一、选择题

1．对大于 1 的自然数 m 的三次幂可用奇数进行以下形式的“分裂”：仿此，若 m^3 的“分裂数”中有一个是 2017，则 m 的值为（   ）

$$2^3\begin{cases}3\\5\end{cases},3^3\begin{cases}7\\9\\11\end{cases},4^3\begin{cases}13\\15\\17\\19\end{cases},$$

A． 44　　B． 45　　C． 46　　D． 47

2．数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=\frac{1}{2}$，$a_{m+n}=a_ma_n\left(\forall m,n\in\mathbf{N}^*\right)$，则 $a_6=$（   ）

A． $\frac{1}{16}$　　B． $\frac{1}{32}$　　C． $\frac{1}{64}$　　D． $\frac{1}{128}$

3．设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n,n\in\mathbf{N}^*$．若 $S_{12}>0,S_{13}<0$，则数列 $\{|a_n|\}$ 的最小项是（ ）

A．第 6 项　　B．第 7 项　　C．第 12 项　　D．第 13 项

4．朱载堉（1536-1611），明太祖九世孙，音乐家，数学家，天文历算家，在他多达百万字著述中以《乐律全书》最为著名，在西方人眼中他是大百科全书式的学者王子，他对文乙的最大贡献是他创建了“十二平均律”，此理论被广泛应用在世界各国的键盘乐器上，包善钢琴，故朱载堉被誉为“钢琴理论的鼻祖”.“十二平均律＂是指一个八度有 13 个音，相邻两个音之间的频率之比相等，且最后一个音频率是最初那个音频率的 2 倍，设第三个音频率为 f_3，第九个音频率 f_9，则 $\frac{f_9}{f_3}$ 等于（   ）

A． $\sqrt{2}$　　B． $\sqrt[3]{2}$　　C． $\sqrt[4]{2}$　　D． $\sqrt[6]{2}$

5．定义：在数列 $\{a_n\}$ 中，若满足 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}-\frac{a_{n+1}}{a_n}=d$（$n\in N_+$，$d$ 为常数），称 $\{a_n\}$ 为“等差比数列”。已知在“等差比数列” $\{a_n\}$ 中，$a_1=a_2=1,a_3=3$ 则 $\frac{a_{2015}}{a_{2013}}=$（   ）

A． $4\times2015^2-1$　　B． $4\times2014^2-1$

C． $4\times2013^2-1$　　D． 4×2013^2

6．已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+2}(n\in N^*)$．则 $a_{10}=$（   ）

A． $\frac{1}{1021}$　　B． $\frac{1}{1022}$　　C． $\frac{1}{1023}$　　D． $\frac{1}{1024}$

7．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 S_n，前 n 项的积是 T_n．

①若 $\{a_n\}$ 是等差数列，则 $\{a_n+a_{n+1}\}$ 是等差数列；

②若$\{a_n\}$是等比数列，则$\{a_n+a_{n+1}\}$是等比数列；

③若$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$是等差数列，则$\{a_n\}$是等差数列；

④若$\{a_n\}$是等比数列，则$\left\{(T_n)^2_n\right\}$是等比数列.

其中正确命题的个数有（　）

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

8．数列$\{a_n\}$是等比数列，若$a_2=1$，$a_5=\dfrac{1}{8}$，则$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}$的取值范围是（　）

A．$\left(-\infty,\dfrac{8}{3}\right)$　　B．$\left(\dfrac{2}{3},2\right]$　　C．$\left[1,\dfrac{8}{3}\right)$　　D．$\left[2,\dfrac{8}{3}\right)$

9．已知数列$\{a_n\}$是 1 为首项，2 为公差的等差数列，$\{b_n\}$是 1 为首项，2 为公比的等比数列，设$c_n=a_{b_n}$，$T_n=c_1+c_2+\cdots c_n$，$\left(n\in N^*\right)$，则当$T_n<2020$时，n的最大值为（　）

A．9　　B．10　　C．11　　D．24

10．删去正整数 1，2，3，4，5，…中的所有完全平方数与立方数（如 4，8），得到一个新数列，则这个数列的第 2020 项是（　）

A．2072　　B．2073　　C．2074　　D．2075

11．南宋数学家杨辉在《详解九章算法》和《算法通变本末》中，提出了一些新的垛积公式，所讨论的高阶等差数列与一般等差数列不同，前后两项之差并不相等，但是逐项差数之差或者高次差成等差数列.对这类高阶等差数列的研究，在杨辉之后一般称为“垛积术”.现有高阶等差数列，其前 7 项分别为 3，4，6，9，13，18，24，则该数列的第 19 项为（　）

A．174　　B．184　　C．188　　D．160

12．等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，若$S_6:S_3=3:1$，则$S_9:S_3=$（　）

A．$4:1$　　B．$6:1$　　C．$7:1$　　D．$9:1$

二、填空题

13．数列$\{a_n\}$的前 n 项和是$S_n, a_1=1, a_n\neq 0, 3S_n=a_na_{n+1}+1$，若$a_k=2020$，则$k=$______.

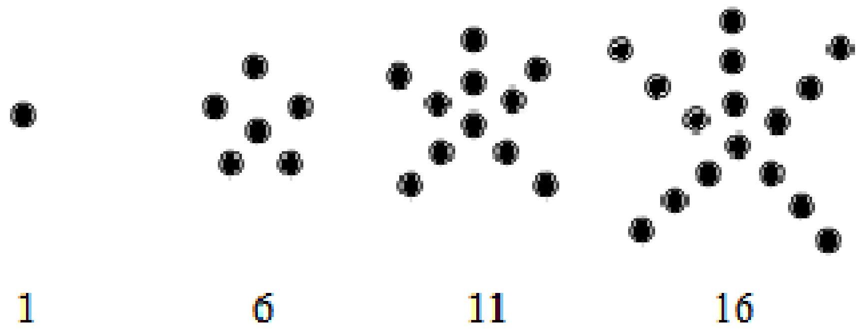
14．数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=2$，$S_n=\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)a_{n+1}$，$b_n=\log_2 a_n$，则数列$\left\{\dfrac{1}{b_nb_{n+1}}\right\}$的前$n$项和$T_n=$_____.

15．已知正项等比数列$\{a_n\}$满足：$a_7=a_6+2a_5$,若存在两项a_m,a_n使得$\sqrt{a_ma_n}=4a_1$,则

$\dfrac{1}{m}+\dfrac{4}{n}$的最小值为____.

16．一个等差数列的前 12 项和为 354，前 12 项中偶数项和与奇数项和之比为$32:27$，则公差 d 为________.

17．根据下面的图形及相应的点数，写出点数构成的数列的一个通项公式 $a_n=$__________.



18．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1, S_n=2a_{n+1}$，则$S_n=$__________.

19．正项数列$\{a_n\}$满足$2a_n^2=a_{n-1}^2+a_{n+1}^2$，若$a_1=1$，$a_2=2$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为______.

20．给出下列命题:① $y=1$是幂函数；② 函数$f(x)=2^x-\log_2 x$的零点有且只有 1 个；③ $\sqrt{x-1}(x-2)\geq 0$的解集为$[2,+\infty)$；④“$x<1$”是“$x<2$”的充分非必要条件；⑤ 数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=a^n-1\ (a\in R)$，则$\{a_n\}$为等差或等比数列；其中真命题的序号是________.

三、解答题

21．设数列$\{a_n\}$前n项和为S_n，满足$a_n=\dfrac{3}{4}S_n+\dfrac{1}{2}\left(n\in N^*\right)$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）令$b_n=na_n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

22．设各项均为正数的数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，满足对任意$n\in\mathbf{N}^*$，都有

$a_1^3+a_2^3+\quad+a_n^3=S_n^2$.

（1）求证：数列$\{a_n\}$为等差数列；

（2）若$b_n=(-1)^n(2a_n)^2$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和T_n.

23．已知公差为整数的等差数列$\{a_n\}$满足$a_2a_3=15$，且$a_4=7$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式a_n；

（2）求数列$\{a_n\cdot 3^n\}$的前n项和S_n.

24．已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，当n 2，$n\in N^*$时，$S_{n-1}=1-2a_n$，且$a_1=\dfrac{1}{2}$.

$\geqslant$

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式;

（2）设$b_n = na_n$，数列$\{b_n\}$的前 n 项和T_n，求使得$T_n < \frac{15}{8}$成立的 n 的最大值.

25．已知数列$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，数列$\{b_n\}$为等差数列，且$b_1 = a_1 = 1$，$b_3 = a_3 + 1$，$b_5 = a_5 - 7$.

（1）求数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式;

（2）设S_n为数列$\{a_n^2\}$的前n项和，若对于任意$n \in N^*$，有$S_n + \frac{1}{3} = t \cdot 2^{b_n}$，求实数$t$的值;

（3）记$c_n = \frac{b_{n+2}}{b_n b_{n+1} a_{n+2}}$，数列$\{c_n\}$的前$n$项和$A_n$，求证：$A_n < \frac{1}{2}$.

26．已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，点(a_n, s_n)在直线$y = 2x - 2$，上$n \in \mathbf{N}^*$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式;

（2）若$b_n = n + a_n$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和T_n.

【参考答案】*试卷处理标记，请不要删除**

一、选择题

1．B

解析：B

【分析】

由题意，从2^3到m^3，正好用去从3开始的连续奇数，共$2 + 3 + \cdots + m = \frac{1}{2}(m+2)(m-1)$个，再由$2017$是从$3$开始的第$1008$个奇数，可得选项.

【详解】

由题意，从2^3到m^3，正好用去从3开始的连续奇数，共$2 + 3 + \cdots + m = \frac{1}{2}(m+2)(m-1)$个，$2n + 1 = 2017$，得$n = 1008$，

所以2017是从3开始的第1008个奇数，

当$m = 45$时，从2^3到45^3，用去从 3 开始的连续奇数共$\frac{47 \times 44}{2} = 1034$个，

当$m = 44$时，从2^3到44^3，用去从 3 开始的连续奇数共$\frac{46 \times 43}{2} = 989$个，

所以$m = 45$，

故选：B.

【点睛】
方法点睛：对于新定义的数列问题，关键在于找出相应的规律，再运用等差数列和等比数列的通项公式和求和公式，得以解决.

2．C

解析：C

【分析】

由m,n的任意性，令$m=1$，可得$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$，即数列$\{a_n\}$是首项为$\frac{1}{2}$，公比为$\frac{1}{2}$得等比数列，即可求出答案.

【详解】

由于$\forall m,n\in\mathbf{N}^*$，有$a_{m+n}=a_m a_n$，且$a_1=\frac{1}{2}$

令$m=1$，则$a_{n+1}=a_1a_n=\frac{1}{2}a_n$，即数列$\{a_n\}$是首项为$\frac{1}{2}$，公比为$\frac{1}{2}$得等比数列，

所以$a_n=a_1q^{n-1}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$，故$a_6=\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$

故选：C.

【点睛】

关键点点睛：本题考查等比数列，解题的关键是特殊值取法，由m,n的任意性，令$m=1$，即可知数列$\{a_n\}$是等比数列，考查学生的分析解题能力与运算能力，属于一般题.

3．B

解析：B

【分析】

可利用等差数列的前n项和的性质，等差数列下标的性质进行判断即可

【详解】

由题意$S_{12}>0,S_{13}<0$及$S_{12}=6\left(a_1+a_{12}\right)=6\left(a_6+a_7\right),S_{13}=\frac{13}{2}\left(a_1+a_{13}\right)=13a_7$，得$a_6+a_7>0,a_7<0$，所以$a_6>0,a_6>\left|a_7\right|$，且公差$d<0$，所以$\left|a_7\right|$，最小.故选*B*.

【点睛】

等差数列的前n项和S_n具有以下性质

$S_{2n-1}=\left(2n-1\right)a_n$，$S_{2n}=n\left(a_n+a_{n+1}\right)$.

4．A

解析：A

【分析】

依题意 13 个音的频率成等比数列，记为$\{a_n\}$，设公比为 *q*，推导出$q=2^{\frac{1}{12}}$，由此能求出

$\dfrac{f_9}{f_3}$的值.

【详解】

依题意 13 个音的频率成等比数列，记为$\{a_n\}$，设公比为 q，

则$a_{13}=a_1q^{12}$，且$a_{13}=2a_1$，$\therefore q=2^{\frac{1}{12}}$，

$\therefore \dfrac{f_9}{f_3}=\dfrac{a_9}{a_3}=\dfrac{a_1q^8}{a_1q^2}=q^6=\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^6=\sqrt{2}$.

故选：A.

【点睛】

关键点点睛：本题考查等比数列的通项公式及性质，解题的关键是分析题意将 13 个音的频率构成等比数列，再利用等比数列的性质求解，考查学生的分析解题能力与转化思想及运算能力，属于基础题.

5．C

解析：C

【分析】

利用定义，可得$\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$是以 1 为首项，2 为公差的等差数列，从而$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2n-1$，利用

$\dfrac{a_{2015}}{a_{2013}}=\dfrac{a_{2015}}{a_{2014}}\cdot\dfrac{a_{2014}}{a_{2013}}$，可得结论.

【详解】

$a_1=a_2=1$，$a_3=3$，

$\therefore \dfrac{a_3}{a_2}-\dfrac{a_2}{a_1}=2$，

$\therefore \left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$是以 1 为首项，2 为公差的等差数列，

$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2n-1$，

$\therefore \dfrac{a_{2015}}{a_{2013}}=\dfrac{a_{2015}}{a_{2014}}\cdot\dfrac{a_{2014}}{a_{2013}}=(2\times2014-1)(2\times2013-1)=4027\times4025$

$=(4026+1)(4026-1)=4026^2-1=4\times2013^2-1$.

故选：C.

【点睛】

数列的递推关系是给出数列的一种方法，根据给出的初始值和递推关系可以依次写出这个数列的各项，由递推关系求数列的通项公式，常用的方法有：①求出数列的前几项，再归纳猜想出数列的一个通项公式；②将已知递推关系式整理、变形，变成等差、等比数列，

或用累加法、累乘法、迭代法求通项.

6． C

解析：C

【分析】

根据数列的递推关系，利用取倒数法进行转化得 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{a_n}+1$，构造 $\left\{\frac{1}{a_n}+1\right\}$ 为等比数列，求解出通项，进而求出 a_{10}.

【详解】

因为 $a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+2}$，所以两边取倒数得 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+2}{a_n}=\frac{2}{a_n}+1$，则 $\frac{1}{a_{n+1}}+1=2\left(\frac{1}{a_n}+1\right)$，

所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}+1\right\}$ 为等比数列，则 $\frac{1}{a_n}+1=\left(\frac{1}{a_1}+1\right)\cdot 2^{n-1}=2^n$，

所以 $a_n=\frac{1}{2^n-1}$，故 $a_{10}=\frac{1}{2^{10}-1}=\frac{1}{1023}$.

故选：C

【点睛】

方法点睛：对于形如 $a_{n+1}=pa_n+q\left(p\neq 1\right)$ 型，通常可构造等比数列 $\left\{a_n+x\right\}$（其中 $x=\frac{q}{p-1}$）来进行求解.

7． D

解析：D

【分析】

结合等比数列、等差数列的定义，对四个命题逐个分析，可选出答案.

【详解】

对于①，设等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 的公差为 d，则 $\left(a_{n+1}+a_{n+2}\right)-\left(a_n+a_{n+1}\right)=\left(a_{n+1}-a_n\right)+\left(a_{n+2}-a_{n+1}\right)=2d$ 为定值，故 $\left\{a_n+a_{n+1}\right\}$ 是等差数列，即①正确；

对于②，设等比数列 $\left\{a_n\right\}$ 的公比为 q，则 $\frac{a_{n+1}+a_{n+2}}{a_n+a_{n+1}}=\frac{a_nq+a_{n+1}q}{a_n+a_{n+1}}=q$ 为定值，故 $\left\{a_n+a_{n+1}\right\}$ 是等比数列，即②正确；

对于③，等差数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的首项为 $\frac{S_1}{1}=a_1$，设公差为 d，则数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的通项公式为 $\frac{S_n}{n}=a_1+\left(n-1\right)d$，所以 $S_n=na_1+n\left(n-1\right)d$，

则 $n\geq 2$ 时，

$a_n=S_n-S_{n-1}=na_1+n(n-1)d-[(n-1)a_1+(n-1)(n-2)d]=a_1+2(n-1)d$，

由 a_1 符合 $a_n=a_1+2(n-1)d$，可知 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=a_1+2(n-1)d$，

则 $a_n-a_{n-1}=a_1+2(n-1)d-[a_1+2(n-2)d]=2d$ 为定值，即 $\{a_n\}$ 是等差数列，故③正确；

对于④，设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则

$T_n=a_1a_2a_3\cdots a_n=a_1(a_1q)(a_1q^2)\cdots(a_1q^{n-1})=a_1^nq^{1+2+3+\cdots+(n-1)}=a_1^nq^{\frac{n(n-1)}{2}}$，所以

$(T_n)^{\frac{2}{n}}=\left[a_1^nq^{\frac{n(n-1)}{2}}\right]^{\frac{2}{n}}=a_1^2q^{n-1}$，

则 $\dfrac{(T_n)^{\frac{2}{n}}}{(T_{n-1})^{\frac{2}{n-1}}}=\dfrac{a_1^2q^{n-1}}{a_1^2q^{n-2}}=q$ 为定值，即 $\left\{(T_n)^{\frac{2}{n}}\right\}$ 是等比数列，故④正确.

所以正确命题的个数有 4 个.

故选：D.

【点睛】

本题考查等比数列、等差数列的判定，考查学生的推理能力，属于中档题.

8．D

解析：D

【分析】

由题意计算出 $\{a_n\}$ 的公比 q，由等比数列的性质可得 $\{a_na_{n+1}\}$ 也为等比数列，由等比数列前 n 项和计算即可得结果.

【详解】

因为数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，$a_2=1$，$a_5=\frac{1}{8}$，所以 $q^3=\frac{a_5}{a_2}=\frac{1}{8}$，即 $q=\frac{1}{2}$，所以 $a_1=2$，

由等比数列的性质知 $\{a_na_{n+1}\}$ 是以 2 为首项，以 $\frac{1}{4}$ 为公比的等比数列.

所以 $2=a_1a_2\le a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}=\dfrac{2\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{4}}=\frac{8}{3}-\frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n<\frac{8}{3}$，

故选：D.

【点睛】

本题主要考查了等比数列的性质以及等比数列前 n 项和的计算，属于中档题.

9．A

解析：A

【分析】

根据题意计算$a_n=2n-1$，$b_n=2^{n-1}$，$T_n=2^{n+1}-n-2$，解不等式得到答案.

【详解】

$\because \{a_n\}$是以 1 为首项，2 为公差的等差数列，$\therefore a_n=2n-1$,

$\because \{b_n\}$是以 1 为首项，2 为公比的等比数列，$\therefore b_n=2^{n-1}$,

$\therefore T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=a_{b_1}+a_{b_2}+\cdots+a_{b_n}=a_1+a_2+a_4+\ldots+a_{2^{n-1}}$

$=(2\times1-1)+(2\times2-1)+(2\times4-1)+\cdots+\left(2\times2^{n-1}-1\right)=2\left(1+2+4+\cdots+2^{n-1}\right)-n$

$=2\times\dfrac{1-2^n}{1-2}-n=2^{n+1}-n-2$,

$\because T_n<2020$，$\therefore 2^{n+1}-n-2<2020$，解得$n\le9$,

则当$T_n<2020$时，n的最大值是 9.

故选：A.

【点睛】

本题考查了等差数列，等比数列，分组求和法，意在考查学生对于数列公式方法的灵活运用.

10． C

解析：C

【分析】

由于数列$1^2,2,3,2^2,5,6,7,8,3^2,\ldots45^2$共有$2025$项，其中有$45$个平方数，12 个立方数，有 3 个既是平方数，又是立方数的数，所以还剩余$2025-45-12+3=1971$项，所以去掉平方数和立方数后，第2020项是在2025后的第$(2020-1971=49)$个数，从而求得结果.

【详解】

$\because 45^2=2025$，$46^2=2116$，$2020<2025$，所以从数列$1^2,2,3,2^2,5,6,7,8,3^2,\ldots45^2$中去掉$45$个平方数，

因为$12^3=1728<2025<13^3=2197$，所以从数列$1^2,2,3,2^2,5,6,7,8,3^2,\ldots45^2$中去掉$12$个立方数，

又$3^6<2025<4^6$，所以在从数列$1^2,2,3,2^2,5,6,7,8,3^2,\ldots45^2$中有 3 个数即是平方数，又是立方数的数，重复去掉了 3 个即是平方数，又是立方数的数，

所以从数列$1^2,2,3,2^2,5,6,7,8,3^2,\ldots45^2$中去掉平方数和立方数后还有$2025-45-12+3=1971$项，此时距$2020$项还差$2020-1971=49$项，

所以这个数列的第 2020 项是$2025+49=2074$,

故选：C.

【点睛】

本题考查学生的实践创新能力，解决该题的关键是找出第2020项的大概位置，所以只要

弄明白在数列$1^2,2,3,2^2,5,6,7,8,3^2,\ldots 45^2$去掉哪些项，去掉多少项，问题便迎刃而解，属于中档题.

11．A

解析：A

【分析】

根据已知条件求得$a_n-a_{n-1}=n-1$，利用累加法求得a_{19}.

【详解】

依题意：

$3,4,6,9,13,18,24,$

$1,2,3,4,5,6,$

所以$a_n-a_{n-1}=n-1$（$n\geq 2$），且$a_1=3$，

所以$a_n=\left(a_n-a_{n-1}\right)+\left(a_{n-1}-a_{n-2}\right)+\cdots+\left(a_2-a_1\right)+a_1$

$=\left(n-1\right)+\left(n-2\right)+\cdots+2+1+3$

$=\frac{\left(n-1+1\right)\left(n-1\right)}{2}+3=\frac{n\left(n-1\right)}{2}+3$.

所以$a_{19}=\frac{19\times 18}{2}+3=174$.

故选：A

【点睛】

本小题主要考查累加法，属于中档题.

12．C

解析：C

【分析】

利用等比数列前n项和的性质S_k，$S_{2k}-S_k$，$S_{3k}-S_{2k}$，$S_{4k}-S_{3k}$，$\cdots$成等比数列求解.

【详解】

因为数列$\left\{a_n\right\}$为等比数列，则S_3，S_6-S_3，S_9-S_6成等比数列，

设$S_3=m$，则$S_6=3m$，则$S_6-S_3=2m$，

故$\frac{S_6-S_3}{S_3}=\frac{S_9-S_6}{S_6-S_3}=2$，所以$S_9-S_6=4m$，得到$S_9=7m$，所以$\frac{S_9}{S_3}=7$.

故选：C.

【点睛】

本题考查等比数列前n项和性质的运用，难度一般，利用性质结论计算即可.

二、填空题

13．1347【分析】当时则两式相减得到得到代入数据计算得到答案【详解】解：当时当时由则两式相减得到因为故数列的奇数项为以为首项 3 为公差的等