第 69 讲　直线与圆锥曲线的位置关系

知识梳理

知识点一、直线和曲线联立

（1）椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 与直线 $l:y=kx+m$ 相交于 AB 两点，设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$

$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=kx+m\end{cases}$，$(b^2+k^2a^2)x^2+2a^2kmx+a^2m^2-a^2b^2=0$

椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 与过定点 $(m，0)$ 的直线 l 相交于 AB 两点，设为 $x=ty+m$，

如此消去 x，保留 y，构造的方程如下：$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ x=ty+m\end{cases}$，$(a^2+t^2b^2)y^2+2b^2tmy+b^2m^2-a^2b^2=0$

注意：

①如果直线没有过椭圆内部一定点，是不能直接说明直线与椭圆有两个交点的，一般都需要摆出 $\Delta>0$，满足此条件，才可以得到韦达定理的关系.

②焦点在 y 轴上的椭圆与直线的关系，双曲线与直线的关系和上述形式类似，不在赘述.

（2）抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 与直线 $x=ty+m$ 相交于 A、B 两点，设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$

联立可得 $y^2=2p(ty+m)$，$\Delta>0$ 时，$\begin{cases}y_1+y_2=2pt\\ y_1y_2=-2pm\end{cases}$

特殊地，当直线 AB 过焦点的时候，即 $m=\frac{p}{2}$，$y_1y_2=-2pm=-p^2$，$x_1x_2=\frac{y_1^2}{2p}\cdot\frac{y_2^2}{2p}=\frac{1}{4}p^2$，因为 AB 为通径的时候也满足该式，根据此时 A、B 坐标来记忆.

抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 与直线 $y=kx+m$ 相交于 C、D 两点，设 $C(x_1，y_1)$，$D(x_2，y_2)$

联立可得 $x^2=2p(kx+m)$，$\Delta>0$ 时，$\begin{cases}x_1+x_2=2pk\\ x_1x_2=-2pm\end{cases}$

注意：在直线与抛物线的问题中，设直线的时候选择形式多思考分析，往往可以降低计算量．开口向上选择正设；开口向右，选择反设；注意不可完全生搬硬套，具体情况具体分析.

总结：韦达定理连接了题干条件与方程中的参数，所以我们在处理例如向量问题，面积问题，三点共线问题，角度问题等常考内容的时候，要把题目中的核心信息，转化为坐标表

达，转化为可以使用韦达定理的形式，这也是目前考试最常考的方式.

知识点二、根的判别式和韦达定理

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 与 $y=kx+m$ 联立，两边同时乘上 a^2b^2 即可得到 $(a^2k^2+b^2)x^2+2kma^2x+a^2(m^2-b^2)=0$，为了方便叙述，将上式简记为 $Ax^2+Bx+C=0$．该式可以看成一个关于 x 的一元二次方程，判别式为 $\Delta=4a^2b^2(a^2k^2+b^2-m^2)$ 可简单记 $4a^2b^2(A-m^2)$.

同理 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 和 $x=ty+m$ 联立 $(a^2+t^2b^2)y^2+2b^2tmy+b^2m^2-a^2b^2=0$，为了方便叙述，将上式简记为 $Ay^2+By+C=0$，$\Delta=4a^2b^2(a^2+t^2b^2-m^2)$，可简记 $4a^2b^2(A-m^2)$.

l 与 C 相离 $\Leftrightarrow\Delta<0$；l 与 C 相切 $\Leftrightarrow\Delta=0$；l 与 C 相交 $\Leftrightarrow\Delta>0$.

注意：（1）由韦达定理写出 $x_1+x_2=-\frac{B}{A}$，$x_1x_2=\frac{C}{A}$，注意隐含条件 $\Delta>0$.

（2）求解时要注意题干所有的隐含条件，要符合所有的题意.

（3）如果是焦点在 y 轴上的椭圆，只需要把 a^2，b^2 互换位置即可.

（4）直线和双曲线联立结果类似，焦点在 x 轴的双曲线，只要把 b^2 换成 $-b^2$ 即可；

焦点在 y 轴的双曲线，把 a^2 换成 $-b^2$ 即可，b^2 换成 a^2 即可.

（5）注意二次曲线方程和二次曲线方程往往不能通过联立消元，利用 Δ 判断根的关系，因为此情况下往往会有增根，根据题干的隐含条件可以舍去增根（一般为交点横纵坐标的范围限制），所以在遇到两条二次曲线交点问题的时候，使用画图的方式分析，或者解方程组，真正算出具体坐标.

知识点三、弦长公式

设 $M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$ 根据两点距离公式 $|MN|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

（1）若 M、N 在直线 $y=kx+m$ 上，代入化简，得 $|MN|=\sqrt{1+k^2}\left|x_1-x_2\right|$；

（2）若 M、N 所在直线方程为 $x=ty+m$，代入化简，得 $|MN|=\sqrt{1+t^2}\left|y_1-y_2\right|$

（3）构造直角三角形求解弦长，$|MN|=\frac{|x_2-x_1|}{|\cos\alpha|}=\frac{|y_2-y_1|}{|\sin\alpha|}$．其中 k 为直线 MN 斜率，α 为直线倾斜角.

注意：（1）上述表达式中，当为 $k\neq0$，$m\neq0$ 时，$mk=1$；

（2）直线上任何两点距离都可如上计算，不是非得直线和曲线联立后才能用.

（3）直线和曲线联立后化简得到的式子记为 $Ax^2+Bx+C=0(A\neq0)$，判别式为

$\Delta = B^2 - 4AC$，$\Delta > 0$时，$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{(-\frac{B}{A})^2 - 4 \cdot \frac{C}{A}} = \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{|A|} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|A|}$，

利用求根公式推导也很方便，使用此方法在解题化简的时候可以大大提高效率.

（4）直线和圆相交的时候，过圆心做直线的垂线，利用直角三角形的关系求解弦长会更加简单.

（5）直线如果过焦点可以考虑焦点弦公式以及焦长公式.

知识点四、已知弦 AB 的中点，研究 AB 的斜率和方程

（1）AB 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b.0)$ 的一条弦，中点 $M(x_0, y_0)$，则 AB 的斜率为 $-\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$，

运用点差法求 AB 的斜率；设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)(x_1 \neq x_2)$，$A$，$B$ 都在椭圆上，

所以 $\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \end{cases}$，两式相减得 $\frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = 0$

所以 $\frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{a^2} + \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{b^2} = 0$

即 $\frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)} = -\frac{b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)} = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$，故 $k_{AB} = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$

（2）运用类似的方法可以推出；若 AB 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b.0)$ 的弦，中点 $M(x_0, y_0)$，则 $k_{AB} = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$；若曲线是抛物线 $y^2 = 2px(p > 0)$，则 $k_{AB} = \frac{p}{y_0}$.

必考题型全归纳

题型一：直线与圆锥曲线的位置关系

例 1.（2024·全国·高三对口高考）已知椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的两焦点为 F_1，F_2，点 $P(x_0, y_0)$ 满足 $0 < \frac{x_0^2}{2} + y_0^2 < 1$，则直线 $\frac{x_0 x}{2} + y_0 y = 1$ 与椭圆 C 的公共点个数为（　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．不确定，与 P 点的位置有关

例 2.（2024·全国·高三对口高考）若直线 l 被圆 $C:x^2+y^2=2$ 所截的弦长不小于 2，则 l 与下列曲线一定有公共点的是（　）

A．$(x-1)^2+y^2=1$　　B．$\frac{x^2}{2}+y^2=1$

C．$y=x^2$　　D．$x^2-y^2=1$

例 3.（2024·重庆·统考二模）已知点 $P(1,2)$ 和双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{4}=1$，过点 P 且与双曲线 C 只有一个公共点的直线有（　）

A．2 条　　B．3 条　　C．4 条　　D．无数条

变式 1.（1999·全国·高考真题）给出下列曲线方程：

①$4x+2y-1=0$；

②$x^2+y^2=3$；

③$\frac{x^2}{2}+y^2=1$；

④$\frac{x^2}{2}-y^2=1$.

其中与直线 $y=-2x-3$ 有交点的所有曲线方程是（　）

A．①③　　B．②④　　C．①②③　　D．②③④

变式 2.（2024·辽宁沈阳·统考一模）命题 p：直线 $y=kx+b$ 与抛物线 $x^2=2py$ 有且仅有一个公共点，命题 q：直线 $y=kx+b$ 与抛物线 $x^2=2py$ 相切，则命题 p 是命题 q 的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．非充分非必要条件

变式 3.（2024·全国·高三专题练习）过点 $(1,2)$ 作直线，使它与抛物线 $y^2=4x$ 仅有一个公共点，这样的直线有（　）

A．1 条　　B．2 条　　C．3 条　　D．4 条

【解题方法总结】

（1）直线与圆锥曲线有两个不同的公共点的判定：通常的方法是直线与圆锥曲线方程联立方程消元后得到一元二次方程，其中 $\Delta>0$；另一方面就是数形结合，如直线与双曲线有两个不同的公共点，可通过判定直线的斜率与双曲线渐近线的斜率的大小得到.

（2）直线与圆锥曲线只有一个公共点则直线与双曲线的一条渐近线平行，或直线与抛物线的对称轴平行，或直线与圆锥曲线相切.

题型二：中点弦问题

方向 1：求中点弦所在直线方程问题；

例 4.（2024·新疆伊犁·高二统考期末）过椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 内一点 $P(1,1)$ 引一条恰好被 P 点平分的弦，则这条弦所在直线的方程是_____

例 5.（2024·重庆·统考模拟预测）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$，圆 O：$x^2+y^2=4$，直线 l 与圆 O 相切于第一象限的点 A，与椭圆 C 交于 P,Q 两点，与 x 轴正半轴交于点 B. 若 $|PB|=|QA|$，则直线 l 的方程为_____.

例 6.（2024·陕西榆林·高二统考期末）已知 A,B 为双曲线 $x^2-\frac{y^2}{9}=1$ 上两点，且线段 AB 的中点坐标为 $(-1,-4)$，则直线 AB 的斜率为_____.

变式 4.（2024·全国·高二专题练习）双曲线 $9x^2-16y^2=144$ 的一条弦的中点为 $A(8,3)$，则此弦所在的直线方程为_____.

变式 5.（2024·陕西宝鸡·高二校联考期末）抛物线 C：$y^2=6x$ 与直线 l 交于 A，B 两点，且 AB 的中点为 $(m,-2)$，则 l 的斜率为_____.

变式 6.（2024·高二课时练习）已知抛物线 C 的顶点为坐标原点，准线为 $x=-1$，直线 l 与抛

物线 C 交于 M,N 两点，若线段 MN 的中点为 $(1,1)$，则直线 l 的方程为_____.

方向 2：求弦中点的轨迹方程问题；

变式 7.（2024·全国·高三专题练习）直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 交于 A，B 两点，已知直线 l 的斜率为 1，则弦 AB 中点的轨迹方程是_____.

变式 8.（2024·上海浦东新·高二上海市实验学校校考期末）已知椭圆 $x^2+4y^2=16$ 内有一点 $A(1,1)$，弦 PQ 过点 A，则弦 PQ 中点 M 的轨迹方程是_____.

变式 9.（2024·全国·高一专题练习）斜率为 2 的平行直线截双曲线 $x^2-y^2=1$ 所得弦的中点的轨迹方程是_____.

变式 10.（2024·全国·高三专题练习）直线 $l:ax-y-(a+5)=0$（a 是参数）与抛物线 $f:y=(x+1)^2$ 的相交弦是 AB，则弦 AB 的中点轨迹方程是_____.

变式 11.（2024·全国·高三专题练习）设椭圆方程为$x^2+\frac{y^2}{4}=1$，过点$M\left(0,1\right)$的直线l交椭圆于点 A、B，O 是坐标原点，点 P 满足$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$，当 l 绕点 M 旋转时，求动点 P 的轨迹方程.

方向 3：对称问题

变式 12.（2024·江苏·高二专题练习）已知椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦距为$2c$，左右焦点分别为$F_1$、$F_2$，圆$F_1:(x+c)^2+y^2=1$与圆$F_2:(x-c)^2+y^2=9$相交，且交点在椭圆 E 上，直线$l:y=x+m$与椭圆 E 交于 A、B 两点，且线段 AB 的中点为 M，直线 OM 的斜率为$-\frac{1}{4}$.

(1)求椭圆 E 的方程；

(2)若$m=1$，试问 E 上是否存在 P、Q 两点关于 l 对称，若存在，求出直线 PQ 的方程，若不存在，请说明理由.

变式 13.（2024·江苏南通·高二统考期中）已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的离心率为 e，且过点$\left(1,e\right)$和$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)若椭圆 C 上有两个不同点 A，B 关于直线$y=x+\frac{1}{2}$对称，求$\left|AB\right|$.

变式 14.（2024·全国·高三专题练习）已知 O 为坐标原点，点 $\left(1,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 在椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 上，直线 l：$y=x+m$ 与 C 交于 A，B 两点，且线段 AB 的中点为 M，直线 OM 的斜率为 $-\frac{1}{2}$.

(1)求 C 的方程；

(2)若 $m=1$，试问 C 上是否存在 P，Q 两点关于 l 对称，若存在，求出 P，Q 的坐标，若不存在，请说明理由.

变式 15.（2024·上海浦东新·高二上海南汇中学校考期中）已知曲线 C 的方程是 $\left(1-a^2\right)x^2+y^2+a^2-1=0$，其中 $a>0$，$a\neq 1$，直线 l 的方程是 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x-a$.

(1)请根据 a 的不同取值，判断曲线 C 是何种圆锥曲线；

(2)若直线 l 交曲线 C 于两点 M，N，且线段 MN 中点的横坐标是 -2，求 a 的值；

(3)若 $a=\sqrt{2}$，试问曲线 C 上是否存在不同的两点 A，B，使得 A，B 关于直线 l 对称，并说明理由.

变式 16.（2024·江苏·高二假期作业）双曲线 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$，且与椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 有公共焦点.

（1）求双曲线 C 的方程.

（2）双曲线 C 上是否存在两点 A，B 关于点（4，1）对称？若存在，求出直线 AB 的方程；

若不存在，说明理由.

变式 17.（2024·高二课时练习）已知直线 l 与抛物线 $y^2=8x$ 交于 A，B 两点，且线段 AB 恰好被点 $P(2,2)$ 平分.

(1)求直线 l 的方程；

(2)抛物线上是否存在点 C 和 D，使得 C，D 关于直线 l 对称?若存在，求出直线 CD 的方程；若不存在，请说明理由.

变式 18.（2024·全国·高三专题练习）已知抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点为 F，直线 l：$y=2x+a$ 与抛物线 C 交于 A，B 两点.

(1)若 $a=-1$，求 $\triangle FAB$ 的面积；

(2)若抛物线 C 上存在两个不同的点 M，N 关于直线 l 对称，求 a 的取值范围.

方向 4：斜率之积问题

变式 19.（2024·云南昭通·高二校考期中）已知斜率为 $k_1\left(k_1\neq 0\right)$ 的直线 l 与椭圆 $x^2+\frac{y^2}{16}=1$ 交于 A,B 两点，线段 AB 的中点为 C，直线 OC（O 为坐标原点）的斜率为 k_2，则 $k_1\cdot k_2=$（　）

A．-4　　B．$-\frac{1}{4}$　　C．$-\frac{1}{16}$　　D．-16

变式 20.（2024·江西·校联考模拟预测）已知直线$l_1: y=2x+2$过椭圆 C；$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一个焦点，与 C 交于 A，B 两点，与l_1平行的直线l_2与 C 交于 M，N 两点，若 AB 的中点为 P，MN 的中点为 Q，且 PQ 的斜率为$-\frac{4}{9}$，则 C 的方程为（　　）

A．$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　B．$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

C．$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$　　D．$\frac{5x^2}{36}+\frac{5y^2}{16}=1$

变式 21.（2024·江西赣州·高二统考期末）椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，$M$，$N$ 是椭圆上关于原点对称的两动点，P 为椭圆上任意一点，直线 PM， PN 的斜率分别为k_1， k_2，则$|k_1|+|k_2|$的最小值为（　）

A．$\frac{4}{3}$　　B．$\frac{3}{2}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{4}{9}$

变式 22.（2024·山西晋中·高二校考阶段练习）过点$M(-2,0)$的直线与椭圆$x^2+2y^2=2$相交于P_1，P_2两点，设线段P_1P_2的中点为P，若直线P_1P_2的斜率为$k_1(k_1\neq 0)$，直线OP（O为原点）的斜率为k_2，则k_1k_2等于（　）.

A．–2　　B．2　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$-\frac{1}{2}$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/815141021240011342