

江西省九江市第三中学 2023-2024 学年高三模拟考试（一）数学试题试卷

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂；非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

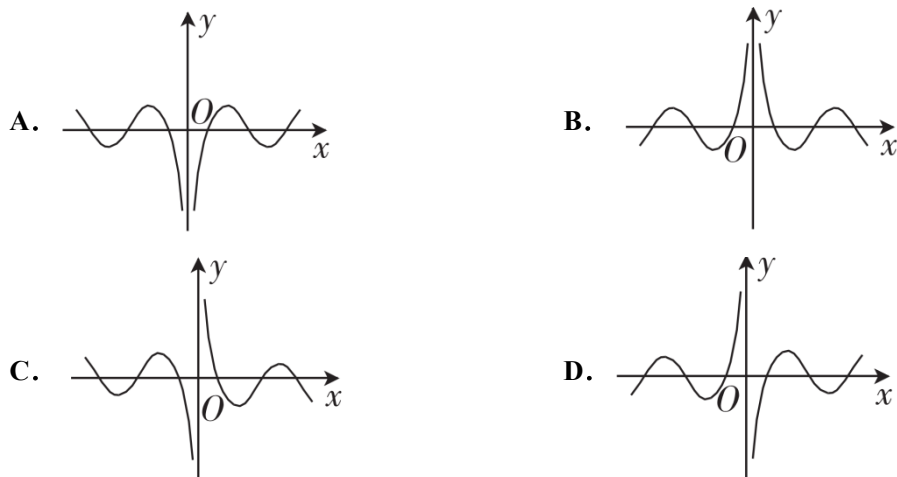
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 对于任意 $x \in \mathbf{R}$ ，函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x) = -f(x)$ ，且当 $x \leq 1$ 时，函数 $f(x) = \sqrt{x-1}$. 若

$a = f\left(\frac{1}{2}\right), b = f\left(-\frac{1}{2}\right), c = f\left(-\frac{1}{3}\right)$ ，则 a, b, c 大小关系是（ ）

- A. $b < c < a$ B. $b < a < c$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$

2. 函数 $f(x) = \cos 2x + \frac{2\cos 2x}{2^x - 1}$ 的图象大致是（ ）



3. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 0 \leq 2x + y \leq 6 \\ 3 \leq x - y \leq 6 \end{cases}$ ，则 $z = x + 2y$ 的最大值为（ ）

- A. 10 B. 8 C. 5 D. 3

4. 中心在原点，对称轴为坐标轴的双曲线 C 的两条渐近线与圆 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 都相切，则双曲线 C 的离心率是（ ）

- A. 2 或 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. 2 或 $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}$ 或 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

5. 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，已知 $AB \perp BC$ ， $AB = BC = 2$ ， $CC_1 = 2\sqrt{2}$ ，则异面直线 AC_1 与 A_1B_1 所成的角为（ ）

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

6. 一个正三角形的三个顶点都在双曲线 $x^2 + ay^2 = 1$ 的右支上，且其中一个顶点在双曲线的右顶点，则实数 a

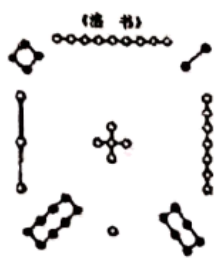
的取值范围是 ()

- A. $(3, +\infty)$ B. $(\sqrt{3}, +\infty)$ C. $(-\infty, -\sqrt{3})$ D. $(-\infty, -3)$

7. 已知函数 $f(x) = a \sin x - \sqrt{3} \cos x$ 的图像的一条对称轴为直线 $x = \frac{5\pi}{6}$, 且 $f(x_1) \cdot f(x_2) = -4$, 则 $|x_1 + x_2|$ 的最小值为 ()

- A. $-\frac{\pi}{3}$ B. 0 C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

8. 洛书, 古称龟书, 是阴阳五行术数之源, 在古代传说中有神龟出于洛水, 其甲壳上心有此图象, 结构是戴九履一, 左三右七, 二四为肩, 六八为足, 以五居中, 五方白圈皆阳数, 四角黑点为阴数. 如图, 若从四个阴数和五个阳数中分别随机选取 1 个数, 则其和等于 11 的概率是 ().



- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{10}$ D. $\frac{1}{4}$

9. $x < 1$ 是 $x + \frac{1}{x} < -2$ 的 () 条件

- A. 充分不必要 B. 必要不充分 C. 充要 D. 既不充分也不必要

10. 若圆锥轴截面面积为 $2\sqrt{3}$, 母线与底面所成角为 60° , 则体积为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}\pi$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ D. $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

11. 盒中有 6 个小球, 其中 4 个白球, 2 个黑球, 从中任取 $i (i=1, 2)$ 个球, 在取出的球中, 黑球放回, 白球则涂黑后放回, 此时盒中黑球的个数 $X_i (i=1, 2)$, 则 ()

- A. $P(X_1=3) > P(X_2=3)$, $EX_1 > EX_2$ B. $P(X_1=3) < P(X_2=3)$, $EX_1 > EX_2$
C. $P(X_1=3) > P(X_2=3)$, $EX_1 < EX_2$ D. $P(X_1=3) < P(X_2=3)$, $EX_1 < EX_2$

12. 已知函数 $f(x) = A \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) - a (0 < a < A)$ 在区间 $\left[0, \frac{7\pi}{3\omega}\right]$ 有三个零点 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 若

$x_1 + 2x_2 + x_3 = \frac{5\pi}{3}$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为 ()

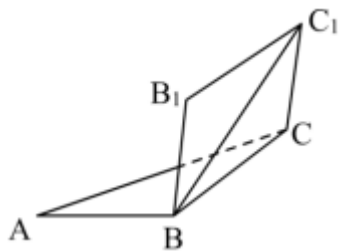
- A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. π D. $\frac{4\pi}{3}$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 ，过 F_1 的直线与双曲线左支交于 A, B 两点，

$\angle AF_2B = 90^\circ$ ， $\triangle AF_2B$ 的内切圆的圆心的纵坐标为 $\frac{\sqrt{7}}{2}a$ ，则双曲线的离心率为_____。

14. 如图所示，平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 ABC ， $\angle ABC = 120^\circ$ ，四边形 BCC_1B_1 为正方形，且 $AB = BC = 2$ ，则异面直线 BC_1 与 AC 所成角的余弦值为_____。



15. 若函数 $f(x) = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 在定义域 $[m, n]$ 上的值域是 $[m^2, n^2] (1 < m < n)$ ，则 a 的取值范围是_____。

16. 已知圆 $C: x^2 + y^2 + 8x + ay - 5 = 0$ 经过抛物线 $E: x^2 = 4y$ 的焦点，则抛物线 E 的准线与圆 C 相交所得弦长是_____。

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + mx + \ln x$ 。

(1) 若函数 $f(x)$ 不存在单调递减区间，求实数 m 的取值范围；

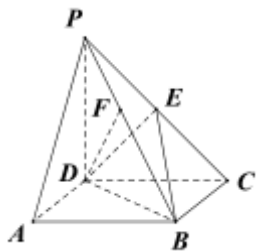
(2) 若函数 $y = f(x)$ 的两个极值点为 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ ， $m \leq -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ，求 $f(x_1) - f(x_2)$ 的最小值。

18. (12分) 已知函数 $f(x) = \ln(x+1) + \frac{a}{2}x^2$ 。

(1) 当 $a = -1$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 ，且 $x_1 < x_2$ ， $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，设 $m = f(x_2) + \frac{x_1 + 2}{8} \cdot f'(x_1 + 1)$ ，求 m 的取值范围，并求 m 取到最小值时所对应的 a 的值。

19. (12分) 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形， $PD \perp$ 平面 $ABCD$ ， E 是棱 PC 上的一点，满足 $PA \parallel$ 平面 BDE 。



(I) 证明: $PE = EC$;

(II) 设 $PD = AD = BD = 1$, $AB = \sqrt{2}$, 若 F 为棱 PB 上一点, 使得直线 DF 与平面 BDE 所成角的大小为 30° , 求 $PF:FB$ 的值.

20. (12 分) 在数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 中, $a_1 = 0$, $a_3 = 2$, $b_n = 2^{a_n+1}$ ($n \in N^*$).

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 及 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $c_n = \frac{1}{2}a_nb_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = (x - \frac{1}{x}) \ln x$, $g(x) = x - \frac{k}{x}$.

(1) 证明: 函数 $f(x)$ 的极小值点为 1;

(2) 若函数 $y = f(x) - g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 有两个零点, 证明: $1 \leq k < \frac{17}{8}$.

22. (10 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + \cos \theta \\ y = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{cases}$ (θ 为参数), 以原点 O 为极点, x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 4 \sin \theta$.

(1) 求曲线 C 的普通方程;

(2) 求曲线 l 和曲线 C 的公共点的极坐标.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、A

【解析】

由已知可得 $[1, +\infty)$ 的单调性, 再由 $f(2-x) = -f(x)$ 可得 $f(x)$ 对称性, 可求出 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调性, 即可求出结论.

【详解】

对于任意 $x \in \mathbf{R}$ ，函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x) = -f(x)$ ，

因为函数 $f(x)$ 关于点 $(1, 0)$ 对称，

当 $x \geq 1$ 时， $f(x) = \sqrt{x-1}$ 是单调增函数，

所以 $f(x)$ 在定义域 R 上是单调增函数.

因为 $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ ，所以 $f\left(-\frac{1}{2}\right) < f\left(-\frac{1}{3}\right) < f\left(\frac{1}{2}\right)$ ，

$$b < c < a.$$

故选:A.

【点睛】

本题考查利用函数性质比较函数值的大小，解题的关键要掌握函数对称性的代数形式，属于中档题..

2、C

【解析】

根据函数奇偶性可排除 AB 选项；结合特殊值，即可排除 D 选项.

【详解】

$$\because f(x) = \cos 2x + \frac{2\cos 2x}{2^x - 1} = \frac{2^x + 1}{2^x - 1} \times \cos 2x,$$

$$f(-x) = \frac{2^{-x} + 1}{2^{-x} - 1} \times \cos(-2x) = -\frac{2^x + 1}{2^x - 1} \times \cos 2x = -f(x),$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 为奇函数，

$\therefore$ 排除选项 A, B;

又 $\because$ 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 时， $f(x) > 0$ ，

故选: C.

【点睛】

本题考查了依据函数解析式选择函数图象，注意奇偶性及特殊值的用法，属于基础题.

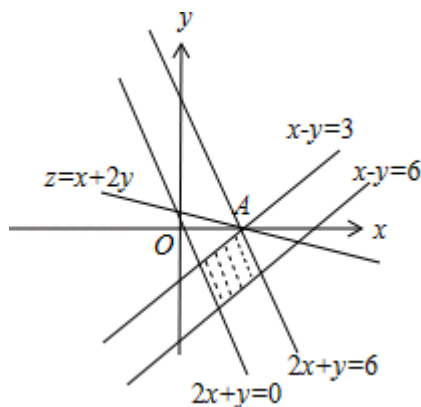
3、D

【解析】

画出可行域,将 $z = x + 2y$ 化为 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{z}{2}$,通过平移 $y = -\frac{1}{2}x$ 即可判断出最优解,代入到目标函数,即可求出最值.

【详解】

解:由约束条件 $\begin{cases} 0 \leq 2x + y \leq 6 \\ 3 \leq x - y \leq 6 \end{cases}$ 作出可行域如图,



化目标函数 $z=x+2y$ 为直线方程的斜截式, $y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$. 由图可知

当直线 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$ 过 $A(3,0)$ 时, 直线在 y 轴上的截距最大, z 有最大值为 3.

故选:D.

【点睛】

本题考查了线性规划问题. 一般第一步画出可行域, 然后将目标函数转化为 $y=ax+bz$ 的形式, 在可行域内通过平移 $y=ax$ 找到最优解, 将最优解带回到目标函数即可求出最值. 注意画可行域时, 边界线的虚实问题.

4、A

【解析】

根据题意, 由圆的切线求得双曲线的渐近线的方程, 再分焦点在 x 、 y 轴上两种情况讨论, 进而求得双曲线的离心率.

【详解】

设双曲线 C 的渐近线方程为 $y=kx$, 是圆的切线得: $\frac{|2k|}{\sqrt{k^2+1}}=1, \therefore k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$,

得双曲线的一条渐近线的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\therefore$ 焦点在 x 、 y 轴上两种情况讨论:

①当焦点在 x 轴上时有: $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}, e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3^2+3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3};$

②当焦点在 y 轴上时有: $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{3}}{3}, e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3^2+3}}{\sqrt{3}}=2;$

$\therefore$ 求得双曲线的离心率 2 或 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

故选：A.

【点睛】

本小题主要考查直线与圆的位置关系、双曲线的简单性质等基础知识，考查运算求解能力，考查数形结合思想．解题的关键是：由圆的切线求得直线 的方程，再由双曲线中渐近线的方程的关系建立等式，从而解出双曲线的离心率的值．此题易忽视两解得出错误答案．

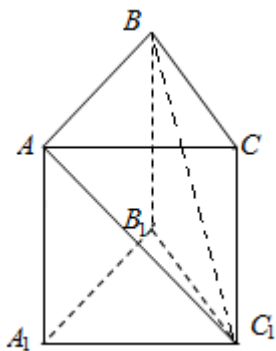
5、C

【解析】

由条件可看出 $AB \perp A_1B_1$ ，则 $\angle BAC_1$ 为异面直线 AC_1 与 A_1B_1 所成的角，可证得三角形 BAC_1 中， $AB \perp BC_1$ ，解得 $\tan \angle BAC_1$ ，从而得出异面直线 AC_1 与 A_1B_1 所成的角．

【详解】

连接 AC_1 ， BC_1 ，如图：



又 $AB \perp A_1B_1$ ，则 $\angle BAC_1$ 为异面直线 AC_1 与 A_1B_1 所成的角．

因为 $AB \perp BC$ ，且三棱柱为直三棱柱， $\therefore AB \perp CC_1$ ， $\therefore AB \perp$ 面 BCC_1B_1 ，

$\therefore AB \perp BC_1$ ，

又 $AB = BC = 2$ ， $CC_1 = 2\sqrt{2}$ ， $\therefore BC_1 = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$ ，

$\therefore \tan \angle BAC_1 = \sqrt{3}$ ，解得 $\angle BAC_1 = 60^\circ$ ．

故选 C

【点睛】

考查直三棱柱的定义，线面垂直的性质，考查了异面直线所成角的概念及求法，考查了逻辑推理能力，属于基础题．

6、D

【解析】

因为双曲线分左右支，所以 $a < 0$ ，根据双曲线和正三角形的对称性可知：第一象限的顶点坐标为 $(1+t, \frac{\sqrt{3}}{3}t)(t > 0)$ ，将其代入双曲线可解得。

【详解】

因为双曲线分左右支，所以 $a < 0$ ，

根据双曲线和正三角形的对称性可知：第一象限的顶点坐标为 $(1+t, \frac{\sqrt{3}}{3}t)(t > 0)$ ，将其代入双曲线方程得：

$$(1+t)^2 + a(\frac{\sqrt{3}}{3}t)^2 = 1,$$

$$\text{即 } t = \frac{-2}{\frac{1}{3}a+1}, \text{ 由 } t > 0 \text{ 得 } a < -3.$$

故选：D.

【点睛】

本题考查了双曲线的性质，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

7、D

【解析】

运用辅助角公式，化简函数 $f(x)$ 的解析式，由对称轴的方程，求得 a 的值，得出函数 $f(x)$ 的解析式，集合正弦函数的最值，即可求解，得到答案.

【详解】

由题意，函数 $f(x) = a \sin x - \sqrt{3} \cos x = \sqrt{a^2 + 3} \sin(x + \theta)(\theta \text{ 为辅助角})$ ，

由于函数的对称轴的方程为 $x = \frac{5\pi}{6}$ ，且 $f(\frac{5\pi}{6}) = \frac{a}{2} + \frac{3}{2}$ ，

$$\text{即 } \left| \frac{a}{2} + \frac{3}{2} \right| = \sqrt{a^2 + 3}, \text{ 解得 } a = 1, \text{ 所以 } f(x) = 2 \sin(x - \frac{\pi}{3}),$$

又由 $f(x_1) \cdot f(x_2) = -4$ ，所以函数必须取得最大值和最小值，

所以可设 $x_1 = 2k_1\pi + \frac{5\pi}{6}, k_1 \in Z$ ， $x_2 = 2k_2\pi - \frac{\pi}{6}, k_2 \in Z$ ，

所以 $|x_1 + x_2| = 2k_1\pi + 2k_2\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in Z$ ，

当 $k_1 = k_2 = 0$ 时， $|x_1 + x_2|$ 的最小值 $\frac{2\pi}{3}$ ，故选 D.

【点睛】

本题主要考查了正弦函数的图象与性质，其中解答中利用三角恒等变换的公式，化简函数的解析式，合理利用正弦函数的对称性与最值是解答的关键，着重考查了分析问题和解决问题的能力，属于中档试题.

【解析】

基本事件总数 $n = 4 \times 5 = 20$ ，利用列举法求出其和等于 11 包含的基本事件有 4 个，由此能求出其和等于 11 的概率。

【详解】

解：从四个阴数和五个阳数中分别随机选取 1 个数，

基本事件总数 $n = 4 \times 5 = 20$ ，

其和等于 11 包含的基本事件有：(9,2)，(3,8)，(7,4)，(5,6)，共 4 个，

$\therefore$ 其和等于 11 的概率 $p = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ 。

故选：A。

【点睛】

本题考查概率的求法，考查古典概型等基础知识，考查运算求解能力，属于基础题。

9、B

【解析】

利用充分条件、必要条件与集合包含关系之间的等价关系，即可得出。

【详解】

设 $p: x < 1$ 对应的集合是 $A = (-\infty, 1)$ ，由 $x + \frac{1}{x} < -2$ 解得 $x < 0$ 且 $x \neq -1$

$q: x + \frac{1}{x} < -2$ 对应的集合是 $B = (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ ，所以 $B \subsetneq A$ ，

故 $x < 1$ 是 $x + \frac{1}{x} < -2$ 的必要不充分条件，故选 B。

【点睛】

本题主要考查充分条件、必要条件的判断方法——集合关系法。

设 $A = \{x | x \in p\}$ ， $B = \{x | x \in q\}$ ，

如果 $A \subseteq B$ ，则 p 是 q 的充分条件；如果 $A \cap B$ 则 p 是 q 的充分不必要条件；

如果 $B \subseteq A$ ，则 p 是 q 的必要条件；如果 $B \cap A$ ，则 p 是 q 的必要不充分条件。

10、D

【解析】

设圆锥底面圆的半径为 r ，由轴截面面积为 $2\sqrt{3}$ 可得半径 r ，再利用圆锥体积公式计算即可。

【详解】

设圆锥底面圆的半径为 r ，由已知， $\frac{1}{2} \times 2r \times \sqrt{3}r = 2\sqrt{3}$ ，解得 $r = \sqrt{2}$ ，

所以圆锥的体积 $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \times \sqrt{3}r = \frac{2\sqrt{6}}{3} \pi$.

故选：D

【点睛】

本题考查圆锥的体积的计算，涉及到圆锥的定义，是一道容易题.

11、C

【解析】

根据古典概型概率计算公式，计算出概率并求得数学期望，由此判断出正确选项.

【详解】

$X_1 = 3$ 表示取出的为一个白球，所以 $P(X_1 = 3) = \frac{C_4^1}{C_6^1} = \frac{2}{3}$. $X_1 = 2$ 表示取出一个黑球， $P(X_1 = 2) = \frac{C_2^1}{C_6^1} = \frac{1}{3}$ ，所以

$$E(X_1) = 3 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3}.$$

$X_2 = 3$ 表示取出两个球，其中一黑一白， $P(X_2 = 3) = \frac{C_4^1 C_2^1}{C_6^2} = \frac{8}{15}$ ， $X_2 = 2$ 表示取出两个球为黑球，

$P(X_2) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}$ ， $X_2 = 4$ 表示取出两个球为白球， $P(X_2 = 4) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{6}{15}$ ，所以

$E(X_2) = 3 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{1}{15} + 4 \times \frac{6}{15} = \frac{10}{3}$. 所以 $P(X_1 = 3) > P(X_2 = 3)$ ， $EX_1 < EX_2$.

故选：C

【点睛】

本小题主要考查离散型随机变量分布列和数学期望的计算，属于中档题.

12、C

【解析】

根据题意，知当 $x = \frac{7\pi}{3\omega}$ 时， $\omega x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{2}$ ，由对称轴的性质可知 $x_1 + x_2 = \frac{2\pi}{3\omega}$ 和 $x_2 + x_3 = \frac{8\pi}{3\omega}$ ，即可求出 w ，即可求

出 $f(x)$ 的最小正周期.

【详解】

解：由于 $f(x) = A \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) - a$ ($0 < a < A$) 在区间 $\left[0, \frac{7\pi}{3\omega}\right]$ 有三个零点 x_1 ， x_2 ， x_3 ，

当 $x = \frac{7\pi}{3\omega}$ 时， $\omega x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{2}$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/808036055126007000>