

## 黑龙江省部分重点高中 2024 届高三下学期一模考试数学试题

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚, 将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效; 在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出, 确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁, 不要折暴、不要弄破、弄皱, 不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 一个正四棱锥形骨架的底边边长为 2, 高为  $\sqrt{2}$ , 有一个球的表面与这个正四棱锥的每个边都相切, 则该球的表面积为 ( )

- A.  $4\sqrt{3}\pi$       B.  $4\pi$       C.  $4\sqrt{2}\pi$       D.  $3\pi$

2. 已知集合  $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ ,  $B = \{x | (x+1)(x-2) < 0\}$ , 则集合  $A \cap B$  的真子集的个数是 ( )

- A. 8      B. 7      C. 4      D. 3

3. 已知函数  $f(x) = me^{mx} - \ln x$ , 当  $x > 0$  时,  $f(x) > 0$  恒成立, 则  $m$  的取值范围为 ( )

- A.  $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$       B.  $\left(\frac{1}{e}, e\right)$       C.  $[1, +\infty)$       D.  $(-\infty, e)$

4. 设等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $a_3 = 2$ ,  $a_1 + a_4 = 5$ , 则  $S_6 =$  ( )

- A. 10      B. 9      C. 8      D. 7

5. 已知数列  $\{a_n\}$  的首项  $a_1 = a (a \neq 0)$ , 且  $a_{n+1} = ka_n + t$ , 其中  $k, t \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , 下列叙述正确的是 ( )

A. 若  $\{a_n\}$  是等差数列, 则一定有  $k = 1$       B. 若  $\{a_n\}$  是等比数列, 则一定有  $t = 0$

C. 若  $\{a_n\}$  不是等差数列, 则一定有  $k \neq 1$       D. 若  $\{a_n\}$  不是等比数列, 则一定有  $t \neq 0$

6. 已知  $a, b$  是两条不同的直线,  $\alpha, \beta$  是两个不同的平面, 且  $a \subset \alpha$ ,  $b \subset \beta$ ,  $a // \beta$ ,  $b // \alpha$ , 则“ $a // b$ ”是“ $\alpha // \beta$ ”的 ( )

- A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件      D. 既不充分也不必要条件

7.  $\sin 80^\circ \cos 50^\circ + \cos 140^\circ \sin 10^\circ =$  ( )

- A.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$       B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       C.  $-\frac{1}{2}$       D.  $\frac{1}{2}$

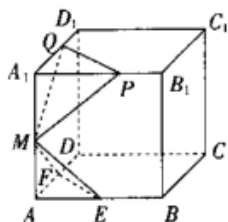
8. 已知  $\sin(\pi + \alpha) = \frac{4}{5}$ , 且  $\sin 2\alpha < 0$ , 则  $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$  的值为 ( )

- A. 7                      B. -7                      C.  $\frac{1}{7}$                       D.  $-\frac{1}{7}$

9. 已知  $2^a = 3^b = 6$ , 则  $a, b$  不可能满足的关系是 ( )

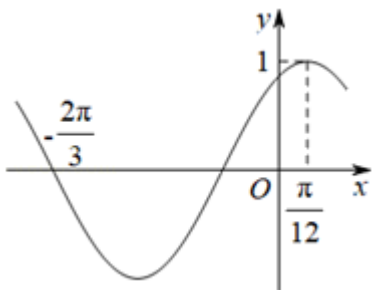
- A.  $a+b=ab$             B.  $a+b>4$             C.  $(a-1)^2+(b-1)^2<2$     D.  $a^2+b^2>8$

10. 在棱长为  $a$  的正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $E, F, M$  分别是  $AB, AD, AA_1$  的中点, 又  $P, Q$  分别在线段  $A_1B_1, A_1D_1$  上, 且  $A_1P = A_1Q = m (0 < m < a)$ , 设平面  $MEF \perp$  平面  $MPQ = l$ , 则下列结论中不成立的是 ( )



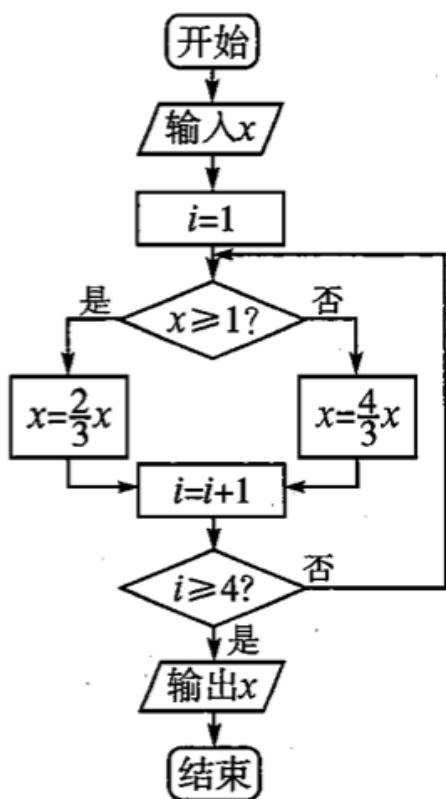
- A.  $l \parallel$  平面  $BDD_1B_1$                       B.  $l \perp MC$   
 C. 当  $m = \frac{a}{2}$  时, 平面  $MPQ \perp MEF$             D. 当  $m$  变化时, 直线  $l$  的位置不变

11. 已知函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图所示, 则  $f\left(\frac{3\pi}{8}\right) =$  ( )



- A.  $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$             B.  $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$             C.  $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$             D.  $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

12. 相传黄帝时代, 在制定乐律时, 用“三分损益”的方法得到不同的竹管, 吹出不同的音调. 如图的程序是与“三分损益”结合的计算过程, 若输入的  $x$  的值为 1, 输出的  $x$  的值为 ( )



- A.  $\frac{64}{81}$       B.  $\frac{32}{27}$       C.  $\frac{8}{9}$       D.  $\frac{16}{27}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知函数  $f(x) = a \ln(2x) - e^{\frac{2x}{e}}$  有且只有一个零点，则实数  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

14. 函数  $f(x) = \frac{2 + \ln 2x}{x^2}$  的图象在  $x = \frac{e}{2}$  处的切线方程为\_\_\_\_\_.

15. 设函数  $f(x) = |\ln x + a| + |x + b| (a, b \in R)$ ，当  $x \in [1, e]$  时，记  $f(x)$  最大值为  $M(a, b)$ ，则  $M(a, b)$  的最小值为\_\_\_\_\_.

16. 若变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x \geq 1, \\ y \geq x, \\ 3x + 2y \leq 15, \end{cases}$  则  $z = 2x + y$  的最大值是\_\_\_\_\_.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 第十三届全国人大常委会第十一次会议审议的《固体废物污染环境防治法(修订草案)》中，提出推行生活垃圾分类制度，这是生活垃圾分类首次被纳入国家立法中。为了解某城市居民的生活垃圾分类意识与政府相关法规宣传普及的关系，对某试点社区抽取 50 户居民进行调查，得到如下的  $2 \times 2$  列联表。

	分类意识强	分类意识弱	合计
试点后		5	

试点前	9		
合计			50

已知在抽取的50户居民中随机抽取1户，抽到分类意识强的概率为0.58.

(1) 请将上面的 $2 \times 2$ 列联表补充完整，并判断是否有99.5%的把握认为居民分类意识的强弱与政府宣传普及工作有关？说明你的理由；

(2) 已知在试点前分类意识强的9户居民中，有3户自觉垃圾分类在12年以上，现在从试点前分类意识强的9户居民中，随机选出3户进行自觉垃圾分类年限的调查，记选出自觉垃圾分类年限在12年以上的户数为 $X$ ，求 $X$ 分布列及数学期望.

参考公式： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a+b+c+d$ .

下面的临界值表仅供参考

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
$k_0$	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

18. (12分) 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + 1$ ， $g(x) = \ln x - a (a \in R)$ .

(1) 当 $a = 1$ 时，求函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 的极值；

(2) 若存在与函数 $f(x)$ ， $g(x)$ 的图象都相切的直线，求实数 $a$ 的取值范围.

19. (12分) 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ，设椭圆 $\Gamma$ 的上顶点为 $B$ ，右顶点和右焦点分别为 $A$ ， $F$ ，

且 $\angle AFB = \frac{5\pi}{6}$ .

(1) 求椭圆 $\Gamma$ 的标准方程；

(2) 设直线 $l: y = kx + n (n \neq \pm 1)$ 交椭圆 $\Gamma$ 于 $P$ ， $Q$ 两点，设直线 $BP$ 与直线 $BQ$ 的斜率分别为 $k_{BP}$ ， $k_{BQ}$ ，若 $k_{BP} + k_{BQ} = -1$ ，试判断直线 $l$ 是否过定点？若过定点，求出该定点的坐标；若不过定点，请说明理由.

20. (12分) 已知点 $P(1, 2)$ 到抛物线 $C: y^2 = 1px (p > 0)$ 准线的距离为1.

(I) 求 $C$ 的方程及焦点 $F$ 的坐标；

(II) 设点 $P$ 关于原点 $O$ 的对称点为点 $Q$ ，过点 $Q$ 作不经过点 $O$ 的直线与 $C$ 交于两点 $A$ ， $B$ ，直线 $PA$ ， $PB$ ，分别交

$x$  轴于  $M, N$  两点, 求  $|MF| \cdot |NF|$  的值.

21. (12 分) 已知函数  $f(x) = e^x - ax^2$

(1) 已知直线  $l: x - y - 1 = 0$ ,  $l_1: 2x - y - 2 = 0$ . 若直线  $l_2$  与  $l_1$  关于  $l$  对称, 又函数  $f(x)$  在  $x = 1$  处的切线与  $l_2$  垂直, 求实数  $a$  的值;

(2) 若函数  $g(x) = (e - 2)x + 1$ , 则当  $x > 0$ ,  $a = 1$  时, 求证:

①  $f(x) \geq g(x)$ ;

②  $e^x - ex - 1 \geq x(\ln x - 1)$ .

22. (10 分) 记  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和,  $2S_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ).

(1) 求  $a_n + a_{n+1}$ ;

(2) 令  $b_n = a_{n+2} - a_n$ , 证明数列  $\{b_n\}$  是等比数列, 并求其前  $n$  项和  $T_n$ .

## 参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

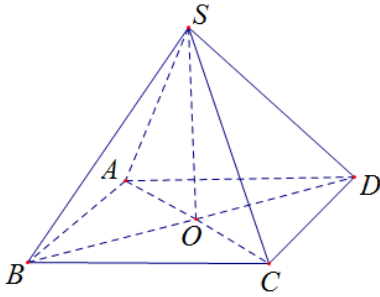
1、B

【解析】

根据正四棱锥底面边长为 2, 高为  $\sqrt{2}$ , 得到底面的中心到各棱的距离都是 1, 从而底面的中心即为球心.

【详解】

如图所示:



因为正四棱锥底边边长为2，高为 $\sqrt{2}$ ，

所以 $OB = \sqrt{2}$ ， $SB = 2$ ，

$O$  到 $SB$  的距离为 $d = \frac{SO \times OB}{SB} = 1$ ，

同理 $O$  到 $SC$ ， $SD$ ， $SA$  的距离为1，

所以 $O$  为球的球心，

所以球的半径为：1，

所以球的表面积为 $4\pi$ 。

故选：B

**【点睛】**

本题主要考查组合体的表面积，还考查了空间想象的能力，属于中档题。

2、D

**【解析】**

转化条件得 $A \mid B = \{0,1\}$ ，利用元素个数为 $n$  的集合真子集个数为 $2^n - 1$  个即可得解。

**【详解】**

由题意得 $B = \{x \mid (x+1)(x-2) < 0\} = \{x \mid -1 < x < 2\}$ ，

$\therefore A \mid B = \{0,1\}$ ， $\therefore$  集合 $A \mid B$  的真子集的个数为 $2^2 - 1 = 3$  个。

故选：D。

**【点睛】**

本题考查了集合的化简和运算，考查了集合真子集个数问题，属于基础题。

3、A

**【解析】**

分析可得  $m > 0$ , 显然  $me^{mx} - \ln x > 0$  在  $(0, 1]$  上恒成立, 只需讨论  $x > 1$  时的情况即

可,  $f(x) > 0 \Leftrightarrow me^{mx} > \ln x \Leftrightarrow mxe^{mx} > e^{\ln x} \ln x$ , 然后构造函数  $g(x) = xe^x (x > 0)$ , 结合  $g(x)$  的单调性, 不等式等价于  $mx > \ln x$ , 进而求得  $m$  的取值范围即可.

**【详解】**

由题意, 若  $m \leq 0$ , 显然  $f(x)$  不是恒大于零, 故  $m > 0$ .

$m > 0$ , 则  $me^{mx} - \ln x > 0$  在  $(0, 1]$  上恒成立;

当  $x > 1$  时,  $f(x) > 0$  等价于  $me^{mx} > \ln x$ ,

因为  $x > 1$ , 所以  $mxe^{mx} > e^{\ln x} \ln x$ .

设  $g(x) = xe^x (x > 0)$ , 由  $g'(x) = e^x(1+x)$ , 显然  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

因为  $mx > 0, \ln x > 0$ , 所以  $mxe^{mx} > e^{\ln x} \ln x$  等价于  $g(mx) > g(\ln x)$ , 即  $mx > \ln x$ , 则  $m > \frac{\ln x}{x}$ .

设  $h(x) = \frac{\ln x}{x} (x > 0)$ , 则  $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} (x > 0)$ .

令  $h'(x) = 0$ , 解得  $x = e$ , 易得  $h(x)$  在  $(0, e)$  上单调递增, 在  $(e, +\infty)$  上单调递减,

从而  $h(x)_{\max} = h(e) = \frac{1}{e}$ , 故  $m > \frac{1}{e}$ .

故选:A.

**【点睛】**

本题考查了不等式恒成立问题, 利用函数单调性是解决本题的关键, 考查了学生的推理能力, 属于基础题.

4、B

**【解析】**

根据题意  $a_3 = a_1 + 2d = 2$ ,  $a_1 + a_4 = 2a_1 + 3d = 5$ , 解得  $a_1 = 4$ ,  $d = -1$ , 得到答案.

**【详解】**

$a_3 = a_1 + 2d = 2$ ,  $a_1 + a_4 = 2a_1 + 3d = 5$ , 解得  $a_1 = 4$ ,  $d = -1$ , 故  $S_6 = 6a_1 + 15d = 9$ .

故选: B.

**【点睛】**

本题考查了等差数列的求和, 意在考查学生的计算能力.

5、C

**【解析】**

根据等差数列和等比数列的定义进行判断即可.



**【详解】**

A: 当  $k=0, t=a$  时,  $a_{n+1}=a$ , 显然符合  $\{a_n\}$  是等差数列, 但是此时  $k=1$  不成立, 故本说法不正确;

B: 当  $k=0, t=a$  时,  $a_{n+1}=a$ , 显然符合  $\{a_n\}$  是等比数列, 但是此时  $t=0$  不成立, 故本说法不正确;

C: 当  $k=1$  时, 因此有  $a_{n+1}-a_n=ka_n+t-a_n=t=\text{常数}$ , 因此  $\{a_n\}$  是等差数列, 因此当  $\{a_n\}$  不是等差数列时, 一定有  $k \neq 1$ , 故本说法正确;

D: 当  $t=a \neq 0$  时, 若  $k=0$  时, 显然数列  $\{a_n\}$  是等比数列, 故本说法不正确.

故选: C

**【点睛】**

本题考查了等差数列和等比数列的定义, 考查了推理论证能力, 属于基础题.

6、D

**【解析】**

根据面面平行的判定及性质求解即可.

**【详解】**

解:  $a \subset \alpha, b \subset \beta, a \parallel \beta, b \parallel \alpha,$

由  $a \parallel \beta$ , 不一定有  $a \parallel \alpha$ ,  $\alpha$  与  $\beta$  可能相交;

反之, 由  $a \parallel \beta$ , 可得  $a \parallel \alpha$  或  $a$  与  $\alpha$  异面,

$\therefore a, b$  是两条不同的直线,  $\alpha, \beta$  是两个不同的平面, 且  $a \subset \alpha, b \subset \beta, a \parallel \beta, b \parallel \alpha,$

则“ $a \parallel b$ ”是“ $\alpha \parallel \beta$ ”的既不充分也不必要条件.

故选: D.

**【点睛】**

本题主要考查充分条件与必要条件的判断, 考查面面平行的判定与性质, 属于基础题.

7、D

**【解析】**

利用  $10^\circ = 90^\circ - 80^\circ, 140^\circ = 90^\circ + 50^\circ$ , 根据诱导公式进行化简, 可得  $\sin 80^\circ \cos 50^\circ - \cos 80^\circ \sin 50^\circ$ , 然后利用两角差的正弦定理, 可得结果.

**【详解】**

由  $80^\circ = 90^\circ - 10^\circ, 140^\circ = 90^\circ + 50^\circ$

所以  $\sin 10^\circ = \sin(90^\circ - 80^\circ) = \cos 80^\circ$

$$\cos 140^\circ = \cos(90^\circ + 50^\circ) = -\sin 50^\circ,$$

$$\text{所以原式} = \sin 80^\circ \cos 50^\circ - \cos 80^\circ \sin 50^\circ = \sin(80^\circ - 50^\circ)$$

$$\text{所以原式} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{故} \sin 80^\circ \cos 50^\circ + \cos 140^\circ \sin 10^\circ = \frac{1}{2}$$

故选：D

【点睛】

本题考查诱导公式以及两角差的正弦公式，关键在于掌握公式，属基础题.

8、A

【解析】

由  $\sin(\pi + \alpha) = \frac{4}{5}$  及  $\sin 2\alpha < 0$  得到  $\sin \alpha$ 、 $\cos \alpha$ ，进一步得到  $\tan \alpha$ ，再利用两角差的正切公式计算即可.

【详解】

因为  $\sin(\pi + \alpha) = \frac{4}{5}$ ，所以  $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ ，又  $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha < 0$ ，所以  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ，

$$\tan \alpha = -\frac{4}{3}, \text{ 所以 } \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha - 1}{1 + \tan \alpha} = \frac{-1 - \frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{3}} = 7.$$

故选：A.

【点睛】

本题考查三角函数诱导公式、二倍角公式以及两角差的正切公式的应用，考查学生的基本计算能力，是一道基础题.

9、C

【解析】

根据  $2^a = 3^b = 6$  即可得出  $a = 1 + \log_2 3$ ， $b = 1 + \log_3 2$ ，根据  $\log_2 3 \cdot \log_3 2 = 1$ ， $\log_3 2 + \log_3 2 > 2$ ，即可判断出结果.

【详解】

$$\because 2^a = 3^b = 6;$$

$$\therefore a = \log_2 6 = 1 + \log_2 3, \quad b = \log_3 6 = 1 + \log_3 2;$$

$$\therefore a + b = 2 + \log_2 3 + \log_3 2 > 4, \quad ab = 2 + \log_2 3 + \log_3 2 > 4, \text{ 故 } A, B \text{ 正确};$$

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 = (\log_2 3)^2 + (\log_3 2)^2 > 2\log_2 3 \cdot \log_3 2 = 2, \text{ 故 } C \text{ 错误};$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/808104054124007032>