.

【详解】

解：函数 $f(x)$ ，如图所示



$$[f(x)]^2 + af(x) < 0 \Rightarrow f(x)(f(x) + a) < 0$$

当 $a > 0$ 时, $-a < f(x) < 0$,

由于关于 x 的不等式 $[f(x)]^2 + af(x) < 0$ 恰有 1 个整数解

因此其整数解为 3, 又 $f(3) = -9 + 6 = -3$

$$\therefore -a < -3 < 0, \quad -a \geq f(4) = -8, \quad \text{则 } 3 < a \leq 8$$

当 $a = 0$ 时, $[f(x)]^2 < 0$, 则 $a = 0$ 不满足题意;

当 $a < 0$ 时, $0 < f(x) < -a$

当 $0 < -a \leq 1$ 时, $0 < f(x) < -a$, 没有整数解

当 $-a > 1$ 时, $0 < f(x) < -a$, 至少有两个整数解

综上, 实数 a 的最大值为 8

故选: D

【点睛】

本题主要考查了根据函数零点的个数求参数范围, 属于较难题.

7. C

【解析】

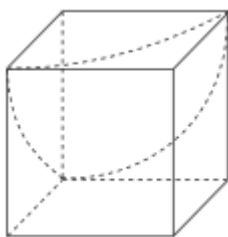
画出直观图, 由球的表面积公式求解即可

【详解】

这个几何体的直观图如图所示, 它是由一个正方体中挖掉 $\frac{1}{8}$ 个球而形成的, 所以它的表面积为

$$S = 3a^2 + 3\left(a^2 - \frac{\pi a^2}{4}\right) + \frac{1}{8} \times 4\pi a^2 = \left(6 - \frac{\pi}{4}\right)a^2.$$

故选：C



【点睛】

本题考查三视图以及几何体的表面积的计算，考查空间想象能力和运算求解能力.

8. A

【解析】

利用诱导公式、特殊角的三角函数值，结合对数运算，求得所求表达式的值.

【详解】

$$\text{原式} = \log_2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \times \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right) \right] = \log_2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \times \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) \right] = \log_2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} \right] = \log_2 2^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}.$$

故选：A

【点睛】

本小题主要考查诱导公式，考查对数运算，属于基础题.

9. C

【解析】

先求导函数，函数在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 上单调递减则 $f'(x) \leq 0$ 恒成立，对导函数不等式换元成二次函数，结合二次函数的性质和图象，列不等式组求解可得.

【详解】

依题意， $f'(x) = 2\cos 2x + m\cos x + 3 = 4\cos^2 x + m\cos x + 1$,

令 $\cos x = t$ ，则 $t \in [\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ ，故 $4t^2 + mt + 1 \leq 0$ 在 $[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ 上恒成立；

结合图象可知，
$$\begin{cases} 4 \times \frac{1}{4} + m \times \frac{1}{2} + 1, & 0 \\ 4 \times \frac{3}{4} + m \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1, & 0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} m, & -4 \\ m, & -\frac{8\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

故 $m \leq -\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/807144101056006164>