海淀区 2022~2023 学年第一学期期末练习

高三数学

2023.01

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{x|-2\le x\le 3\}$，$B=\{x|x>0\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A. $[-2,3]$　　B. $[0,3]$　　C. $(0,+\infty)$　　D. $[-2,+\infty)$

【答案】D

【解析】

【分析】利用并集的定义可求得集合 $A\cup B$.

【详解】因为集合 $A=\{x|-2\le x\le 3\}$，$B=\{x|x>0\}$，因此，$A\cup B=[-2,+\infty)$.

故选：D.

2. 在复平面内，复数 $\dfrac{1}{2-i}$ 对应的点位于（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

【答案】A

【解析】

【分析】根据复数除法运算化简复数，从而根据对应点的坐标得到结果.

【详解】$\dfrac{1}{2-i}=\dfrac{2+i}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{2+i}{5}=\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}i$

∴对应的点坐标为：$\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{1}{5}\right)$

∴对应的点位于第一象限

本题正确选项：A

【点睛】本题考查复数对应的复平面的点的问题，关键是能够通过复数的除法运算化简复数，属于基础题.

3. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}-1$，在下列区间中，包含 $f(x)$ 零点的区间是（　　）

A. $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$　　B. $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

【答案】D

【解析】

【分析】先判断出函数在定义域上连续且单调递增，计算出端点值，利用零点存在性定理得到答案.

【详解】$f\left(x\right)=\sqrt{x}-\frac{1}{x}-1$定义域为$\left(0,+\infty\right)$，在定义域上连续且单调递增，

其中$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}-4-1<0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-2-1<0$，$f\left(1\right)=\sqrt{1}-1-1<0$，

$f\left(2\right)=\sqrt{2}-\frac{1}{2}-1<0$，$f\left(3\right)=\sqrt{3}-\frac{1}{3}-1>0$，

由零点存在性定理可得：包含$f\left(x\right)$零点的区间为$\left(2,3\right)$.

故选：D

4. 已知$a=\lg5,b=\sin\frac{\pi}{7},c=2^{\frac{1}{3}}$，则（　　）

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$

C. $b<c<a$　　D. $a<c<b$

【答案】B

【解析】

【分析】根据指数函数　单调性、正弦函数的单调性、对数函数的单调性进行求解即可/

【详解】因　$\lg\sqrt{10}<\lg5<\lg10$，所以$\frac{1}{2}<a<1$，

因为$\sin\frac{\pi}{7}<\sin\frac{\pi}{6}$，所以$b<\frac{1}{2}$，

因为$2^{\frac{1}{3}}>2^{0}$，所以$c>1$，因此$b<a<c$，

故选：B

5. 若圆$x^2+y^2-2x-2ay+a^2=0$截直线$x-2y+1=0$所得弦长为2，则$a=$（　　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】分析可知直线$x-2y+1=0$过圆心，由此可求得实数a的值.

【详解】圆的标准方程为$\left(x-1\right)^2+\left(y-a\right)^2=1$，圆心为$C\left(1,a\right)$，圆的半径为$r=1$，

因为若圆$x^2+y^2-2x-2ay+a^2=0$截直线$x-2y+1=0$所得弦长为2，

所以，直线 $x-2y+1=0$ 过圆心 C，则 $1-2a+1=0$，解得 $a=1$.

故选：C.

6. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_1=3$，$a_4+a_6=-10$.若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=a_n+a_{n+1}(n=1,2,\cdots)$，记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $S_8=$（　　）

A. -32　　B. -80　　C. -192　　D. -224

【答案】B

【解析】

【分析】求出等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，可求得数列 $\{b_n\}$ 的通项公式，推导出数列 $\{b_n\}$ 为等差数列，再利用等差数列的求和公式可求出 S_8 的值.

【详解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $a_4+a_6=2a_5=-10$，所以，$a_5=-5$，

$\therefore d=\dfrac{a_5-a_1}{4}=-2$，$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=3-2(n-1)=-2n+5$，

所以，$b_n=a_n+a_{n+1}=-2n+5-2(n+1)+5=-4n+8$，

则 $b_{n+1}-b_n=-4(n+1)+8-(-4n+8)=-4$，所以，数列 $\{b_n\}$ 为等差数列，

因此，$S_8=\dfrac{8(b_1+b_8)}{2}=4\times(4-24)=-80$.

故选：B

7. 某校高一年级计划举办足球比赛，采用抽签的方式把全年级 6 个班分为甲、乙两组，每组 3 个班，则高一（1）班、高一（2）班恰好都在甲组的概率是（　　）

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{1}{5}$　　D. $\dfrac{1}{6}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用组合数的概念结合古典概型即可求解.

【详解】由题意得，把全年级 6 个班分为甲、乙两组共有 $C_6^3C_3^3=20$ 种方法，

高一（1）班、高一（2）班恰好都在甲组共有 $C_4^1C_3^3=4$ 种方法，

所以高一（1）班、高一（2）班恰好都在甲组的概率是 $\dfrac{C_4^1C_3^3}{C_6^3C_3^3}=\dfrac{1}{5}$，

故选:C.

8. 设α、β是两个不同的平面，直线$m\subset\alpha$，则“对β内的任意直线l，都有$m\perp l$”是“$\alpha\perp\beta$”的（　　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】利用线面垂直的定义、面面垂直的判定定理结合充分条件、必要条件的定义判断可得出结论.

【详解】因为α、β是两个不同的平面，直线$m\subset\alpha$，

若对β内的任意直线l，都有$m\perp l$，根据线面垂直的定义可知$m\perp\beta$，

$\because m\subset\alpha$，$\therefore\alpha\perp\beta$，

所以，“对β内的任意直线l，都有$m\perp l$”$\Rightarrow$“$\alpha\perp\beta$”；

若$\alpha\perp\beta$，因为$m\subset\alpha$，对β内的任意直线l，m与l的位置关系不确定，

所以，“对β内的任意直线l，都有$m\perp l$”$\not\Leftarrow$“$\alpha\perp\beta$”.

因此，“对β内的任意直线l，都有$m\perp l$”是“$\alpha\perp\beta$”的充分而不必要条件.

故选：A.

9. 已知函数$f\left(x\right)=\cos2x$在区间$\left[t,t+\frac{\pi}{3}\right]\left(t\in\mathbf{R}\right)$上的最大值为$M\left(t\right)$，则$M\left(t\right)$的最小值为（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】求出$t\in\left[0,\pi\right)$时$M\left(t\right)$的解析式，根据周期性进而可求$M\left(t\right)$的最小值.

【详解】$f\left(x\right)=\cos2x$的周期为π，所以只需讨论$t\in\left[0,\pi\right)$时$M\left(t\right)$的最小值即可，

因为$f\left(x\right)=\cos2x$的单调递减区间为$\left[k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right],k\in\mathrm{Z}$,单调递增区间为$\left[\frac{\pi}{2}+k\pi,\pi+k\pi\right]$，$k\in\mathrm{Z}$，且对称轴为$x=\frac{k}{2}\pi,k\in\mathrm{Z}$，

当$t\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right)$时，$t+\dfrac{\pi}{3}\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$，且$\left|\dfrac{\pi}{2}-t\right|>\left|t+\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{2}\right|$，

所以此时$M\left(t\right)=f\left(t\right)=\cos 2t$；

当$t\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$时，$t+\dfrac{\pi}{3}\in\left[\dfrac{2\pi}{3},\pi\right)$，且$\left|\dfrac{\pi}{2}-t\right|\le\left|t+\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{2}\right|$，

所以此时$M\left(t\right)=f\left(t+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos 2\left(t+\dfrac{\pi}{3}\right)$；

当$t\in\left[\dfrac{2\pi}{3},\pi\right)$时，$t+\dfrac{\pi}{3}\in\left[\pi,\dfrac{4\pi}{3}\right)$，此时$M\left(t\right)=f\left(\pi\right)=1$；

所以$M\left(t\right)=\begin{cases}\cos 2t,t\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right)\\ \cos 2\left(t+\dfrac{\pi}{3}\right),t\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right),\\ 1,t\in\left[\dfrac{2\pi}{3},\pi\right)\end{cases}$

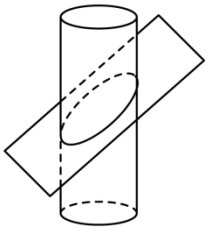
所以$M\left(t\right)$在$t\in\left[0,\pi\right)$时的最小值为$M\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$，

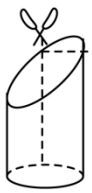
所以$M\left(t\right)$的最小值为$-\dfrac{1}{2}$.

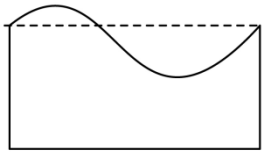
故选：D

10. 在实际生活中，常常要用到如图 1 所示的“直角弯管”.它的制作方法如下：如图 2，用一个与圆柱底面所成角为45°的平面截圆柱，将圆柱截成两段，再将这两段重新拼接就可以得到“直角弯管”.在制作“直角弯管”时截得的截口是一个椭圆，若将圆柱被截开的一段（如图 3）的侧面沿着圆柱的一条母线剪开，并展开成平面图形，则截口展开形成的图形恰好是某正弦型函数的部分图象（如图 4）.记该正弦型函数的最小正周期为T，截口椭圆的离心率为e.若圆柱的底面直径为 2，则（　　）


图1


图2


图3


图4

A. $T=2\pi,e=\dfrac{1}{2}$　　B. $T=2\pi,e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C. $T=4\pi, e=\frac{1}{2}$　　D. $T=4\pi, e=\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】B

【解析】

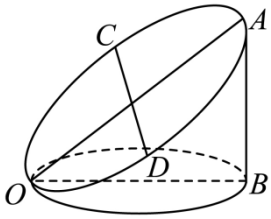
【分析】由条件求出椭圆的长半轴长a和短半轴长b，由此可求a,b，再求离心率e，再求圆柱侧面展开图的底边边长，由此可得正弦型函数的周期.

【详解】设截口椭圆的长半轴长为a，短半轴长为b，半焦距长为c，

因为圆柱的底面直径为2，所以$2b=CD=2$，故$b=1$，因为椭圆截面与底面的夹角为45°，所以$\angle AOB=45^\circ$，所以$2b=OB=OA\cos 45^\circ=2a\cos 45^\circ$，所以$a=\sqrt{2}$，所以$c=\sqrt{a^2-b^2}=1$，所以$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

观察图4知，正弦型函数的最小正周期T为圆柱的侧面展开图的底边边长，即圆柱的底面圆的周长，所以$T=2\pi\times 1=2\pi$.

故选：B.



二、填空题共5小题，每小题5分，共25分.

11. 抛物线 $y^2=2x$ 的焦点坐标为____.

【答案】（$\frac{1}{2}$，0）.

【解析】

【详解】试题分析：焦点在x轴　正半轴上，且p=1，利用焦点为（$\frac{p}{2}$，0），写出焦点坐标.

解：抛物线 $y^2=2x$ 的焦点在x轴的正半轴上，且p=1，$\therefore \frac{p}{2}=\frac{1}{2}$，故焦点坐标为（$\frac{1}{2}$，0），

故答案为（$\frac{1}{2}$，0）.

考点：抛物线的简单性质.

12. 在$\left(x-\frac{2}{x}\right)^4$的展开式中，$x^2$的系数为_____.

【答案】-8

【解析】

【分析】利用二项式定理得到$\left(x-\frac{2}{x}\right)^4$的展开通项，从而求得$x^2$的系数.

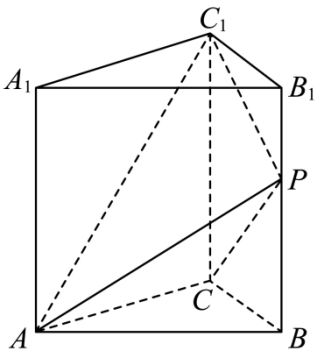
【详解】因为$\left(x-\frac{2}{x}\right)^4$的展开通项为$T_{k+1}=\mathrm{C}_4^k x^{4-k}\left(-\frac{2}{x}\right)^k=(-2)^k\,\mathrm{C}_4^k x^{4-2k}$，

令$4-2k=2$，得$k=1$，此时$T_2=(-2)^1\,\mathrm{C}_4^1 x^2=-2\times 4x^2=-8x^2$，

所以x^2的系数为-8.

故答案为：-8.

13. 如图，在正三棱柱$ABC\text{-}A_1B_1C_1$中，P是棱BB_1上一点，$AB=AA_1=2$，则三棱锥$P-ACC_1$的体积为_____.

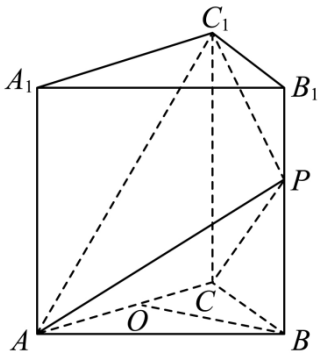


【答案】$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】利用线面垂直的判定定理确定三棱锥的高，再用椎体体积公式求解即可.

【详解】



取AC中点为O,连接OB，

因为$\triangle ABC$为正三角形，所以$OB\perp AC$，

又因为 AA_1 ⊥ 平面 ABC， $OB \subset$ 平面 ABC，

所以 $AA_1 \perp OB$,

且 $AA_1 \cap AC = A, AA_1, AC \subset$ 平面 ACC_1A_1，

所以 $OB \perp$ 平面 ACC_1A_1，

$OB = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$,即 B 到平面 ACC_1A_1 的距离为 $OB = \sqrt{3}$，

又因为 $BB_1 // AA_1, BB_1 \not\subset$ 平面 $ACC_1A_1, AA_1 \subset$ 平面 ACC_1A_1，

所以 $BB_1 //$ 平面 ACC_1A_1，

又因为 P 是棱 BB_1 上一点，所以 P 到平面 ACC_1A_1 的距离为 $OB = \sqrt{3}$，

所以 $V_{P-ACC_1} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle ACC_1} \times OB = \frac{2\sqrt{3}}{3}$，

故答案为: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

14. 设 O 为原点，双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点为 F， 点 P 在 C 的右支上.则 C 的渐近线方程是

_____; $\frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OF}}{\left|\overrightarrow{OP}\right|}$ 的取值范围是_____.

【答案】 ①. $y = \pm\sqrt{3}x$ ②. $(1, 2]$

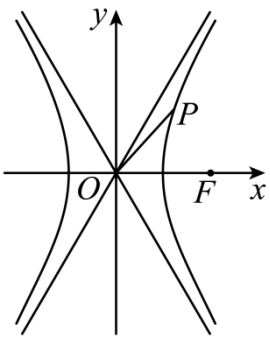
【解析】

【分析】根据双曲线的标准方程与渐近线方程的关系可写出双曲线 C 的渐近线方程；求出 $< \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OF} >$ 的取值范围，可得出 $\frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OF}}{\left|\overrightarrow{OP}\right|} = 2\cos < \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OF} >$，结合余弦函数的基本性质可求得 $\frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OF}}{\left|\overrightarrow{OP}\right|}$ 的取值范围.

【详解】在双曲线 C 中， $a = 1$， $b = \sqrt{3}$， $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$，则 $F(2, 0)$，

所以，双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\sqrt{3}x$，

直线 $y = \sqrt{3}x$ 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$，由题意可知 $0 \leq < \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OF} > < \frac{\pi}{3}$，则 $\frac{1}{2} < \cos < \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OF} > \leq 1$，



所以，$\dfrac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OF}}{\left|\overrightarrow{OP}\right|}=\left|\overrightarrow{OF}\right|\cos<\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OF}>=2\cos<\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OF}>\in(1,2]$.

故答案为：$y=\pm\sqrt{3}x$；$(1,2]$.

15. 已知函数 $f(x)=x^2-2x+2t$，$g(x)=\mathrm{e}^x-t$.给出下列四个结论：

①当$t=0$时，函数$y=f(x)g(x)$有最小值；

②$\exists t\in\mathbf{R}$，使得函数$y=f(x)g(x)$在区间$[1,+\infty)$上单调递增；

③$\exists t\in\mathbf{R}$，使得函数$y=f(x)+g(x)$没有最小值；

④$\exists t\in\mathbf{R}$，使得方程 $f(x)+g(x)=0$ 有两个根且两根之和小于2.

其中所有正确结论的序号是_____.

【答案】①②④

【解析】

【分析】利用函数的最值与单调性的关系可判断①③的正误；利用函数的单调性与导数的关系可判断②的正误；取$t=-1$，利用导数研究函数的单调性，结合零点存在定理可判断④的正误.

【详解】对于①，当$t=0$时，$y=f(x)g(x)=(x^2-2x)\mathrm{e}^x$，则$y'=(x^2-2)\mathrm{e}^x$，

由$y'<0$可得$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$，由$y'>0$可得$x<-\sqrt{2}$或$x>\sqrt{2}$，

此时，函数$y=(x^2-2x)\mathrm{e}^x$的增区间为$(-\infty,-\sqrt{2})$、$(\sqrt{2},+\infty)$，减区间为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，

当$x<0$或$x>2$时，$y=(x^2-2x)\mathrm{e}^x>0$，当$0<x<2$时，$y=(x^2-2x)\mathrm{e}^x<0$，

故函数$y=(x^2-2x)\mathrm{e}^x$在$x=\sqrt{2}$处取得最小值，①对；

对于②，$y'=(2x-2)(\mathrm{e}^x-t)+(x^2-2x+2t)\mathrm{e}^x=(x^2-2)\mathrm{e}^x+2t(\mathrm{e}^x-x+1)$，

令$h(x)=\mathrm{e}^x-x+1$，其中$x\geq1$，则$h'(x)=\mathrm{e}^x-1>0$，

所以，函数$h(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，所以，$h(x)=\mathrm{e}^x-x+1\geq h(1)=\mathrm{e}>0$，

则 $x-\mathrm{e}^{x}\le 1-\mathrm{e}<0$，

由 $y'=\left(x^{2}-2\right)\mathrm{e}^{x}+2t\left(\mathrm{e}^{x}-x+1\right)\ge 0$ 可得 $2t\ge\dfrac{\left(2-x^{2}\right)\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}-x+1}$，

构造函数 $p\left(x\right)=\dfrac{\left(2-x^{2}\right)\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}-x+1}$，其中 $x\ge 1$，

则 $p'\left(x\right)=\dfrac{\left(x^{3}-4x+4-2x\mathrm{e}^{x}\right)\mathrm{e}^{x}}{\left(\mathrm{e}^{x}-x+1\right)^{2}}=\dfrac{x\mathrm{e}^{x}\left(x^{2}-4+\dfrac{4}{x}-2\mathrm{e}^{x}\right)}{\left(\mathrm{e}^{x}-x+1\right)^{2}}$，

令 $q\left(x\right)=x^{2}-4+\dfrac{4}{x}-2\mathrm{e}^{x}$，其中 $x\ge 1$，则 $q'\left(x\right)=2\left(x-\mathrm{e}^{x}\right)-\dfrac{4}{x^{2}}<0$，

所以，函数 $q\left(x\right)$ 在 $\left[1,+\infty\right)$ 上单调递减，

故当 $x\ge 1$ 时，$q\left(x\right)\le q\left(1\right)=1-2\mathrm{e}<0$，则 $p'\left(x\right)<0$，即 $p\left(x\right)$ 在 $\left[1,+\infty\right)$ 上单调递减，

$\therefore p\left(x\right)_{\max}=p\left(1\right)=1$，则 $2t\ge 1$，解得 $t\ge\dfrac{1}{2}$，②对；

对于③，$y=f\left(x\right)+g\left(x\right)=x^{2}-2x+\mathrm{e}^{x}+t$，$y'=2x-2+\mathrm{e}^{x}$，

因为函数 $y'=2x-2+\mathrm{e}^{x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

$\because y'\big|_{x=0}=-1<0$，$y'\big|_{x=1}=\mathrm{e}>0$，所以，存在 $x_{0}\in\left(0,1\right)$，使得 $y'=0$，

当 $x<x_{0}$ 时，$y'<0$，此时函数 $y=x^{2}-2x+\mathrm{e}^{x}+t$ 单调递减，

当 $x>x_{0}$ 时，[illegible]$y'>0$[illegible]，此时函数 $y=x^{2}-2x+\mathrm{e}^{x}+t$ 单调递增，

所以，对任意的实数 t，函数 $y=x^{2}-2x+\mathrm{e}^{x}+t$ 有最小值，③错；

对于④，令 $u\left(x\right)=x^{2}-2x+\mathrm{e}^{x}+t$，不妨令 $u\left(0\right)=1+t=0$，即取 $t=-1$，

由③可知，函数 $u\left(x\right)=x^{2}-2x+\mathrm{e}^{x}-1$ 在 $\left(-\infty,x_{0}\right)$ 上单调递减，在 $\left(x_{0},+\infty\right)$ 上单调递增，

因为 $x_{0}\in\left(0,1\right)$，则 $u\left(x_{0}\right)<u\left(0\right)=0$，$u\left(2\right)=\mathrm{e}^{2}-1>0$，

所以，存 $x_{1}\in\left(x_{0},2\right)$，使得 $u\left(x_{1}\right)=0$，

此时函数 $u\left(x\right)$ 的零点之和为 $x_{1}+0=x_{1}<2$，④对.

故答案为：①②④.

【点睛】方法点睛：利用导数解决函数零点问题的方法：

（1）直接法：先对函数求导，根据导数的方法求出函数的单调区间与极值，根据函数的基本性质作出图象，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/808113050006006023