

第四章 指数函数与对数函数

4.5.3 函数模型的应用



必备知识解读

知识点1 利用已知函数模型解决问题

例1-1 韦伯—费希纳定律是表明心理量和物理量之间关系的定律，其中心理量和物理量之间满足关系式 $S = k \ln I + C$ （其中 S 表示心理量， k 是常数， I 表示物理量， C 是积分常数），表示的含义是心理量和物理量的对数值成正比.通过研究表明 $C = 3$ ，当 $I = e^2$ 时， $S = 7$ ．若 $S = 3 \ln 3$ ，则 I 的值大约为（参考数据： $e^{1.5} \approx 4.48$ ， $\sqrt{3} \approx 1.73$ ）（ **B** ）

A.1.07

B.1.16

C.1.45

D.2.15

【解析】 $\because C = 3$, 当 $I = e^2$ 时 , $S = 7$,

$\therefore 7 = k \ln e^2 + 3 = 2k + 3$, 解得 $k = 2$,

$\therefore S = 2 \ln I + 3$.

又 $S = 3 \ln 3$, $\therefore 3 \ln 3 = 2 \ln I + 3$, $\therefore \ln 27 = \ln I^2 + \ln e^3 = \ln(I^2 e^3)$,

$\therefore I^2 e^3 = 27$, $\therefore I = \sqrt{\frac{27}{e^3}} = \frac{3\sqrt{3}}{e^{1.5}} \approx 1.16$.

知识点2 建立函数模型解决实际问题

例2-2 某学校开展研究学习活动，一组同学获得了下面的一组试验数据：

	1.99	3	4	x	5.1	8
	0.99	1.58	2.01	y	2.35	3.00

如下四个模拟函数，能近似地反映这些数据的规律的是(**D**)

A. $y = 0.58x - 0.16$ B. $y = 2^x - 3.02$ C. $y = x^2 - 5.5x + 8$ D. $y = \log_2 x$

【解析】 根据题中数据画出散点图如图4.5.3-1所示.

由图可知上述散点大体分布在函数 $y = \log_2 x$ 的图象的附近，故函数 $y = \log_2 x$ 可以近似地反映这些数据的规律.

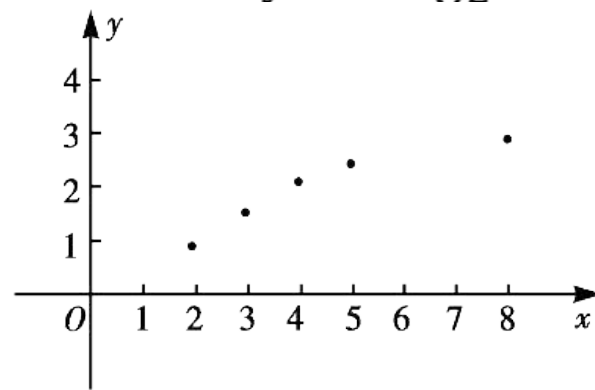


图4.5.3-1

关键能力构建

题型1 已知函数模型解决实际问题

例3 某火电厂对其使用的燃煤进行精细化碳排放污染物控制，产生的废气需经过严格过滤后排放.已知过滤过程中废气的剩余污染物数量 P （单位： mg/L ）与过滤时间 t （单位：小时）之间的关系式为 $P = P_0 e^{-kt}$ ，其中 P_0 为废气中原污染物总量， k 为常数.若过滤开始后经过3个小时废气中的污染物被过滤掉了原污染物总量的50%，那么要使废气中剩余污染物含量不超过5%，过滤开始后需要经过 n 小时，则正整数 n 的最小值为 13.（参考数据： $\ln 2 \approx 0.693$ ， $\ln 5 \approx 1.609$ ）

学审题

结构化思维解题

已知函数模型

$$P = P_0 e^{-kt}$$

代入

考虑到 $t=3$ 时 $P = \frac{1}{2}P_0$

$$\frac{1}{2}P_0 = P_0 e^{-3k}$$

解方程

指数对数互化

$$3k = \ln 2$$

代入

考虑函数关系式

$$P = P_0 e^{-\frac{\ln 2}{3}t}$$

 $P \leq 5\%P_0$ 考虑到 n 小时后的污染物含量

$$P = P_0 e^{-\frac{\ln 2}{3}n} \leq 5\%P_0$$

解不等式

$$n \geq \frac{2\ln 2 + \ln 5}{\ln 2} \times 3 = (2 +$$

$$\frac{\ln 5}{\ln 2}) \times 3 \approx 12.965$$

考虑到正整数 n
 n 的最小
值为 13

例4 目前某县有100万人，经过 x 年后为 y 万人.如果年平均增长率是1.2%，请回答下列问题：

(1) 写出 y 关于 x 的函数解析式；

【解析】 当 $x = 1$ 时， $y = 100 + 100 \times 1.2\% = 100(1 + 1.2\%)$ ；

当 $x = 2$ 时， $y = 100(1 + 1.2\%) + 100(1 + 1.2\%) \times 1.2\% = 100(1 + 1.2\%)^2$ ；

当 $x = 3$ 时， $y = 100(1 + 1.2\%)^2 + 100(1 + 1.2\%)^2 \times 1.2\% = 100(1 + 1.2\%)^3$ ；

.....

故 y 关于 x 的函数解析式为 $y = 100(1 + 1.2\%)^x (x \in \mathbf{N}_+)$.

(2) 计算10年后该县的人口总数 (精确到0.1万人);

【解析】 当 $x = 10$ 时, $y = 100 \times (1 + 1.2\%)^{10} = 100 \times 1.012^{10} \approx 112.7$.

故10年后该县约有112.7万人.

(3) 计算大约多少年后该县的人口总数将达到120万(精确到1年)。

【解析】 设 x 年后该县的人口总数为120万, 即 $100 \times (1 + 1.2\%)^x = 120$, 解得

$$x = \log_{1.012} \frac{120}{100} \approx 15.3.$$

因为 x 为年份, 所以根据实际意义知, 大约16年后该县的人口总数将达到120万.

【学会了吗|变式题】

(2024·北京市怀柔一中月考)荀子《劝学》中说：“不积跬步，无以至千里；不积小流无以成江海。”在“进步率”和“退步率”都是1%的前提下，我们可以把 $(1 + 1\%)^{365}$ 看作是经过365天的“进步值”， $(1 - 1\%)^{365}$ 看作是经过365天的“退步值”，可以计算得到，一年后的“进步值”是“退步值”的 $\frac{1.01^{365}}{0.99^{365}} \approx 1\,481$ 倍。那么，如果每天的“进步率”和“退步率”都是20%，要使“进步值”是“退步值”的1 000倍，大约需要经过 $(\lg 2 \approx 0.301, \lg 3 \approx 0.477)$ (**D**)

A.23天

B.21天

C.19天

D.17天

【解析】 设经过 x 天后，“进步值”与“退步值”的比 $\frac{1.2^x}{0.8^x} \geq 1\,000$ ，则 $\left(\frac{3}{2}\right)^x \geq 1\,000$ ，两边取以10为底的对数得 $x \cdot \lg \frac{3}{2} \geq 3$ ，则 $x \geq \frac{3}{\lg 3 - \lg 2} \approx \frac{3}{0.176} \approx 17.05$ ，所以大约需要经过17天。

例5 (2024·黑龙江省大庆市期初)生物学家采集了一些动物体重和脉搏率对应的数据,并经过研究得到体重和脉搏率的对数型关系: $\ln f = \ln k - \frac{\ln W}{3}$, 其中 f 是脉搏率

(心跳次数/min), 体重为 W (g), k 为正的常数, 则体重为 400 g 的豚鼠和体重为 3 200 g 的兔子的脉搏率之比为(C)

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. 8

【解析】 当 $W = 400$ 时, $\ln f_1 = \frac{3\ln k - \ln 400}{3}$,

即 $\ln f_1^3 = \ln k^3 - \ln 400$, 则 $f_1^3 = \frac{k^3}{400}$.

当 $W = 3\,200$ 时, $\ln f_2 = \frac{3\ln k - \ln 3\,200}{3}$,

即 $\ln f_2^3 = \ln k^3 - \ln 3\,200$, 则 $f_2^3 = \frac{k^3}{3\,200}$.

所以 $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)^3 = 8$, 即 $\frac{f_1}{f_2} = 2$.

例6 (2024·江西省宜丰中学开学考试)2024年3月27日清晨,我国在太原卫星发射中心使用长征六号改运载火箭,成功将云海三号02星发射升空,卫星顺利进入预定轨道,发射任务获得圆满成功.据了解,在不考虑空气动力和地球引力的理想状态下,可以用公式 $v = v_0 \cdot \ln \frac{M}{m}$ 计算火箭的最大速度 v (单位:m/s),其中 v_0 (单位:m/s)是喷流相对速度, m (单位:kg)是火箭(除推进剂外)的质量, M (单位:kg)是推进剂与火箭质量的总和, $\frac{M}{m}$ 称为总质比,已知A型火箭的喷流相对速度为1 000 m/s

(1)当总质比为200时,利用给出的参考数据求A型火箭的最大速度;

【解析】当总质比为200时, $v = 1\,000 \cdot \ln 200 \approx 1\,000 \times 5.3 = 5\,300(\text{m/s})$, \therefore 当总质比为200时,A型火箭的最大速度约为5 300 m/s.

(2) 经过材料更新和技术改进后, A型火箭的喷流相对速度提高到了原来的 $\frac{3}{2}$ 倍, 总质比变为原来的 $\frac{1}{3}$, 若要使火箭的最大速度至少增加500 m/s, 求在材料更新和技术改进前总质比的最小整数值.

参考数据: $\ln 200 \approx 5.3$, $2.718 < e < 2.719$.

【解析】 由题意，经过材料更新和技术改进后，A型火箭的喷流相对速度为1 500 m/s，总质比变为 $\frac{M}{3m}$ ，要使火箭的最大速度至少增加500 m/s，则需

$$1\,500 \cdot \ln \frac{M}{3m} - 1\,000 \cdot \ln \frac{M}{m} \geq 500,$$

$$\text{化简得, } 3\ln \frac{M}{3m} - 2\ln \frac{M}{m} \geq 1,$$

$$\therefore \ln \left(\frac{M}{3m}\right)^3 - \ln \left(\frac{M}{m}\right)^2 \geq 1, \text{ 整理得 } \ln \frac{M}{27m} \geq 1,$$

$$\therefore \frac{M}{27m} \geq e, \text{ 则 } \frac{M}{m} \geq 27e,$$

由参考数据，知 $2.718 < e < 2.719$ ，

$$\therefore 73.386 < 27e < 73.413,$$

\therefore 材料更新和技术改进前总质比的最小整数值为74.

例7 (2024·湖南省长沙市一中开学考试)某医药研究所开发一种新药,如果成年人按规定的剂量服用,据监测,服药后每毫升血液中的含药量 y (单位: μg)与时间 t (单位:h)之间近似满足如图4.5.3-2所示的曲线.

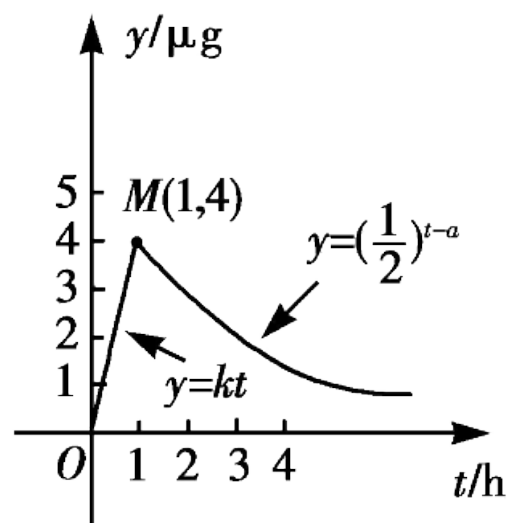


图4.5.3-2

(1) 写出服药后每毫升血液中的含药量 y 与时间 t 之间的函数关系式 $y = f(t)$;

【解析】 当 $0 \leq t < 1$ 时, $y = kt$, 由点 $M(1,4)$ 在直线上, 得 $4 = k$, 故 $y = 4t$;

当 $t \geq 1$ 时, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{t-a}$, 由点 $M(1,4)$ 在曲线上,

$$\text{得 } 4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-a},$$

$$\text{解得 } a = 3, \text{ 即 } y = \left(\frac{1}{2}\right)^{t-3}.$$

$$\text{故 } y = f(t) = \begin{cases} 4t, & 0 \leq t < 1, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{t-3}, & t \geq 1. \end{cases}$$

(2) 据进一步测定：每毫升血液中含药量不少于 $0.25 \mu\text{g}$ 时，对治疗疾病有效，求服药一次治疗疾病的有效时间.

【解析】 由题意知 $f(t) \geq 0.25$, 则 $\begin{cases} 4t \geq 0.25, \\ 0 \leq t < 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{t-3} \geq 0.25, \\ t \geq 1, \end{cases}$ 解得 $\frac{1}{16} \leq t \leq 5$.

所以服药一次治疗疾病的有效时间为 $5 - \frac{1}{16} = \frac{79}{16}$ (h).

题型2 建立函数模型解决实际问题

例8 [教材改编P152例6] (2024·江苏省盐城市四校联考期末)科技创新在经济发展中的作用日益凸显.某科技公司为实现9 000万元的投资收益目标,准备制定一个激励研发人员的奖励方案:当投资收益达到3 000万元时,按投资收益进行奖励,要求奖金 y (单位:万元)随投资收益 x (单位:万元)的增加而增加,奖金总数不低于100万元,且奖金总数不超过投资收益的20%.

(1) 现有三个奖励函数模型：① $y = 0.03x + 8$ ，② $y = 0.8^x + 200$ ，
③ $y = 100\log_{20}x + 50$ ．试分析这三个函数模型是否符合公司要求．

【解析】根据题意可知，符合公司要求的函数在 $[3\ 000, 9\ 000]$ 上单调递增，且对任意 $x \in [3\ 000, 9\ 000]$ ，恒有 $y \geq 100$ 且 $y \leq \frac{x}{5}$ ．

①对于函数 $y = 0.03x + 8$ ，在 $[3\ 000, 9\ 000]$ 上单调递增，当 $x = 3\ 000$ 时，
 $y = 98 < 100$ ，不符合题意；

②对于函数 $y = 0.8^x + 200$ ，在 $[3\ 000, 9\ 000]$ 上单调递减，不符合题意；

③对于函数 $y = 100\log_{20}x + 50$ ，在 $[3\ 000, 9\ 000]$ 上单调递增，
当 $x = 3\ 000$ 时， $y_{\min} = 100\log_{20}3\ 000 + 50 > 100$ ，

$x = 9\ 000$ 时， $y_{\max} = 100\log_{20}9\ 000 + 50 < 100\log_{20}160\ 000 + 50 = 450$ ，
而 $\frac{x}{5} \geq \frac{3\ 000}{5} = 600$ ，所以当 $x \in [3\ 000, 9\ 000]$ 时， $y \leq \frac{x}{5}$ 恒成立，符合题意．

因此， $y = 100\log_{20}x + 50$ 函数模型符合公司要求．

(2) 根据(1)中符合公司要求的函数模型, 要使奖金达到350万元, 公司的投资收益至少为多少万元?

【解析】 由 $100\log_{20}x + 50 \geq 350$, 即 $\log_{20}x \geq 3$, 解得 $x \geq 8\,000$, 故公司的投资收益至少为8 000万元.

例9 某个体经营者把前六个月试销A, B两种商品的逐月投资与所获纯利润列成下表:

	1	2	月投资A	4	5	6
纯利润/万元	0.65	1.39	1.85	2	1.84	1.40

月投资B 额/万元	1	2	3	4	5	6
纯利润/万元	0.25	0.49	0.76	1	1.26	1.51

该经营者准备下个月投入12万元经营这两种商品, 但不知投入A, B两种商品各多少万元才最合算. 请你帮助制订一个资金投入方案, 使得该经营者能获得最大纯利润, 并求出最大纯利润. (精确到 0.1万元)

【解析】以投资额为横坐标，纯利润为纵坐标，画出散点图，如图4.5.3-3所示.

据此，可考虑用函数 $y = -a(x - 4)^2 + 2(a > 0)$

①表示投资A种商品的金额与其纯利润的关系，
用 $y = bx(b > 0)$ ②表示投资B种商品的金额与其
纯利润的关系.

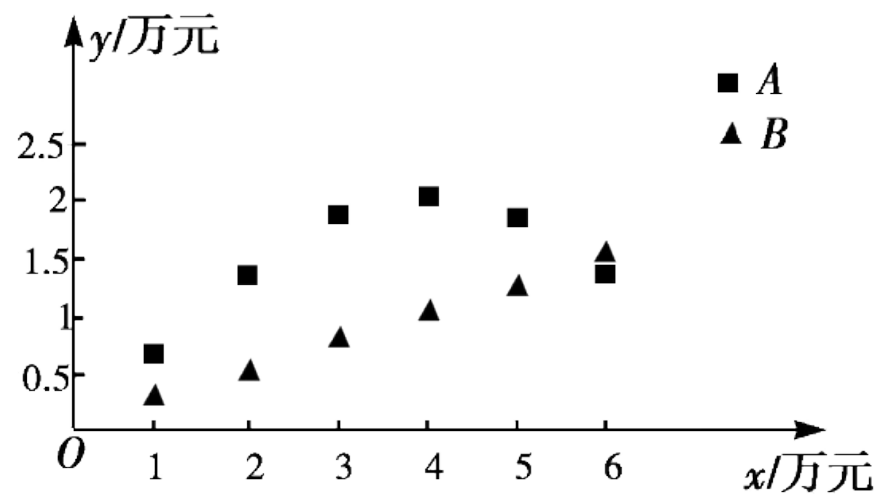


图4.5.3-3

把 $x = 1, y = 0.65$ 代入①式, 得 $0.65 = -a(1 - 4)^2 + 2$, 解得 $a = 0.15$, 经检验, 解析式满足题意, 故所获纯利润关于月投资A种商品的金额的函数解析式可近似地用 $y = -0.15(x - 4)^2 + 2$ 来表示.

把 $x = 4, y = 1$ 代入②式, 解得 $b = 0.25$, 经检验, 解析式满足题意, 故所获纯利润关于月投资B种商品的金额的函数解析式可近似地用 $y = 0.25x$ 来表示.

设下个月投入 A ， B 两种商品的资金分别是 x_A 万元， x_B 万元，纯利润为 W 万元，

$$\text{得} \begin{cases} x_A + x_B = 12, \\ W = y_A + y_B = -0.15(x_A - 4)^2 + 2 + 0.25x_B, \end{cases}$$

$$\text{即 } W = -0.15\left(x_A - \frac{19}{6}\right)^2 + 0.15 \times \left(\frac{19}{6}\right)^2 + 2.6.$$

故当 $x_A = \frac{19}{6} \approx 3.2$ 时， W 取得最大值，约为4.1，

此时， $x_B = 8.8$.

即下个月投入 A ， B 两种商品的资金分别约为3.2万元，8.8万元时，可获得最大纯利润，约为4.1万元.

核心素养聚焦

考向 函数模型的实际应用

例10 **【多选题】** (2023·新课标 I 卷) 噪声污染问题越来越受到重视. 用声压级来度量声音的强弱, 定义声压级 $L_p = 20 \times \lg \frac{p}{p_0}$, 其中常数 p_0 ($p_0 > 0$) 是听觉下限阈值, p 是实际声压. 下表为不同声源的声压级:

下表为不同声源的声压级:

声源		与声源
燃油汽车	10	
混合动力汽车	10	
电动汽车	10	40

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/815130310030012002>