关于高三数学等比数列

一、概念与公式

1.定义

若数列 $\{a_n\}$ 满足：$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$（常数），则称 $\{a_n\}$ 为等比数列.

2.通项公式

$$a_n=a_1q^{n-1}=a_mq^{n-m}.$$

3.前 n 项和公式

$$S_n=\begin{cases} na_1 & (q=1); \\ \dfrac{a_1-a_nq}{1-q}=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} & (q\neq 1). \end{cases}$$

二、等比数列的性质

1.首尾项性质：有穷等比数列中，与首末两项距离相等的两项积相等，即：$a_1a_n=a_2a_{n-1}=a_3a_{n-2}=\cdots$.

特别地，若项数为奇数，还等于中间项的平方，即：

$$a_1a_n=a_2a_{n-1}=a_3a_{n-2}=\cdots=a_{中}{}^2.$$

2.若 $p+q=r+s$（p、q、r、$s\in\mathbf{N}^*$），则 $a_pa_q=a_ra_s$.

特别地，若 $m+n=2p$，则 $a_ma_n=a_p^2$.

3.等比中项

如果在两个数 a、b 中间插入一个数 G，使 a、G、b 成等比数列，则 G 叫做 a 与 b 的等比中项.

$$G=\pm\sqrt{ab}.$$

4.若数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，m, p, n 成等差数列，则 a_m, a_p, a_n 成等比数列.

5.顺次 n 项和性质

若 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，则 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，$\sum\limits_{k=n+1}^{2n}a_k$，$\sum\limits_{k=2n+1}^{3n}a_k$ 也成等比数列，且公比为 q^n.

6.若数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 是等比数列，则数列 $\{a_nb_n\}$，$\{\dfrac{a_n}{b_n}\}$ 也是等比数列.

7.单调性

$\begin{cases} a_1>0, \\ q>1, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1<0, \\ 0<q<1, \end{cases}$ $\Leftrightarrow \{a_n\}$ 是递增数列;

$\begin{cases} a_1>0, \\ 0<q<1, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1<0, \\ q>1, \end{cases}$ $\Leftrightarrow \{a_n\}$ 是递减数列;

$q=1 \Leftrightarrow \{a_n\}$ 是常数列;

$q<0 \Leftrightarrow \{a_n\}$ 是摆动数列.

8.若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，则 $\{b^{a_n}\}$ 是等比数列；若数列 $\{a_n\}$ 是正项等比数列，则 $\{\log_b a_n\}$ 是等差数列.

三、判断、证明方法

1.定义法;　　2.通项公式法;　　3.等比中项法.

典型例题

1.设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_1=1$，$S_2=3$，且$S_{n+1}-3S_n+2S_{n-1}=0\,(n\geq2)$，试判断$\{a_n\}$是不是等比数列.

$a_1=1$, $a_2=2$, $S_{n+1}-S_n=2(S_n-S_{n-1})$, $a_n=2^{n-1}$，$\{a_n\}$是等比数列.

2.设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_3+S_6=2S_9$，求数列的公比q.

$-\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$

3.三个数成等比数列，若将第三项减去32，则成等差数列，再将此等差数列的第二项减去4，又成等比数列，求原来的三个数.

设三数为a, b, c, 得$b=2+4a$, $c=7a+36$.

2, 10, 50 或$\frac{2}{9}$, $\frac{26}{9}$, $\frac{338}{9}$.

4.已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且前n和S_n满足：$6S_n=a_n^2+3a_n+2$. 若a_2, a_4, a_9成等比数列，求数列的通项公式.

$a_{n+1}-a_n=3$, $a_1=1$, $a_n=3n-2$.

5.数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=2$．数列$\{a_n\cdot a_{n+1}\}$是公比为$q(q>0)$的等比数列. (1)求使$a_na_{n+1}+a_{n+1}a_{n+2}>a_{n+2}a_{n+3}(n\in\mathrm{N}^*)$成立的$q$的取值范围; (2)若$b_n=a_{2n-1}+a_{2n}\ (n\in\mathrm{N}^*)$，求$\{b_n\}$的通项公式.

(1) $0<q<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$; (2) $b_n=3q^{n-1}$.

6.已知$\{a_n\}$是首项为a_1，公比为q的等比数列. (1)求和: $a_1C_2^0-a_2C_2^1+a_3C_2^2$, $a_1C_3^0-a_2C_3^1+a_3C_3^2-a_4C_3^3$; (2)由(1)的结果归纳概括出关于正整数$n$的一个结论，并加以证明; (3)设$q\neq1$, S_n是$\{a_n\}$的前n项和，求$S_1C_n^0-S_2C_n^1+S_3C_n^2-S_4C_n^3+\cdots+(-1)^nS_{n+1}C_n^n$.

(1)$a_1(1-q)^2$, $a_1(1-q)^3$;

(2)$a_1C_n^0-a_2C_n^1+a_3C_n^2-a_4C_n^3+\cdots+(-1)^na_{n+1}C_n^n=a_1(1-q)^n(n\in\mathrm{N}^*)$;

(3)$-a_1q(1-q)^{n-1}$.

7.数列$\{a_n\}$的前n项和记为S_n, 已知$a_1=1, a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}S_n(n=1, 2, 3,\cdots)$，证明：(1)数列$\{\dfrac{S_n}{n}\}$是等比数列；(2) $S_{n+1}=4a_n$.

证: (1) $\because a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$, 又$a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}S_n$，$\therefore S_{n+1}-S_n=\dfrac{n+2}{n}S_n$,

$\therefore (n+2)S_n=n(S_{n+1}-S_n)$. 整理得$nS_{n+1}=2(n+1)S_n$.

$\therefore \dfrac{S_{n+1}}{n+1}=2\cdot\dfrac{S_n}{n}$.

$\therefore \{\dfrac{S_n}{n}\}$是以1为首项，2为公比的等比数列.

(2)由(1)知$\dfrac{S_{n+1}}{n+1}=4\cdot\dfrac{S_{n-1}}{n-1}(n\geqslant 2)$,

于是$S_{n+1}=4(n+1)\cdot\dfrac{S_{n-1}}{n-1}=4a_n(n\geqslant 2)$,

又$a_2=3S_1=3a_1=3$, 故$S_2=a_1+a_2=4=4a_1$.

因此对于任意正整数n，都有$S_{n+1}=4a_n$.

7.数列$\{a_n\}$的前n项和记为S_n，已知$a_1=1, a_{n+1}=\frac{n+2}{n}S_n(n=1, 2, 3,\cdots)$，证明：(1)数列$\{\frac{S_n}{n}\}$是等比数列；(2) $S_{n+1}=4a_n$.

(2)证法2：由(1)知$\frac{S_n}{n}=2^{n-1}$.

$\therefore S_n=n\cdot 2^{n-1}$.

$\therefore S_{n+1}=(n+1)\cdot 2^n$.

$\because a_n=S_n-S_{n-1}=n\cdot 2^{n-1}-(n-1)\cdot 2^{n-2}=(n+1)\cdot 2^{n-2}\ (n\geqslant 2)$.

而$a_1=1$也适合上式，

$\therefore a_n=(n+1)\cdot 2^{n-2}\ (n\in \mathrm{N}^*)$.

$\therefore 4a_n=(n+1)\cdot 2^n=S_{n+1}$.

即$S_{n+1}=4a_n$.

8.数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $S_{n+1}=4a_n+2$, (1)设 $b_n=a_{n+1}-2a_n$, 求证: $\{b_n\}$ 是等比数列, 并求其通项; (2)设 $c_n=\frac{a_n}{2^n}$, 求证: 数列 $\{c_n\}$ 是等差数列; (3)求 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

(1)证: 由已知 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=4a_n+2-4a_{n-1}-2$,

$\therefore a_{n+1}=4a_n-4a_{n-1}(n\geqslant 2)$.

$\therefore b_n=a_{n+1}-2a_n=4a_n-4a_{n-1}-2a_n=2(a_n-2a_{n-1})=2b_{n-1}$.

$\therefore \frac{b_n}{b_{n-1}}=2(n\geqslant 2)$. 又由 $a_1=1$, $a_1+a_2=S_2=4a_1+2$ 得 $a_2=5$,

$\therefore b_1=a_2-2a_1=3$.

$\therefore \{b_n\}$是以 3 为首项, 2 为公比的等比数列.

$\therefore b_n=3\cdot 2^{n-1}$.

8.数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $S_{n+1}=4a_n+2$, (1)设 $b_n=a_{n+1}-2a_n$, 求证: $\{b_n\}$ 是等比数列，并求其通项；(2)设 $c_n=\dfrac{a_n}{2^n}$，求证: 数列 $\{c_n\}$ 是等差数列；(3)求 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

(2)证: $\because c_{n+1}-c_n=\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{a_{n+1}-2a_n}{2^{n+1}}=\dfrac{b_n}{2^{n+1}}=\dfrac{3\cdot 2^{n-1}}{2^{n+1}}=\dfrac{3}{4}$(常数),

$\therefore$ 数列 $\{c_n\}$ 是等差数列.

(3)解: 由已知 $c_1=\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore$ 由(2)得 $c_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}(n-1)=\dfrac{1}{4}(3n-1)$.

$\therefore a_n=2^n\cdot c_n=(3n-1)\cdot 2^{n-2}$. $\therefore a_{n-1}=(3n-4)\cdot 2^{n-3}$ $(n\geqslant 2)$.

$\therefore S_n=4a_{n-1}+2=4\cdot(3n-4)\cdot 2^{n-3}+2=(3n-4)\cdot 2^{n-1}+2$.

而 $S_1=a_1=1$ 亦适合上式,

$\therefore S_n=(3n-4)\cdot 2^{n-1}+2$ $(n\in \mathrm{N}^*)$.