

2023-2024 学年安徽省凤阳县二中高三寒假开学综合检测试题

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚, 将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂; 非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写, 字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效; 在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁, 不要折叠, 不要弄破、弄皱, 不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{\ln x} - 3 + \frac{3a \ln x}{x} - a$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上恰有四个不同的零点, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(e, 3) \cup (3, +\infty)$ B. $[0, e)$ C. $(e^2, +\infty)$ D. $(-\infty, e) \cup \{3\}$

2. 我国古代数学家秦九韶在《数书九章》中记述了“三斜求积术”, 用现代式子表示即为: 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所

对的边分别为 a, b, c , 则 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \sqrt{\frac{1}{4} \left[(ab)^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right)^2 \right]}$. 根据此公式, 若 $a \cos B + (b + 3c) \cos A = 0$,

且 $a^2 - b^2 - c^2 = 2$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{6}$ D. $2\sqrt{3}$

3. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 记 $f_1(x) = f'(x)$, $f_2(x) = f'_1(x)$, $\dots$, $f_{n+1}(x) = f'_n(x)$ ($n \in \mathbb{N}^*$). 若

$f(x) = x \sin x$, 则 $f_{2019}(x) + f_{2021}(x) =$ ()

- A. $-2 \cos x$ B. $-2 \sin x$ C. $2 \cos x$ D. $2 \sin x$

4. 若函数 $f(x) = e^{|x|} - mx^2$ 有且只有 4 个不同的零点, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $\left[\frac{e^2}{4}, +\infty \right)$ B. $\left(\frac{e^2}{4}, +\infty \right)$ C. $\left(-\infty, \frac{e^2}{4} \right)$ D. $\left(-\infty, \frac{e^2}{4} \right]$

5. 已知双曲线的中心在原点且一个焦点为 $F(\sqrt{7}, 0)$, 直线 $y = x - 1$ 与其相交于 M, N 两点, 若 MN 中点的横坐标为 $-\frac{2}{3}$, 则此双曲线的方程是

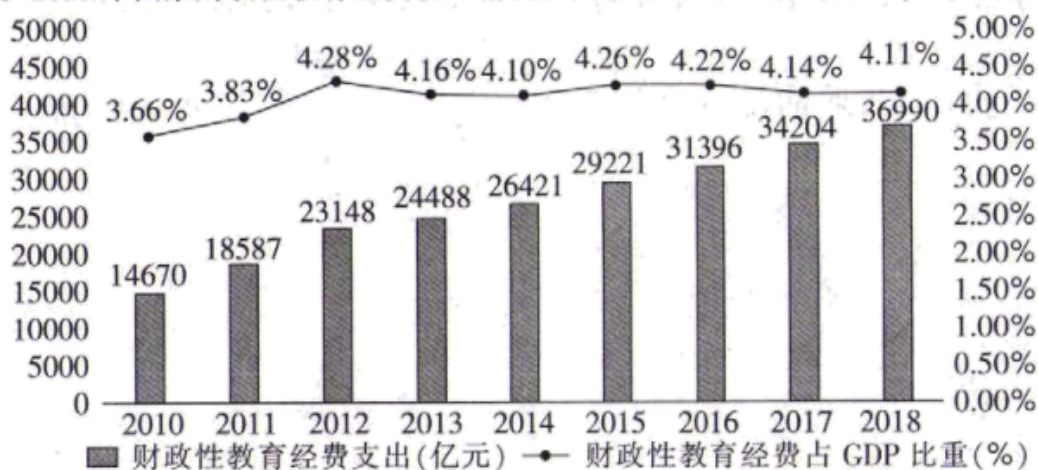
- A. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$ B. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$
C. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} = 1$ D. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{5} = 1$

6. 已知抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$), F 为抛物线的焦点且 MN 为过焦点的弦, 若 $|OF| = 1$, $|MN| = 8$, 则 $\triangle OMN$ 的面积为 ()

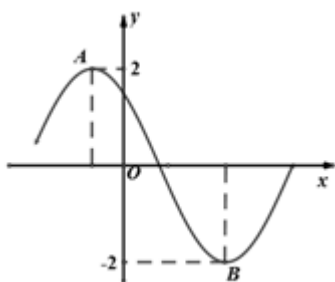
- A. $2\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $4\sqrt{2}$ D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

7. 国务院发布《关于进一步调整优化结构、提高教育经费使用效益的意见》中提出，要优先落实教育投入。某研究机构统计了2010年至2018年国家财政性教育经费投入情况及其在GDP中的占比数据，并将其绘制成下表，由下表可知下列叙述错误的是（ ）

2010-2018 年国家财政性教育经费投入情况及其在 GDP 中的占比情况(单位:亿元,%)



- A. 随着文化教育重视程度的不断提高，国在财政性教育经费的支出持续增长
- B. 2012 年以来，国家财政性教育经费的支出占 GDP 比例持续 7 年保持在 4% 以上
- C. 从 2010 年至 2018 年，中国 GDP 的总值最少增加 60 万亿
- D. 从 2010 年到 2018 年，国家财政性教育经费的支出增长最多的年份是 2012 年
8. 函数 $f(x) = 2 \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的部分图像如图所示，若 $AB = 5$ ，点 A 的坐标为 $(-1, 2)$ ，若将函数 $f(x)$ 向右平移 $m(m > 0)$ 个单位后函数图像关于 y 轴对称，则 m 的最小值为（ ）



- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

9. 使得 $\left(3x + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^n$ ($n \in N_+$) 的展开式中含有常数项的最小的 n 为()

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n + 2$ ，将这个数列中的项摆放成如图所示的数阵.记 b_n 为数阵从左至右的 n

列，从上到下的 n 行共 n^2 个数的和，则数列 $\left\{\frac{n}{b_n}\right\}$ 的前 2020 项和为 ()

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n+1} \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{2n-1} \end{array}$$

- A. $\frac{1011}{2020}$ B. $\frac{2019}{2020}$ C. $\frac{2020}{2021}$ D. $\frac{1010}{2021}$

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ ，若不等式 $f(x) \leq |x - k|$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立，则实数 k 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 1]$ B. $[1, +\infty)$ C. $[0, 1)$ D. $(-1, 0]$

12. 在复平面内，复数 $z = \frac{2-i}{i}$ (i 为虚数单位) 对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

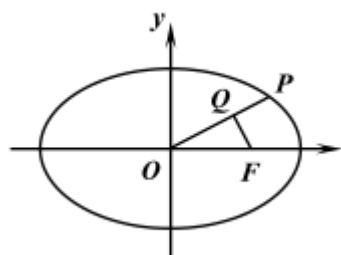
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = -6$ ，且 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$ ，则 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle =$ _____.

14. 不等式 $ax + 1 + \ln x \leq xe^x$ 对于定义域内的任意 x 恒成立，则 a 的取值范围为_____.

15. 如图，椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 e ， F 是 Γ 的右焦点，点 P 是 Γ 上第一象限内任意一点，

$\vec{OQ} = \lambda \vec{OP} (\lambda > 0)$ ， $\vec{FQ} \cdot \vec{OP} = 0$ ，若 $\lambda < e$ ，则 e 的取值范围是_____.



16. 某学校高一、高二、高三年级的学生人数之比为 5:5:4，现按年级采用分层抽样的方法抽取若干人，若抽取的高三年级为 12 人，则抽取的样本容量为_____人.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知 $f(x) = kx^2 + e^{-kx} (k > 0)$

(1) 当 $x > \frac{1}{2}$ 时，判断函数 $f(x)$ 的极值点的个数；

(2) 记 $g(x) = f(x) + x^2 - m \ln x \left(x > \frac{1}{2} \right)$, 若存在实数 t , 使直线 $y = t$ 与函数 $g(x)$ 的图象交于不同的两点

$A(x_1, t), B(x_2, t)$, 求证: $m > 2x_1x_2$.

18. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 其中 $a < c$, $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} = \frac{-\cos(B+C)}{\sin C \cos C}$.

(1) 求角 C 的值;

(2) 若 $c = 45$, $a = 27\sqrt{2}$, D 为 AC 边上的任意一点, 求 $AD + 2BD$ 的最小值.

19. (12 分) 某地在每周六的晚上 8 点到 10 点半举行灯光展, 灯光展涉及到 10000 盏灯, 每盏灯在某一时刻亮灯的概率均为 $p (0 < p < 1)$, 并且是否亮灯彼此相互独立. 现统计了其中 100 盏灯在一场灯光展中亮灯的时长 (单位: min), 得到下面的频数表:

亮灯时长/ min	[50, 60)	[60, 70)	[70, 80)	[80, 90)	[90, 100]
频数	10	20	40	20	10

以样本中 100 盏灯的平均亮灯时长作为一盏灯的亮灯时长.

(1) 试估计 p 的值;

(2) 设 X 表示这 10000 盏灯在某一时刻亮灯的数目.

①求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$;

②若随机变量 Z 满足 $Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$, 则认为 $Z \sim N(0, 1)$. 假设当 $4900 < X \leq 5000$ 时, 灯光展处于最佳灯光亮度. 试

由此估计, 在一场灯光展中, 处于最佳灯光亮度的时长 (结果保留为整数).

附:

①某盏灯在某一时刻亮灯的概率 p 等于亮灯时长与灯光展总时长的商;

②若 $Z \sim N(0, 1)$, 则 $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.6827$, $P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$,

$P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$.

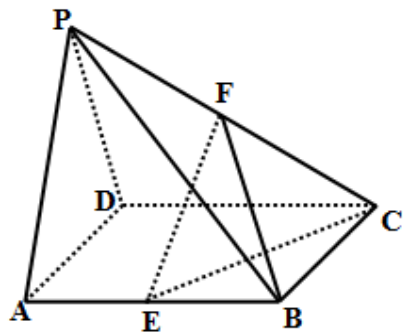
20. (12 分) 已知函数 $f(x) = a(x - \ln x) + x^2 - 2x$.

(1) 当 $a = -2e$ (e 为自然对数的底数) 时, 求函数 $f(x)$ 的极值;

(2) $f'(x)$ 为 $y = f(x)$ 的导函数, 当 $a > 0$, $x_1 > x_2 > 0$ 时, 求证:

$$f(x_1) - f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)x_1 < f(x_2) - f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)x_2.$$

21. (12分) 如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是棱长为 2 的正方形, 侧面 PAD 为正三角形, 且面 $PAD \perp$ 面 $ABCD$, E, F 分别为棱 AB, PC 的中点.



(1) 求证: $EF \parallel$ 平面 PAD ;

(2) 求二面角 $P-EC-D$ 的正切值.

22. (10分) 已知 $f(x) = A \sin(\omega x + \phi)$ ($A > 0, 0 < \omega < 4, |\phi| < \frac{\pi}{2}$) 过点 $(0, \frac{1}{2})$, 且当 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最大值 1.

(1) 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到函数 $g(x)$, 求函数 $g(x)$ 的表达式;

(2) 在 (1) 的条件下, 函数 $h(x) = f(x) + g(x) + 2 \cos^2 x - 1$, 求 $h(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的值域.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、A

【解析】

函数 $f(x) = \frac{x}{\ln x} - 3 + \frac{3a \ln x}{x} - a$ 的零点就是方程 $\frac{x}{\ln x} - 3 + \frac{3a \ln x}{x} - a = 0$ 的解, 设 $g(x) = \frac{x}{\ln x}$, 方程可化为

$(g(x) - 3)(g(x) - a) = 0$, 即 $g(x) = 3$ 或 $g(x) = a$, 求出 $g(x)$ 的导数 $g'(x)$, 利用导数得出函数的单调性和最值, 由此可根据方程解的个数得出 a 的范围.

【详解】

由题意得 $\frac{x}{\ln x} - 3 + \frac{3a \ln x}{x} - a = 0$ 有四个大于1的不等实根，记 $g(x) = \frac{x}{\ln x}$ ，则上述方程转化为

$$(g(x)-3) + a\left(\frac{3}{g(x)} - 1\right) = 0,$$

即 $(g(x)-3)(g(x)-a) = 0$ ，所以 $g(x) = 3$ 或 $g(x) = a$ 。

因为 $g'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$ ，当 $x \in (1, e)$ 时， $g'(x) < 0$ ， $g(x)$ 单调递减；当 $x \in (e, +\infty)$ 时， $g'(x) > 0$ ， $g(x)$ 单调递增；

所以 $g(x)$ 在 $x = e$ 处取得最小值，最小值为 $g(e) = e$ 。因为 $3 > e$ ，所以 $g(x) = 3$ 有两个符合条件的实数解，故

$f(x) = \frac{x}{\ln x} - 3 + \frac{3a \ln x}{x} - a$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上恰有四个不相等的零点，需 $a > e$ 且 $a \neq 3$ 。

故选：A。

【点睛】

本题考查复合函数的零点。考查转化与化归思想，函数零点转化为方程的解，方程的解再转化为研究函数的性质，本题考查了学生分析问题解决问题的能力。

2、A

【解析】

根据 $a \cos B + (b+3c) \cos A = 0$ ，利用正弦定理边化为角得 $\sin A \cos B + \cos A \sin B + 3 \sin C \cos A = 0$ ，整理为

$\sin C(1+3 \cos A) = 0$ ，根据 $\sin C \neq 0$ ，得 $\cos A = -\frac{1}{3}$ ，再由余弦定理得 $bc = 3$ ，又 $a^2 - b^2 - c^2 = 2$ ，代入公式

$$S = \sqrt{\frac{1}{4} \left[(bc)^2 - \left(\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2} \right)^2 \right]} \text{ 求解.}$$

【详解】

由 $a \cos B + (b+3c) \cos A = 0$ 得 $\sin A \cos B + \cos A \sin B + 3 \sin C \cos A = 0$ ，

即 $\sin(A+B) + 3 \sin C \cos A = 0$ ，即 $\sin C(1+3 \cos A) = 0$ ，

因为 $\sin C \neq 0$ ，所以 $\cos A = -\frac{1}{3}$ ，

由余弦定理 $a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cos A = \frac{2}{3}bc = 2$ ，所以 $bc = 3$ ，

$$\text{由 } \triangle ABC \text{ 的面积公式得 } S = \sqrt{\frac{1}{4} \left[(bc)^2 - \left(\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2} \right)^2 \right]} = \sqrt{\frac{1}{4} (3^2 - 1^2)} = \sqrt{2}$$

故选：A

【点睛】

本题主要考查正弦定理和余弦定理以及类比推理，还考查了运算求解的能力，属于中档题.

3、D

【解析】

通过计算 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x)$ ，可得 $f_{4k-3}(x), f_{4k-2}(x), f_{4k-1}(x), f_{4k}(x)$ ，最后计算可得结果.

【详解】

由题可知： $f(x) = x \sin x$

所以 $f_1(x) = \sin x + x \cos x, f_2(x) = 2 \cos x - x \sin x$

$f_3(x) = -3 \sin x - x \cos x, f_4(x) = -4 \cos x + x \sin x$

$f_5(x) = 5 \sin x + x \cos x, \dots$

所以猜想可知： $f_{4k-3}(x) = (4k-3) \sin x + x \cos x$

$f_{4k-2}(x) = (4k-2) \cos x - x \sin x$

$f_{4k-1}(x) = -(4k-1) \sin x - x \cos x$

$f_{4k}(x) = -4k \cos x + x \sin x$

由 $2019 = 4 \times 505 - 1, 2021 = 4 \times 506 - 3$

所以 $f_{2019}(x) = -2019 \sin x - x \cos x$

$f_{2021}(x) = 2021 \sin x + x \cos x$

所以 $f_{2019}(x) + f_{2021}(x) = 2 \sin x$

故选：D

【点睛】

本题考查导数的计算以及不完全归纳法的应用，选择题、填空题可以使用取特殊值，归纳猜想等方法的使用，属中档题.

4、B

【解析】

由 $f(x) = e^{|x|} - mx^2$ 是偶函数，则只需 $f(x) = e^{|x|} - mx^2$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上有且只有两个零点即可.

【详解】

解：显然 $f(x) = e^{|x|} - mx^2$ 是偶函数

所以只需 $x \in (0, +\infty)$ 时， $f(x) = e^{|x|} - mx^2 = e^x - mx^2$ 有且只有 2 个零点即可

令 $e^x - mx^2 = 0$ ，则 $m = \frac{e^x}{x^2}$

令 $g(x) = \frac{e^x}{x^2}$ ， $g'(x) = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$

$x \in (0, 2)$ ， $g'(x) < 0$ ， $g(x)$ 递减，且 $x \rightarrow 0^+$ ， $g(x) \rightarrow +\infty$

$x \in (2, +\infty)$ ， $g'(x) > 0$ ， $g(x)$ 递增，且 $x \rightarrow +\infty$ ， $g(x) \rightarrow +\infty$

$$g(x) \geq g(2) = \frac{e^2}{4}$$

$x \in (0, +\infty)$ 时， $f(x) = e^{|x|} - mx^2 = e^x - mx^2$ 有且只有 2 个零点，

只需 $m > \frac{e^2}{4}$

故选：B

【点睛】

考查函数性质的应用以及根据零点个数确定参数的取值范围，基础题.

5、D

【解析】

根据点差法得 $\frac{2}{a^2} = \frac{5}{b^2}$ ，再根据焦点坐标得 $a^2 + b^2 = 7$ ，解方程组得 $a^2 = 2$ ， $b^2 = 5$ ，即得结果.

【详解】

设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，由题意可得 $a^2 + b^2 = 7$ ，设 $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ ，则 MN 的中点为

$$\left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right), \text{ 由 } \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \text{ 且 } \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \text{ 得 } \frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{a^2} = \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{b^2}, \frac{2 \times (-\frac{2}{3})}{a^2} =$$

$$\frac{2 \times (-\frac{5}{3})}{b^2}, \text{ 即 } \frac{2}{a^2} = \frac{5}{b^2}, \text{ 联立 } a^2 + b^2 = 7, \text{ 解得 } a^2 = 2, b^2 = 5, \text{ 故所求双曲线的方程为 } \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{5} = 1. \text{ 故选 D.}$$

【点睛】

本题主要考查利用点差法求双曲线标准方程，考查基本求解能力，属于中档题.

6、A

【解析】

根据 $|OF|=1$ 可知 $y^2=4x$, 再利用抛物线的焦半径公式以及三角形面积公式求解即可.

【详解】

由题意可知抛物线方程为 $y^2=4x$, 设点 $M(x_1, y_1)$ 点 $N(x_2, y_2)$, 则由抛物线定义知, $|MN|=|MF|+|NF|=x_1+x_2+2$,

$|MN|=8$ 则 $x_1+x_2=6$.

由 $y^2=4x$ 得 $y_1^2=4x_1, y_2^2=4x_2$ 则 $y_1^2+y_2^2=24$.

又 MN 为过焦点的弦, 所以 $y_1y_2=-4$, 则 $|y_2-y_1|=\sqrt{y_1^2+y_2^2-2y_1y_2}=4\sqrt{2}$, 所以 $S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_2-y_1|=2\sqrt{2}$.

故选: A

【点睛】

本题考查抛物线的方程应用, 同时也考查了焦半径公式等. 属于中档题.

7、C

【解析】

观察图表, 判断四个选项是否正确.

【详解】

由表易知 A、B、D 项均正确, 2010 年中国 GDP 为 $\frac{1.4670}{3.55\%} \approx 41$ 万亿元, 2018 年中国 GDP 为 $\frac{3.6990}{4.11\%} = 90$ 万亿

元, 则从 2010 年至 2018 年, 中国 GDP 的总值大约增加 49 万亿, 故 C 项错误.

【点睛】

本题考查统计图表, 正确认识图表是解题基础.

8、B

【解析】

根据图象以及题中所给的条件, 求出 A, ω 和 φ , 即可求得 $f(x)$ 的解析式, 再通过平移变换函数图象关于 y 轴对称, 求得 m 的最小值.

【详解】

由于 $AB=5$, 函数最高点与最低点的高度差为 4,

所以函数 $f(x)$ 的半个周期 $\frac{T}{2}=3$, 所以 $T=\frac{2\pi}{\omega}=6 \Rightarrow \omega=\frac{\pi}{3}$,

又 $A(-1, 2)$, $0 < \varphi < \pi$, 则有 $2\sin\left(-1 \times \frac{\pi}{3} + \varphi\right) = 2$, 可得 $\varphi = \frac{5\pi}{6}$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/815120010243011300>